Nombres de Betti L^2

Exposés de Wolfgang Lück

1. Introduction to L^2-Betti numbers

We give the definition of the von Neumann dimension of a finitely generated Hilbert module and of the L^2-Betti numbers of a covering of a finite CW-complex. We present their basic properties such as homotopy invariance, Poincaré duality, Morse inequalities, multiplicativity, and so on. We explain the L^2-Hodge de Rham Theorem and show as a first application that the Euler characteristic of a hyperbolic closed manifold M of dimension n satisfies $(-1)^n \cdot \chi(M) > 0$. We discuss some outstanding conjectures such as the Atiyah Conjecture and the Singer Conjecture. This lecture is meant to be an elementary introduction.

2. Generalized Dimension Functions

We extend the notion of the von Neumann dimension of a finitely generated Hilbert module to a dimension function which is defined for all modules over the group von Neumann algebra of a discrete group G. This is used to extend the definition of the L^2-Betti numbers to an arbitrary space with G-action. In particular this applies to the classifying space EG and leads to the definition of the L^2-Betti numbers of any discrete group. We discuss applications of these notions to geometry, group theory and K-theory.

3. Approximating L^2-Invariants by finite-dimensional analogues

Let $\overline{X} \to X$ be a G-covering and $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ be a sequence of normal subgroups of finite index whose intersection $\cap_{n \geq 0} G_n$ is the trivial group. We then explain the formula

$$b_p^{(2)}(\overline{X}; G) \;=\; \lim_{n \to \infty} \frac{b_p(G_n \backslash \overline{X})}{[G : G_n]},$$

which relates the L^2-Betti numbers of $\overline{X}$ to the classical Betti numbers of the compact CW-complexes $G_n \backslash \overline{X}$. Similar results are available for the L^2-signature and the classical signatures. We discuss generalizations of these approximation results and applications to the Atiyah Conjecture.

Exposés de Damien Gaboriau

1. Actions ergodiques et relations d'équivalence

Lorsqu'un groupe discret dénombrable Γ agit sur un espace, il produit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$: "être dans la même orbite". On se place dans la situation où l'on demande seulement à l'action d'être par automorphismes mesurables et de préserver une mesure finie sur un espace borélien standard (X, μ). L'espace quotient $\Gamma\backslash X$ n'a en général pas de jolie structure : penser à une action d'un groupe de rotations sur le cercle, ou une action par *décalage de Bernoulli* de Γ sur $\{0,1\}^{\Gamma}$. On se demande néanmoins : quelles informations concernant Γ sont retenues par $\mathcal{R}$ ou par l'*espace quotient* $\mathcal{R}\backslash X$?

Deux actions libres de deux groupes Γ_1 et Γ_2 sont dites *orbitalement équivalentes* (OE) si elles produisent la même relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et *stablement orbitalement équivalentes* (SOE) si elles produisent le même espace quotient. Cette dernière notion fournit d'ailleurs un analogue mesurable à la quasi-isométrie des deux groupes Γ_1 et Γ_2 : ils sont *mesurablement équivalents* (au sens de Gromov) (ME).

On commence par présenter quelques résultats, classiques ou plus récents, liés à la moyennabilité (théorème de Dye, Connes-Feldman-Weiss) ou à la rigidité des réseaux des groupes de Lie simples de rang supérieur (Zimmer, Furman).

2. Actions simpliciales de relations d'équivalence et nombres de Betti L^2

Puis on commence à imiter la démarche suivie dans la définition des nombres de Betti L^2 des actions de groupes pour conduire aux nombres de Betti L^2 de $\mathcal{R}$ (qui pourra être vue comme groupoïde). On introduit la notion de $\mathcal{R}$-actions simpliciales propres et de dimension de von Neumann d'un $\mathcal{R}$-module de Hilbert de type fini.

3. Invariances des nombres de Betti L^2 des groupes par équivalence orbitale

On présente et donne les éléments de la preuve du résultat suivant : *Si Γ_1 et Γ_2 admettent des actions libres orbitalement équivalentes, alors ils ont les mêmes nombres de Betti L^2.*

Pour ce faire, on définit les nombres de Betti L^2 d'une $\mathcal{R}$-action simpliciale propre et on donne des exemples où ces nombres peuvent être calculés explicitement, notamment pour une action diagonale de Γ, produit d'une action sur (X, μ) et d'une action sur un complexe simplicial localement fini.

Puis on étudie ce qui reste de la propriété d'invariance par homotopie dans notre situation.

Des applications seront présentées à la classification des groupes modulo ME, des relations d'équivalences mesurées standards et au calcul des nombres de Betti L^2 de certains groupes.

Par exemple : *deux groupes de la forme produit direct de groupes libres* $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$ *sont mesurablement équivalents si et seulement si ils ont le même* ℓ. *Ils admettent des actions libres OE si et seulement si ils ont de plus le même* $\prod_1^\ell (p_i - 1)$.

On obtient aussi des résultats concernant les réseaux des groupes de Lie semi-simples de rang 1. *Si deux réseaux de* $Sp(n, 1)$ *et* $Sp(p, 1)$ *(ou bien de* $SU(n, 1)$ *et* $SU(p, 1)$*) sont ME, alors* $p = n$. *Si deux réseaux de* $SO(n, 1)$ *et* $SO(p, 1)$ *sont ME, alors* n *et* p *ont même parité. Si deux réseaux de* $SO(2n + 1, 1)$ *et* $SO(2p + 1, 1)$ *sont ME, avec* $p \leq n$*, alors* $n \leq 2p$.