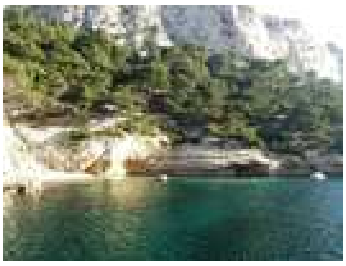
Thèmes choisis de géométrie des groupes

Frédéric Paulin

Version très préliminaire

Département de Mathématiques d'Orsay

Cours d'Ecole Doctorale



CIRM, Marseille, 11-15 avril 2011

Table des matières

[1]

1. L'auteur remercie D. Gaboriau, S. Popa et S. Vaes pour lui avoir demandé un important travail de préparation pour ces exposés (en plus donnés en langue anglo-saxonne, certes avec un accent du Sud). Ces cours aux doctorants ont eu lieu au Centre international de rencontres en mathématiques, du 11 au 22 avril 2011, à l'occasion du trimestre à l'Institut Henri Poincaré, intitulé « Une invitation aux algèbres de von Neumann et à la théorie ergodique des actions de groupes », organisé par D. Gaboriau, S. Popa et S. Vaes.

1 Propriétés géométriques et mesurables des groupes

1.1 Distances invariantes à gauche sur les groupes

Si G est un groupe, une distance $d : G \times G \to \mathbb{R}$ sur G est dite *invariante à gauche* si l'action de G sur lui-même par translations à gauche est isométrique, c'est-à-dire si, pour tous $g, x, y \in G$,

$$d(gx, gy) = d(x, y) \ .$$

De nombreux groupes sont munis, de manière naturelle, d'une distance invariante à gauche, ou d'une famille de telles distances. Ceci a permis à Gromov de les traiter comme des objets géométriques. Suite à son texte fondateur [Gro2], la théorie géométrique des groupes étudie en particulier les actions isométriques de (beaux) groupes sur de (beaux) espaces métriques.

Exemples. (1) Soient G un groupe (de type fini) et S une partie génératrice finie de G. La *distance des mots* d_S sur S définie par S est l'application $(x, y) \mapsto d_S(x, y)$ où $d_S(x, y)$ est la longueur minimale d'un mot en les éléments de S et leurs inverses représentant $x^{-1}y$. C'est une distance invariante à gauche sur G.

(2) Soient G un groupe de Lie réel connexe et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur T_eG. Alors la distance riemannienne définie par l'unique métrique riemannienne invariante à gauche sur G valant ce produit scalaire en e est une distance invariante à gauche sur G.

(3) Soient X un espace métrique muni d'une action à gauche isométrique d'un groupe G et $x_0 \in X$ un point de stabilisateur trivial (fini). Alors $(g, h) \mapsto d(g, h) = d(gx_0, hx_0)$ est une (pseudo-)distance invariante à gauche sur G. Lorsque G est muni d'une (belle) autre distance invariante à gauche (par exemple une distance des mots s'il est de type fini), et lorsque X est un bel espace métrique (par exemple un sur-groupe de type fini de G), la théorie de la distorsion compare ces deux distances.

Étudions la dépendance des choix de S et de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans les exemples (1) et (2), qui servira de prétexte pour définir à quelle équivalence près nous allons étudier les groupes munis de distances invariantes à gauches (mais il y a d'autres possibilités, voir par exemple [Why, Dym]).

1.2 Quasi-isométries

Soient X et Y deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est une *application quasi-isométrique* s'il existe $\lambda \geq 1$ et $c \geq 0$ tels que pour tous $x, y \in G$,

$$\frac{1}{\lambda}\, d(x, y) - c \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y) + c \ .$$

Une *quasi-isométrie* de X dans Y est application quasi-isométrique telle qu'il existe $c \geq 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $d(y, f(x)) \leq c$. Les espaces métriques X et Y sont *quasi-isométriques* s'il existe une quasi-isométrie de X dans Y.

Il est facile de vérifier que la relation « être quasi-isométrique » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces métriques.

Exemples. (1) Les distances des mots définies par deux parties génératrices finies S et S' d'un groupe (de type fini) G sont quasi-isométriques (l'identité de G étant une quasi-isométrie de d_S sur d'_S pour les constantes $c = 0$ et $\lambda = \max\{\max_{s \in S'} d_S(e, s), \max_{s \in S} d_{S'}(e, s)\}$). Bien sûr, deux groupes de type fini isomorphes sont quasi-isométriques, mais la réciproque est fausse. Nous étudierons dans ces notes de nombreuses propriétés de groupes de type fini invariantes par quasi-isométrie de n'importe laquelle de leur distance des mots.

(2) Les distances riemanniennes sur un groupe de Lie réel connexe G définies par deux produits scalaires $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ sur T_eG sont quasi-isométriques : l'identité de G est une quasi-isométrie pour les constantes $c = 0$ et

$$\lambda = \max\Big\{ \max_{v\in T_eG} \frac{\sqrt{\langle v,v\rangle}}{\sqrt{\langle v,v\rangle'}}\;,\; \max_{v\in T_eG} \frac{\sqrt{\langle v,v\rangle'}}{\sqrt{\langle v,v\rangle}} \Big\}\;.$$

(3) Si M est une variété lisse riemannienne compacte connexe, $\pi_1 M$ un groupe fondamental de M et $\widetilde{M} \to M$ un revêtement riemannien universel de M, alors, comme le montre le lemme ci-dessous, $\pi_1 M$ est de type fini et une distance des mots sur $\pi_1 M$ et la distance riemannienne sur $\widetilde{M}$ sont quasi-isométriques.

Soit X un espace métrique. Une *géodésique* de X est une application isométrique $c : I \to X$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous dirons *segment géodésique*, *rayon géodésique*, *droite géodésique* de X si I est respectivement un intervalle compact, une demi-droite fermée (en général $[0, +\infty[$) ou $\mathbb{R}$ tout entier. Les *extrémités* d'un segment géodésique $c : [a, b] \to X$ sont les points $c(a)$ (appelé *l'origine* de c) et $c(b)$. Nous noterons souvent $[x, y]$ un segment géodésique d'extrémités x et y, en prenant bien garde qu'il peut y en avoir plusieurs.

Nous dirons que X est *géodésique* si deux points de X sont extrémités d'au moins un segment géodésique, et que X est *propre* si ses boules fermées sont compactes. Par exemple, une variété riemannienne connexe complète est géodésique et propre, par le théorème d'Hopf-Rinov (voir par exemple [GHL]).

Lemme 1.1 *Soient X un espace métrique géodésique propre, $x \in X$ et G un groupe discret agissant sur X proprement par isométries, avec espace topologique quotient $G\backslash X$ compact. Alors G est de type fini et l'application $g \mapsto gx$ de G dans X, qui est équivariante pour les actions à gauche du groupe G sur G et sur X, est une quasi-isométrie de G muni d'une distance des mots dans X.*

Démonstration. Soient $R > 0$, B la boule fermée de rayon R et de centre x, et supposons R suffisamment grand pour que les images de B par les éléments de G recouvrent X. Soit S l'ensemble (stable par passage à l'inverse et contenant l'identité) des éléments s de G tels que $B \cap sB$ soit non vide. Puisque la distance de X est propre, B est compacte, et S est fini, car l'action de G est propre. Soit $\lambda = \max_{s\in S} d(x, sx)$ et $r = \inf_{g\in G-S} d(B, gB)$, qui est strictement positif par compacité de B et propreté de l'action.

Montrons que S est une partie génératrice de G. Pour tout $g \in G$, soit k le plus petit des entiers p tels que $d(x, gx) < pr$. Puisque X est géodésique, choisissons des points $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = gx$ sur un segment géodésique entre x et gx tels que $d(x_i, x_{i+1}) < r$ pour $0 \le i \le k-1$. Pour $0 \le i \le k$, soit $g_i \in G$ tel que $x_i \in g_i B$, avec $g_0 = \mathrm{id}$, $g_k = g$. Pour $0 \le i \le k-1$, posons $s_i = g_i^{-1} g_{i+1}$, de sorte que $g = s_0 s_2 \dots s_{k-1}$. Pour $0 \le i \le k-1$, nous avons $g_i^{-1} x_i \in B$, $g_i^{-1} x_{i+1} = s_i g_{i+1}^{-1} x_{i+1} \in s_i B$, et $d(g_i^{-1} x_i, g_i^{-1} x_{i+1}) = d(x_i, x_{i+1}) < r$. Donc par définition de r, nous avons $s_i \in S$. Ceci montre que S engendre G.

De plus, par minimalité de k, nous avons $d(x, gx) \ge (k-1)r \ge r\, d_S(g, e) - r$. Réciproquement, si $g \in G$ et $g = s_1 \dots s_k$ où $d_S(g, e) = k$, alors par l'inégalité triangulaire et l'invariance, $d(x, gx) \le \sum_{i=1}^{k-1} d(s_i x, s_{i+1} x) \le \lambda\, d_S(g, e)$. Donc $r\, d_S(g, h) - r \le d(gx, hx) \le \lambda\, d_S(g, h)$ pour tous $g, h \in G$.

Enfin, tout point de X est à distance au plus R d'un point de l'orbite $G\,x$. $\square$

La caractérisation suivante des groupes de type fini quasi-isométriques est due à Gromov.

Proposition 1.2 *Deux groupes de type fini* Γ *et* Λ *sont quasi-isométriques si et seulement s'ils admettent des actions propres commutantes par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact non vide* X *avec quotient compact.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que Γ et Λ admettent des actions commutantes par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact non vide X. Pour simplifier les notations, nous supposerons que Γ agit à gauche et Λ à droite sur X. Soit K un compact de X tel que les restrictions à K des projections canoniques $X \to \Gamma\backslash X$ et dans $X \to X/\Lambda$ soient surjectives. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, choissisons $\lambda_\gamma \in \Lambda$ tel que $\gamma K \cap K\lambda_\gamma$ soit non vide. Il est laissé en exercice de vérifier que $\gamma \mapsto \lambda_\gamma$ est une quasi-isométrie.

Réciproquement, supposons Γ et Λ quasi-isométriques. Pour N assez grand, notons X l'ensemble des applications $f : \Gamma \to \Lambda$ telles que pour tous $x, y \in \Gamma$,

$$\frac{1}{N}\, d(x,y) - N \leq d(f(x), f(y)) \leq N\, d(x,y)\ .$$

et pour tout $y \in \Lambda$, il existe $x \in \Gamma$ tel que $d(y, f(x)) \leq N$. Il est non vide, par discrétude de Γ. Le groupe Γ agit à gauche sur X par $(\gamma, f) \mapsto (x \mapsto f(\gamma^{-1}x))$, et le groupe Λ agit à droite sur X par $(f, \lambda) \mapsto (x \mapsto \lambda^{-1} f(x))$. Ces actions commutent. Munissons X de la topologie de la convergence simple, qui est localement compacte par le théorème d'Ascoli. Il est laissé en exercice de montrer que ces actions sont propres de quotients compacts. $\square$

Un groupe de type fini G muni d'une distance des mots n'est pas un espace géodésique, mais il se plonge de manière isométrique avec quotient compact dans un espace géodésique propre canonique (donc qui lui est quasi-isométrique par le lemme 1.1), de la manière suivante.

1.3 Graphes de Cayley et présentations de groupes

Soient G un groupe (de type fini) et S une partie génératrice finie de G. Le *graphe de Cayley* (à droite) de (G, S) est le graphe (au sens de [Ser]) d'ensemble des sommets G, d'ensemble des arêtes E l'ensemble des triplets $e = (g, g', s) \in G \times G \times (S \cup S^{-1})$ tels que $g' = gs$, l'origine de l'arête (g, g', s) étant g, son extrémité g', et son arête inverse $\overline{e} = (g', g, s^{-1})$. Il est connexe car S engendre G.

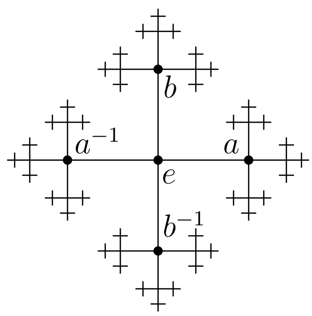
Rappelons que la *réalisation topologique* d'un graphe connexe d'ensemble des sommets E est l'espace topologique quotient de l'espace topologique produit $E\times[0,1]$ (où E est muni de la topologie discrète) par la plus petite relation d'équivalence $\sim$ telle que $(e,t) \sim (\overline{e}, 1-t)$ et $(e, 0) \sim (e', 0)$ si e et e' ont même origine, pour tous $e, e' \in E$ et $t \in [0,1]$. Nous la munirons de l'unique distance géodésique rendant chaque arête de longueur 1.

Notons $\mathrm{Cay}(G, S)$ la réalisation topologique du graphe de Cayley de (G, S), que nous appellerons encore par abus *graphe de Cayley* de (G, S). L'action par translations à gauche de G sur lui-même s'étend en une action isométrique de G sur $\mathrm{Cay}(G, S)$, et l'application identité de G dans l'ensemble des sommets G induit une application isométrique de G dans $\mathrm{Cay}(G, S)$ telle que tout point de $\mathrm{Cay}(G, S)$ soit à distance au plus $\frac{1}{2}$ de son image. en particulier, par le lemme 1.1, G et $\mathrm{Cay}(G, S)$ sont quasi-isométriques.

Rappelons que si S est un ensemble, le *groupe libre sur* S est l'ensemble $\mathbb{L}(S)$ des mots ès[2] éléments de S et leurs inverses formels qui sont réduits (c'est-à-dire sans sous-mot ss^{-1} ni $s^{-1}s$ où $s \in S$), muni de la loi de concaténation-réduction (mettre les mots réduits bout à bout et simplifier autant que possible les tels sous-mots qui apparaissent). C'est un groupe, qui vérifie la propriété universelle suivante : en notant $i : S \to \mathbb{L}(S)$ l'inclusion évidente, pour toute application $j : S \to H$ où H est un groupe, il existe un et un seul morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{L}(S) \to H$ (dit *canonique*) tel que $\varphi \circ i = j$.

Une *présentation* d'un groupe G est un couple (S, R) tel que S soit une partie (voire une famille) génératrice de G, et R une partie de $\mathbb{L}(S)$ telle que le noyau du morphisme canonique de $\mathbb{L}(S)$ dans G soit le plus petit sous-groupe distingué $N(R)$ contenant R. Le morphisme canonique induit alors un isomorphisme de groupes de $\mathbb{L}(S)/N(R)$ dans G. Un groupe est *de présentation finie* s'il admet une présentation (S, R) où S et R sont finies.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $\mathbb{F}_n$ un groupe libre sur un ensemble de cardinal n. Une *partie génératrice libre* de $\mathbb{F}_n$ est une partie S de $\mathbb{F}_n$ telle que le morphisme canonique de $\mathbb{L}(S)$ dans $\mathbb{F}_n$ soit un isomorphisme. Son cardinal est forcément n, car les groupes $\mathbb{F}_n$ et $\mathbb{F}_m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$ (en abélianisant pour s'en convaincre). Si S est un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$, alors le graphe de Cayley de $\mathbb{L}(S)$ pour la partie génératrice S est un graphe régulier de valence $2n$.



Graphe de Cayley du groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur $S = \{a, b\}$.

Si H est un sous-groupe (pas forcément de type fini) d'un groupe G muni d'une partie génératrice finie S, le *graphe de Schreier* de (G, S, H) est le graphe quotient par H du graphe de Cayley de (G, S). Par exemple, si H est distingué, alors en notant $\pi : G \to H\backslash G$ la projection canonique, le graphe de Schreier de (G, S, H) est le graphe de Cayley de $(H\backslash G, \pi(S))$, si π est injective sur S. Par exemple, les graphes de Schreier des sous-groupes du groupe $\mathbb{F}_n$ muni d'une partie génératrice libre sont des graphes connexes réguliers (de valence constante $2n$), qui ne sont pas nécessairement homogènes : le groupe de leurs automorphismes de graphe n'agit pas toujours transitivement sur les sommets. Une classification à quasi-isométrie près des graphes de Schreier d'un (beau) groupe de type fini donné est un problème largement ouvert (et inabordable dans le cas d'un groupe libre $\mathbb{F}_n$, puisqu'elle entraînerait une classification à quasi-isométries près de tous les groupes admettant une partie génératrice de cardinal n, voir la partie 5).

Exercice E.1 *(1) Montrer, en utilisant le lemme 1.1, que tout sous-groupe d'indice fini d'un groupe de type fini G, et que tout quotient de G par un sous-groupe distingué fini, sont de type fini et quasi-isométriques à G.*

2. © D. Gaboriau

(2) Pour tout $N \geq 3$, montrer que deux arbres tels que, pour tout sommet v, le nombre d'arêtes d'origine v soit compris entre 3 et N, sont quasi-isométriques. En déduire que $\mathbb{F}_n$ et $\mathbb{F}_m$ sont quasi-isométriques, pour tous $n, m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Deux groupes G et G' sont *commensurables* s'ils admettent des sous-groupes d'indice fini isomorphes. Deux groupes de type fini commensurables sont quasi-isométriques par l'exercice (1) précédent, mais la réciproque est fausse.

C'est à cause de la première partie de cet exercice que dans de nombreux problèmes de classification de groupes à quasi-isométrie près, sur lesquels nous reviendrons en partie 5, les énoncés obtenus sont invariants par passage à un sous-groupe de type fini et à un quotient par un sous-groupe distingué fini.

Si A et B sont deux sous-groupes d'un groupe G, nous noterons $[A, B]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ où $a \in A$ et $b \in B$ (qui en général n'est pas réduit à l'ensemble de ces commutateurs). Pour tout groupe G, notons $C_0(G) = G$ et par récurrence $C_{n+1}(G) = [G, C_n(G)]$. Le groupe G est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C_{n+1}(G) = \{e\}$, et la borne inférieure des tels n est appelé *l'ordre de nilpotence* de G. Le groupe G est dit *résiduellement nilpotent* si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{n+1}(G) = \{e\}$ (ou, de manière équivalente, si pour tout $g \in G - \{e\}$, il existe un sous-groupe distingué N de G ne contenant pas g tel que G/N soit nilpotent). De même, pour tout groupe G, notons $D_0(G) = G$ et par récurrence $D_{n+1}(G) = [D_n(G), D_n(G)]$. Le groupe G est dit *résoluble* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_{n+1}(G) = \{e\}$, et la borne inférieure des tels n est appelé l'ordre de résolubilité de G. Le groupe G est dit *résiduellement résoluble* si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{n+1}(G) = \{e\}$ (ou, de manière équivalente, si pour tout $g \in G - \{e\}$, il existe un sous-groupe distingué N de G ne contenant pas g tel que G/N soit résoluble). Puisque $D_n(G) \subset C_n(G)$, un groupe nilpotent est résoluble, donc un groupe résiduellement nilpotent est résiduellement résoluble.

Exercice E.2 *Montrer que le groupe libre est résiduellement nilpotent. Si G est un groupe résiduellement nilpotent muni d'une partie génératrice finie, montrer que le graphe de Schreier du sous-groupe $C_{n+1}(G)$ (ou le graphe de Cayley du groupe quotient $G/C_{n+1}(G)$ pour la partie génératrice quotient), pointé en l'image de l'élément neutre, converge pour la distance de Hausdorff-Gromov pointée (voir la partie 6, vers le graphe de Cayley de G.*

1.4 Espaces des bouts d'un groupe de type fini

Si X est un espace métrique géodésique propre et $x \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons E_n l'ensemble (fini et muni de la topologie discrète) des composantes connexes non bornées du complémentaire de la boule de centre x et de rayon n. Notons que l'inclusion induit une application $f_n : E_{n+1} \to E_n$. L'*espace des bouts* (de Freudenthal, voir par exemple [Sta, SW]) $\mathscr{B}(X)$ de X est l'espace topologique limite projective $\underleftarrow{\lim}\ E_n$, c'est-à-dire le sous-espace topologique de l'espace topologique produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \in E_n$ et $f_n(x_{n+1}) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le *nombre de bouts* de X est le cardinal de $\mathscr{B}(X)$. Notons que $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est compact, métrisable, totalement discontinu, donc son sous-espace fermé $\mathscr{B}(X)$ l'est aussi.

Il est facile de montrer que si deux tels espaces X et X' sont quasi-isométriques, alors pour n'importe quel choix de points bases x de X et x' de X', leurs espaces de bouts sont homéomorphes, et donc ils ont même nombre de bouts. Ceci permet de définir le nombre de bouts d'un groupe de type fini comme le nombre de bouts de n'importe lequel de ses graphes de Cayley. Par exemple, un groupe de type fini sans bout est un groupe fini. Un théorème célèbre de Hopf dit que l'espace des bouts d'un groupe de type fini est ou bien un ensemble discret à $0, 1$ ou 2 éléments, ou bien un espace de Cantor (c'est-à-dire un espace topologique métrisable compact totalement discontinu sans point isolé, deux tels espaces étant homéomorphes et de cardinal celui de $\mathbb{R}$). Un groupe à deux bouts est virtuellement monogène infini. Nous reviendrons dans la partie 3.2 sur la structure des groupes à une infinité de bouts (voir par exemple [Sta, SW] pour des compléments sur cette partie 1.4).

Considérons la topologie sur la réunion disjointe $\overline{X}^{bouts}$ de X et de $\mathscr{B}(X)$ dont les ouverts sont d'une part les ouverts de X et d'autre part les réunions $U \cup V$ où $U \subset X$ est une composante connexe non bornée du complémentaire d'une boule et $V \subset \mathscr{B}(X)$ est l'ensemble des bouts $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tels que $x_n \subset U$ pour tout n assez grand. Alors cette topologie est compacte, X est ouvert et dense dans $\overline{X}^{bouts}$, et l'action du groupe des isométries de X s'étend continuement à $\overline{X}^{bouts}$, qui est donc une compactification naturelle de X, appelée la *compactification des bouts* de X.

Exercice E.3 *Si G et G' sont deux groupes de type fini, décrire la compactification des bouts du produit direct $G \times G$ et du produit libre $G * G'$ en fonction des compactifications des bouts de G et de G'.*

Lorsque X est un graphe de Cayley d'un groupe de type fini G, l'espace topologique $\mathscr{B}(X)$, qui à homéomorphisme G-équivariant près ne dépend pas du choix d'une partie génératrice, est un exemple de « bord topologique » de G. Nous reviendrons sur cette notion dans la suite de ces notes, en construisant de nombreux « bords topologiques » de groupes, la topologie asymptotique des groupes ayant leur étude pour but. Muni de l'action continue de G (à orbites denses si G n'a pas deux bouts), ce bord topologique B permet donc de construire une algèbre stellaire (dite produit croisé) $C(B)\rtimes G$, voir les exposés de Georges Skandalis.

1.5 Groupes et mesures

En revenant à l'étymologie du mot géométrie, il y a plusieurs manières de « mesurer »la terre : comme le montre le problème de Didon, l'aire est aussi importante que la longueur. Nous renvoyons à [Hop] pour une jolie introduction aux inégalités isopérimétriques (et [VSCC, Cha1, Cha2] pour des compléments), mais ne traiterons pas de son pendant dans les groupes de type fini, pour lequel nous renvoyons par exemple à [BRS].

La théorie mesurable des groupes (qui fait donc partie de la théorie géométrique des groupes !) étudie les (belles) actions mesurables de (beaux) groupes sur des espaces mesurés. Le pendant mesurable du critère de quasi-isométrie de Gromov 1.2 nous permettra de définir à quelle équivalence près nous allons regarder ces actions, voir ci-dessous.

Dans ces notes, par *groupe topologique*, nous entendrons un groupe G muni d'une topologie métrisable séparable telle que l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ de $G\times G$ dans G soit continue. Mais n'allons pas chercher midi à quatorze heures, nos groupes topologiques seront sauf mention contraire dénombrables *discrets* (c'est-à-dire munis de la topologie discrète) ou des sous-groupes topologiques de groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(K)$ où K est un corps topologique métrisable séparable. Nous appelerons *groupe localement compact* tout groupe topologique localement compact (donc σ-compact car séparable).

Soit G un groupe localement compact. Il existe sur G une mesure (borélienne, positive, régulière donc σ-finie) non nulle invariante par translations à gauche, unique modulo multiplication par un réel strictement positif, que nous appelerons une *mesure de Haar* (à gauche) de G et noterons μ_G. Par invariance, si μ_G est finie, alors G est compact.

Exemples. (1) Si G est dénombrable discret, alors la mesure de comptage sur G est une mesure de Haar.

(2) Si $G = \mathbb{R}^n$, alors la mesure de Lebesgue est une mesure de Haar.

(3) Si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors une mesure de Haar sur G est définie par

$$d\mu_G(g) = \frac{1}{|\det g|^n} d\mu_{\mathbb{R}^{n^2}}(g) \ .$$

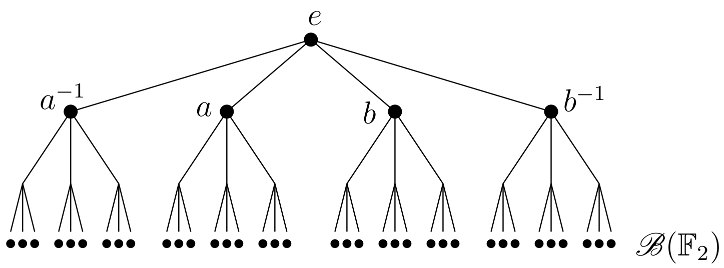
Pour $p \in [1 + \infty[$, notons $\mathbb{L}^p(G)$ (et $\ell^p(G)$ si G est discret) l'espace de Banach des applications μ_G-mesurables de G dans $\mathbb{C}$ de puissance p-ème μ_G-intégrable, modulo applications essentiellement nulles, muni de la norme $\|f\|_\infty = \big(\int_G |f|^p \, d\mu_G\big)^{\frac{1}{p}}$. Notons $\mathbb{L}^\infty(G)$ (et $\ell^\infty(G)$ si G est discret) l'espace de Banach des applications μ_G-mesurables essentiellement bornées de G dans $\mathbb{C}$, modulo applications essentiellement nulles, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la borne supérieure essentielle.

Pour $p \in [1, +\infty[$ et $q \in \,]1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le dual topologique $\mathbb{L}^p(G)^*$ (muni de la norme duale) de $\mathbb{L}^p(G)$ est comme d'habitude identifié à $\mathbb{L}^q(G)$ à l'aide l'accouplement de dualité $\mathbb{L}^p(G) \times \mathbb{L}^q(G) \to \mathbb{C}$ défini par $(f, g) \mapsto \int_G \overline{f} g \, d\mu_G$.

Pour $p \in [1, +\infty]$, le groupe G agit à gauche par isométries sur $\mathbb{L}^p(G)$ par $(g, \varphi) \mapsto \{g \cdot \varphi : x \mapsto \varphi(g^{-1}x)\}$, où $g \in G$ et $\varphi \in \mathbb{L}^p(G)$, par invariance de μ_G. Il agit donc à gauche sur l'espace vectoriel dual de $\mathbb{L}^p(G)$ par $(g, m) \mapsto \{g \cdot m : \varphi \mapsto m(g^{-1} \cdot \varphi)\}$, où $g \in G$ et $m : \mathbb{L}^p(G) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire. Cette action préserve le dual topologique $\mathbb{L}^p(G)^*$ (qui est un espace de Banach pour la norme duale), et G agit par isométries sur $\mathbb{L}^p(G)^*$.

L'étude de ces représentations (et d'autres représentations de G dans d'autres espaces de Banach) peut apporter des informations importantes sur le groupe G (y compris sur sa « géométrie »), comme nous en verrons des exemples ci-dessous.

Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, nous dirons qu'une action $G \times X \to X$ d'un groupe G dénombrable discret sur X est *quasi-invariante* (respectivement *préserve la mesure*) si elle est mesurable et si tout élément de g préserve l'ensemble des parties de X de mesure nulle pour μ (respectivement si $g_*\mu = \mu$ pour tout $g \in G$, ou, de manière équivalente si $\mu(g\,A) = \mu(A)$ pour tous $g \in G$ et $A \in \mathscr{A}$). Une action quasi-invariante est *ergodique* si pour toute partie mesurable $\mathscr{A}$ invariante par Γ, ou bien A est de mesure nulle ou bien le complémentaire de A est de mesure nulle. Elle est dite *proprement ergodique* s'il n'existe pas d'orbite de mesure totale.



Espace des bouts du groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur $\{a, b\}$.

Par exemple, si $n \geq 2$ et $G = \mathbb{F}_n$, pour tout $u \in \mathbb{F}_n$, pour tout bout $\xi \in \mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ de $\mathbb{F}_n$, il existe, dans le graphe de Cayley d'une partie génératrice libre fixée S de $\mathbb{F}_n$, un unique rayon géodésique d'origine u convergeant vers ξ, que nous noterons $[u, \xi[$. Pour tout mot réduit x dans $\mathbb{F}_n$, notons U_x l'ensemble (ouvert et fermé) des bouts ξ de $\mathbb{F}_n$ tels que $[u, \xi[$ passe par x. Remarquons que $\{U_x \ : \ x \in \mathbb{F}_n\}$ est une base d'ouverts de $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$. De plus $U_x \cap U_y$ est égal à U_x ou égal à U_y ou vide, suivant que $y \in [u, x]$ ou que $x \in [u, y]$ ou qu'aucune de ces deux conditions ne soit satisfaite. Donc tout ouvert de l'espace topologique séparable $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ est union dénombrable disjointe d'éléments de cette base d'ouverts. Par le critère de Kolmogorov, il est facile de vérifier qu'il existe alors une unique mesure (borélienne) de probabilité μ_u sur $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ telle que $\mu_u(U_x) = \frac{1}{2n}\frac{1}{(2n-1)^{k-1}}$ si $d(u, x) = k \neq 0$.

Cette mesure n'est pas invariante par le groupe $\mathbb{F}_n$. En effet, tout élément $a \in S$ admet une *dynamique Nord-Sud* sur $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ (les extrémités a_- et a_+ de la droite géodésique de sommets $\{a^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ sont les deux seuls points fixes de a sur $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$, et pour tous voisinages U et V de a_- et a_+ respectivement, pour tout n assez grand, nous avons $a^n(\mathscr{B}(\mathbb{F}_n) - U) \subset V$ et $a^{-n}(\mathscr{B}(\mathbb{F}_n) - V) \subset U$). Donc le support de toute mesure (borélienne positive) finie invariante par $\mathbb{F}_n$ est contenu dans l'ensemble des points fixes de a. Il en est de même pour $b \in S - \{a\}$, or les ensembles de points fixes de a et de b sont disjoints.

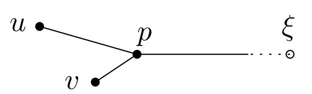
Par contre, la mesure μ_u est quasi-invariante par $\mathbb{F}_n$. En effet, pour tous u et v dans $\mathbb{F}_n$, il est facile par construction de vérifier que, pour tout $g \in \mathbb{F}_n$,

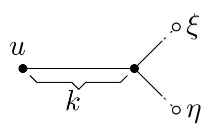
$$g_* \mu_u = \mu_{gu} \ ,$$

et que, pour tout $\xi \in \mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$,

$$\frac{d\mu_u}{d\mu_v}(\xi) = e^{\ln(2n-1)\beta_\xi(u,v)} \ ,$$

où $\beta_\xi(u, v) = d(u, p) - d(v, p)$ où $[u, \xi[\, \cap [v, \xi[\, = [p, \xi[$ (voir le dessin de gauche ci-dessous).





L'espace des bouts $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$, muni de sa tribu borélienne, de la mesure μ_e et de l'action quasi-invariante de $\mathbb{F}_n$, est un exemple de « bord mesurable » de groupe, une notion sur laquelle nous reviendrons plus tard (voir par exemple [BM, Rob, BFS]. Un chapitre important de la théorie mesurable des groupes est l'étude des bords mesurables de groupes. La propriété (du dessin de gauche ci-dessus) des paires de rayons géodésiques qui convergent vers un même point à l'infini dans un arbre, de coïncider à partir d'un certain rang, et ses quasi-versions pour les quasi-versions de groupes libres que sont les groupes hyperboliques, sera cruciale pour étudier la « moyennabilité » de l'action d'un groupe hyperbolique sur son bord à l'infini (voir la partie 3.3). De plus, une action quasi-invariante d'un groupe dénombrable discret G sur un espace mesuré X permet de construire une algèbre de von Neumann $\mathbb{L}^\infty(X) \rtimes G$ (dite produit croisé), voir les exposés de Cyril Houdayer.

Exercice E.4 *Montrer que l'action (diagonale) de $\mathbb{F}_n$ sur $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n) \times \mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ est ergodique pour les mesures $\mu_u \otimes \mu_u$. Montrer qu'il existe un ensemble non dénombrable de mesures quasi-invariantes deux à deux étrangères sur $\mathscr{B}(\mathbb{F})$.*

Remarque. Tant que nous y sommes à construire des structures sur le bord $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ de $\mathbb{F}_n$, construisons aussi une « structure conforme ».

Pour tout $u \in \mathbb{F}_n$, notons d_u la distance sur $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ telle que $d_u(\xi,\eta) = (2n-1)^{-k}$ où k est la longueur du segment géodésique commun $[u,\xi[\,\cap\,[u,\eta[$ (avec la convention usuelle $(2n-1)^{-\infty} = 0$, voir le dessin de droite ci-dessus). Remarquons par ailleurs que μ_u est la mesure de Hausdorff de d_u, normalisée pour être de probabilité. Rappelons que le groupe des bijections g d'un ensemble E agit sur l'ensemble des distances d sur E par

$$(g,d) \mapsto \{(\alpha,\beta) \mapsto g_* d(\alpha,\beta) = d(g^{-1}\alpha, g^{-1}\beta)\}\ .$$

Il est immédiat qu'un élément $g \in \mathbb{F}_n$ envoie d_u sur d_{gu} :

$$\forall\, \xi,\eta \in \mathscr{B}(\mathbb{F}_n), \quad d_{gu}(g\xi, g\eta) = d_u(\xi,\eta)\ .$$

Deux telles distances sont *conformément équivalentes*, au sens que pour tous u et v dans $\mathbb{F}_n$, pour tout $\xi_0 \in \mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$, la suire

$$\lim_{\xi\to\xi_0,\ \xi\neq\xi_0} \frac{d_u(\xi,\xi_0)}{d_v(\xi,\xi_0)} = (2n-1)^{\beta_{\xi_0}(u,v)}\ .$$

En fait, l'application $\xi \mapsto \frac{d_u(\xi,\xi_0)}{d_v(\xi,\xi_0)}$ est constante sur un voisinage épointé de ξ_0. Il n'est pas difficile de montrer que l'application identité de $\mathbb{F}_n$ dans $\mathbb{F}_n$ est une application bilipschitzienne de d_u sur d_v de rapport $(2n-1)^{d(u,v)}$:

$$\forall\, \xi,\eta \in \mathscr{B}(\mathbb{F}_n), \quad (2n-1)^{-d(u,v)}\ d_v(\xi,\eta) \leq d_u(\xi,\eta) \leq (2n-1)^{d(u,v)}\ d_v(\xi,\eta)\ .$$

Les applications bilipschiziennes sont absolument continues par rapport aux mesures de Hausdorff, donc ceci remontre la quasi-invariance par $\mathbb{F}_n$ des mesures μ_u. Nous avons ainsi muni le bord $\mathscr{B}(\mathbb{F}_n)$ de $\mathbb{F}_n$ non seulement d'une structure topologique invariante par $\mathbb{F}_n$ et d'une mesure quasi-invariante (en fait une famille $(\mu_u)_{u\in\mathbb{F}_n}$ de mesures absolument continues les unes par rapport aux autres et permutées par le groupe) mais d'une *structure conforme* (une famille de distances $(d_u)_{u\in\mathbb{F}_n}$ permutées par le groupe qui sont deux à deux conformément équivalentes).

Nous allons maintenant étudier quelques grandes collections de groupes du point de vue des problématiques suscitées.

Index

Références

[Ada] S. Adams. *Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups.* Topology **33** (1994) 765–783.

[ADR] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids.* Mono. L'Ens. Math. **36**, L'Ens. Math. 2000.

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette. *Kazhdan's property T.* New Math. Mono. **11**, Cambridge Univ. Press, 2008.

[BFS] U. Bader, A. Furman, and A. Shaker. *Superrigidity via Weyl groups : actions on the circle.* Prépublication ArXiv `math.DS/0605276`.

[BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature.* Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.

[BM] M. Burger and S. Mozes. *CAT*(-1) *spaces, divergence groups and their commensurators.* J. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57–94.

[BRS] N. Brady, T. Riley, and H. Short. *The geometry of the word problem for finitely generated groups.* Advanced Courses in Mathematics (CRM Barcelona, 2005), Birkhäuser, 2007.

[CCJ$^+$] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jollssaint, P. Julg, and A. Valette. *Groups with the Haagerup property. Gromov's a-T-menability.* Prog. Math. **197**, Birkhäuser 2001.

[Cha1] I. Chavel. *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives.* Camb. Tracts Math **145**, Cambridge Univ. Press, 2001.

[Cha2] I. Chavel. *Topics in isoperimetric inequalities.* dans "Geometry, spectral theory, groups and dynamics", 89–110, Contemp. Math. **387**, Amer. Math. Soc. 2005.

[Dix] J. Dixmier. *Les* C^**-algèbres et leurs représentations.* 2nde éd. Gauthier-Villars, 1969.

[Dym] T. Dymarz. *Bilipschitz equivalence is not equivalent to quasi-isometric equivalence for finitely generated groups.* Duke Math. J. **154** (2010) 509–526.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Springer Verlag, 1990.

[GL] D. Gaboriau and R. Lyons. *A measurable-group-theoretic solution to von Neumann's problem.* Invent. Math. **177** (2009) 533–540.

[GH] E. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* Prog. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.

[Ger] E. Germain. *Approximate invariant means for boundary actions of hyperbolic groups.* Appendix B in [ADR], 2000.

[GD] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed point theory.* Springer, 2003.

[Gre] F. P. Greanleaf. *Invariant means on topological groups and their representations.* Van Nostrand Math. Stud. **16**, Van Nostrand, 1969.

[Gri1] R. Grigorchuk. *An example of a finitely presented amenable group not belonging to the class EG.* Mat. Sbornik **189** (1998) 79–100 ; Sbornik Math. **189** (1998) 75–95.

[Gri2] R. Grigorchuk. *On Milnor's problem of group growth.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **271** (1983) 31–33 ; Soviet Math. Dokl. **271** (1983).

[Gro1] M. Gromov. *Groups of polynomial growth and expanding maps.* Pub. Math. I.H.É.S. **53** (1981) 53–78.

[Gro2] M. Gromov. *Infinite groups as geometric objects.* Dans "Proc. Inter. Cong. Math. Varszawa" **1** (1984) 385–392.

[Har1] P. de la Harpe. *Spaces of closed subgroups of locally compact groups.* Notes d'exposés, `ArXiv:0807.2030`.

[Har2] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory.* Chicago Univ. Press, 2000.

[Hop] H. Hopf. *Differential geometry in the large.* Notes by P. Lax and J. Gray, 2nd ed., Lecture Notes Math.**1000**, Springer-Verlag, 1989.

[Kai1] V. Kaimanovich. *Amenability, hyperfiniteness and isoperimetric inequalities.* C.R.A.S. **325** (1997) 999-1004.

[Kai2] V. Kaimanovich. *Boundary amenability of hyperbolic spaces.* dans "Discrete Geometric Analysis" (Sendai 2002), Contemp. Math **347**, Amer. Math. Soc 2004.

[Kai3] V. Kaimanovich. *Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable.* Amer. Math. Soc. Transl. **202** (2001) 151–166.

[Ol'] A. Ol'shanskii. *On the problem of the existence of an invariant mean on a group.* Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980) 199–200 ; Russian Math. Surv. **35** (1980) 180–181.

[Pat] A. L. T. Paterson. *Amenability.* Math. Surv. Mono. **29**, Amer. Math. Soc., 1976.

[Rob] G. Robertson. *Boundary operator algebras for free uniform tree lattices.* Houston J. Math. **31** (2005) 913–914.

[Ser] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2.* 3ème éd. corr., Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1983.

[Sha] Y. Shalom. *Measurable group theory.* Europ. Cong. Math. pp. 391–423, Eur. Math. Soc, 2005.

[Sta] J. R. Stallings. *Group theory and 3-dimensional manifolds.* Yale Monographs **4**, Yale Univ. Press, 1971.

[SW] G. P. Scott and C. T. C. Wall. *Topological methods in group theory.* dans "Homological group theory", C. T. C. Wall ed., Lond. Math. Soc. Lect. Notes **36**, Cambridge Univ. Press (1979) 137–203.

[VSCC] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups.* Camb. Tracts Math. **100**, Cambridge Univ. Press, 1992.

[Why] K. Whyte. *Amenability, bi-Lipschitz equivalence, and the von Neumann conjecture.* Duke Math. J. **99** (1999) 93–112.

[Wil] R. Willet. *Some notes on property A.* Dans "Limits of graphs in group theory and computer science", pp. 191-281, EPFL Press, 2009.

Département de mathématique, UMR 8628 CNRS, Bât. 425
Université Paris-Sud 11, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE
e-mail : frederic.paulin@math.u-psud.fr