LA CONJECTURE DE BREUIL-MÉZARD, D'APRÈS PASKUNAS

par

Gabriel Dospinescu

Table des matières

0.1. Rappels et notations. — On fixe un nombre premier $p \geq 5$ et une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, dont on note O l'anneau des entiers et $k = O/\pi_L$ son corps résiduel. On se donne une représentation $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(k)$ telle que $\mathrm{End}(\rho) = k$ et un caractère $\psi : \mathbf{Q}_p^* \to O^*$ qui relève $\det \rho : \mathbf{Q}_p^* \simeq W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \to k^*$.

Hypothèse simplificatrice pour cet exposé : on exclut [1] le cas où ρ est un twist de la représentation $\left(\begin{smallmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Donc ρ est soit absolument irréductible, soit une extension non scindée de deux caractères distincts δ_1, δ_2 tels que $\delta_1 \cdot \delta_2^{-1} \neq \omega$.

On note $\zeta = \chi^{-1}\psi$ et $\rho^{\mathrm{un}} : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(R^\psi)$ la déformation universelle de ρ avec déterminant ψ. Avec les hypothèses faites l'anneau R^ψ est isomorphe à $O[[X, Y, Z]]$.

Définition 0.1. — On note $\mathscr{C}(O)$ la catégorie dont les objets sont les $\pi^\vee = \mathrm{Hom}_O(\pi, L/O)$, où π est une représentation lisse de $G := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur O, de O-torsion, à caractère central ζ et telle que $O[G]v$ soit de longueur finie pour tout $v \in \pi$.

1. La preuve dans ce cas suit les mêmes grandes lignes, mais est nettement plus délicate du point de vue de l'algèbre homologique.

Remarque 0.2. — Par dualité de Pontryagine, tout objet de $\mathscr{C}(O)$ est un $\Lambda_K := O[[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]]$-module compact sur lesquel le centre de K agit par ζ^{-1}. Tout objet de $\mathscr{C}(O)$ est la limite projective de ses quotients de longueur finie.

Définition 0.3. — a) On note $\mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\zeta)$ la catégorie des L-représentations de Banach unitaires, admissibles de G, à caractère central ζ.

b) Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\zeta)$, un **réseau** de Π est par définition la boule unité pour une norme G-invariante sur Π et qui définit la topologie de Π. Autrement dit, il s'agit d'un réseau ouvert, borné et stable par G dans Π.

c) On dit que $\Pi \in \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\zeta)$ est **supersingulière** si elle est absolument irréductible et n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une induite parabolique unitaire.

Remarque 0.4. — Soit Θ un réseau de $\Pi \in \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\zeta)$ et soit $\Theta^d = \mathrm{Hom}_O(\Theta, O)$ le dual de Schikhof de Θ, avec la topologie de la convergence simple. Alors on a un isomorphisme

$$\Theta^d \simeq \varprojlim_n (\Theta/\pi_L^n\Theta)^\vee,$$

et chaque $(\Theta/\pi_L^n)^\vee$ est un objet de $\mathscr{C}(O)$ (c'est un résultat d'Emerton, qui découle de la classification des représentations irréductibles pour G mod p, due à Barthel-Livné et Breuil). Donc $\Theta^d \in \mathscr{C}(O)$.

Paskunas étend et modifie un peu le foncteur de Colmez pour obtenir un foncteur **covariant** exact

$$\check{V} : \mathscr{C}(O) \to O[G_{\mathbf{Q}_p}] - \mathrm{Mod}.$$

En fait, si π est de longueur finie, alors $\check{V}(\pi^\vee) = V(\pi)^\vee \otimes \psi$, où $V(\pi)$ est l'image de π par le foncteur de Colmez. Le cas général s'obtient par limite projective à partir du cas de longueur finie. La remarque 0.4 combinée avec la dualité de Schikhof fournissent un foncteur **contravariant** exact

$$\check{V} : \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\zeta) \to L[G_{\mathbf{Q}_p}] - \mathrm{Mod}, \quad \check{V}(\Pi) = V(\Theta^d) \otimes_O L,$$

pour n'importe quel réseau Θ de Π (cela a un sens, car ils sont tous commensurables).

Définition 0.5. — Si ρ est absolument irréductible on note π la supersingulière mod π_L de G telle que $\check{V}(\pi^\vee) = \rho$. Sinon, $\rho \simeq \left(\begin{smallmatrix} \delta_1 & * \\ 0 & \delta_2 \end{smallmatrix}\right)$ et on pose $\pi := \mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \omega^{-1}\delta_2)$. Le choix de la normalisation du foncteur de Colmez est fait pour que $\check{V}(\pi^\vee) = \delta_1$ dans ce cas.

Définition 0.6. — N est une enveloppe projective de $\pi^\vee$ dans $\mathscr{C}(O)$.

Remarque 0.7. — On montre (Paskunas, papier IHES) que N est plat sur O et que $N/\pi_L N$ est une enveloppe projective de $\pi^\vee$ dans $\mathscr{C}(k)$ (qui est par définition la sous-catégorie de $\mathscr{C}(O)$ formée d'objets tués par π_L).

Théorème 0.8. — *(Paskunas) a) On a des isomorphismes* $\mathrm{End}_{\mathscr{C}(O)}(N) \simeq R^{\psi}$ *et* $\check{V}(N) \simeq \rho^{\mathrm{un}}$.

b) $k \otimes_{R^{\psi}} N$ *est isomorphe à* $\pi^{\vee}$ *si* ρ *est irréductible, et on a une suite exacte*

$$0 \to (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1))^{\vee} \to k \otimes_{R^{\psi}} N \to (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \chi^{-1}\delta_2))^{\vee} \to 0$$

si $\rho \simeq \begin{pmatrix} \delta_1 & * \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$.

Démonstration. — Autour de 60 pages de son papier à IHES... □

Remarque 0.9. — a) Il découle du théorème précédent que $k \otimes_{R^{\psi}} N$ est de longueur finie dans $\mathscr{C}(O)$ et de type fini sur $\Lambda_K := O[[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]]$.

b) Puisque l'inclusion $\pi \to N^{\vee}$ est essentielle et puisque $\pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$, on obtient $(N^{\vee})^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$, ce qui sera très utile plus tard.

0.2. Projectivité de N**.** — La preuve du théorème suivant (qui est crucial pour l'approche de Paskunas) est très astucieuse. Avant d'énoncer le théorème, notons $\mathrm{Mod}_{K,\zeta}^{\mathrm{pro}}$ la catégorie des Λ_K-modules compacts sur lesquels le centre de K agit par ζ^{-1}. Ses objets sont donc les duaux de Pontryagine des représentations lisses π de K sur des O-modules de torsion, avec caractère central ζ.

Théorème 0.10. — *Il existe* $x \in R^{\psi} = \mathrm{End}(N)$ *qui est régulier sur* N *(i.e.* $x : N \to N$ *est injectif) et tel que* N/xN *soit une enveloppe projective de* $(\mathrm{soc}_K \pi)^{\vee}$ *dans* $\mathrm{Mod}_{K,\zeta}^{\mathrm{pro}}$.

Démonstration. — La preuve est assez longue et je vais passer certains détails. On commence par utiliser un théorème de Breuil-Paskunas pour plonger π dans une représentation lisse Ω de G sur k, à caractère central ζ et telle que $\Omega|K$ soit une enveloppe injective de $\mathrm{soc}_K\pi$ dans la catégorie des représentations lisses de K sur k, à caractère central ζ. On vérifie sans trop de mal que $\mathrm{soc}_G(\Omega) = \pi$ et que Ω est en fait admissible. Soit $J = (N/\pi_L N)^{\vee}$, une enveloppe injective de π dans $\mathscr{C}(k)^{\vee}$ d'après la remarque 0.7. Les surjections $N/\pi_L N \to \pi^{\vee}$ (celle-ci étant essentielle) et $Q^{\vee} \to \pi^{\vee}$ induisent une surjection $N/\pi_L N \to Q^{\vee}$, qui se dualise en une injection $Q \to J$. Le point technique est de vérifier que J/Q reste une enveloppe injective de π dans $\mathscr{C}(k)^{\vee}$. Admettons cela pour l'instant. Par unicité des enveloppes injectives, on a un isomorphisme (non canonique) $J/\Omega \simeq J$, ce qui nous donne (par dualité) une suite exacte dans $\mathscr{C}(k)$

$$0 \to N/\pi_L \to N/\pi_L \to \Omega^{\vee} \to 0.$$

On note $\overline{x}$ l'endomorphisme de N/π_L ainsi obtenu. Par projectivité de N, il se relève en un endomorphisme x de N (on choisit un tel relèvement). Comme x est injectif modulo π_L, il est injectif tout court. Ensuite, le lemme du serpent montre que $\mathrm{Coker}(x)$ est plat sur O et que $\mathrm{Coker}(x)/\pi_L \simeq \mathrm{Coker}(\overline{x}) \simeq \Omega^{\vee}$, qui est une enveloppe projective de $(\mathrm{soc}_K\pi)^{\vee}$ dans la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}_{K,\zeta}^{\mathrm{pro}}$ formée d'objets tués par π_L. La conclusion est alors relativement formelle.

Il me reste à expliquer pourquoi J/Ω est une enveloppe injective de π dans $\mathscr{C}(k)^\vee$. Il suffit de voir que J/Ω est injectif dans $\mathscr{C}(k)^\vee$ et que $\mathrm{soc}_G(J/\Omega)=\pi$. Cela revient à montrer que pour toute représentation lisse irréductible π_1 de G sur k, à caractère central ζ, on a $\mathrm{Ext}^i_{G,\zeta}(\pi_1, J/\Omega)=0$ pour $i\geq 1$ et $\mathrm{Hom}_{G,\zeta}(\pi_1, J/\Omega)=0$ si π_1 n'est pas isomorphe à π, et de dimension 1 sinon. La suite longue pour $0\to\Omega\to J\to J/\Omega\to 0$ et l'injectivité de J (et le fait que $\mathrm{soc}_G(\Omega)=\mathrm{soc}_G(J)=\pi$) ramènent cela au fait que $\mathrm{Ext}^i_{G,\zeta}(\pi_1,\Omega)=0$ pour $i\geq 2$, et $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi_1,\Omega)=0$ si π_1 n'est pas isomorphe à π, et de dimension 1 sinon.

Supposons pour simplifier que $\pi_1\simeq X/P$, où $X=c-ind_{KZ}^G(\sigma)$ pour un poids de Serre σ et où $P\in\mathscr{H}_G(\sigma)$. Autrement dit, on exclut le cas où π_1 est un caractère ou une spéciale (il est facile d'adapter l'argument pour traiter ces cas aussi). La suite longue pour $0\to X\to X\to X/P\to 0$ permet alors de conclure, car $\mathrm{Ext}^i_{G,\zeta}(X,\Omega)=\mathrm{Ext}^i_{K,\zeta}(\sigma,\Omega)$ et ceci est nul pour $i\geq 1$ (à vrai dire, il faut aussi savoir que $Hom(\pi_1,\Omega)$ est nul ou de dimension 1, mais cela vient du fait que $\mathrm{soc}_G(\Omega)=\pi$ et $\mathrm{End}(\pi)=k$).

$\square$

Corollaire 0.11. — *N est projectif dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{pro}}_{K,\zeta}$.

Démonstration. — En faisant un twist convenable, on se ramène au cas où ζ est trivial, donc on travaille avec des $O[[K/Z\cap K]]$-modules compacts. Un tel module est projectif si et seulement si il est projectif come $\Lambda:=O[[P/Z\cap P]]$-module compact, où P est un p-Sylow de K. Cela arrive si et seulement si $\mathrm{Tor}^1(N,k)=0$, où $\mathrm{Tor}^i(\cdot,k)$ sont les foncteurs dérivés de $k\hat{\otimes}_\Lambda\cdot$ dans la catégorie des Λ-modules compacts. Puisque x est régulier sur N et N/x est un Λ-module compact projectif, on a $x\mathrm{Tor}^1(N,k)=\mathrm{Tor}^1(N,k)$. Si on savait que $\mathrm{Tor}^1(N,k)$ est de type fini sur R^ψ, on pourrait conclure. Pour vérifier cette finitude, il suffit de remarquer que N est de type fini sur $R^\psi[[P/Z\cap P]]$ et que ce dernier module est projectif sur Λ (même topologiquement libre, car R^ψ est topologiquement libre sur O) et noetherien. Donc N a une résolution projective par des $R^\psi[[P/Z\cap P]]$-modules libres de type fini et le résultat s'en déduit.

$\square$

0.3. Représentations de Banach et reconstruction à partir de $\check{V}$. — Soit $L/\mathbf{Q}_p$ une extension finie quelconque et $\delta_1,\delta_2:\mathbf{Q}_p^*\to O_L^*$ des caractères unitaires. On suppose qu'ils sont **génériques**, i.e. $\delta_1/\delta_2\notin\{1,\chi,\chi^{-1}\}$. On note

$$B(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1\otimes\chi^{-1}\delta_2)^{\mathrm{cont}}\in\mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\delta_1\delta_2/\chi).$$

Théorème 0.12. — *Si δ_1,δ_2 sont génériques, alors*

a) $B(\delta_1,\delta_2)$ et $B(\delta_2,\delta_1)$ sont absolument irréductibles (topologiquement) et non isomorphes.

b) On a $\check{V}(B(\delta_1,\delta_2))=\delta_1$ et $\check{V}$ induit un isomorphisme de L-droites

$$\mathrm{Ext}^1(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))\simeq\mathrm{Ext}^1_{L[G_{\mathbf{Q}_p}]}(\delta_1,\delta_2),$$

le premier Ext^1 *étant pris dans* $\mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\delta_1\delta_2/\chi)$.

c) On a $B(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ *si et seulement si on peut écrire* $\delta_1 = \chi^a\chi_1$ *et* $\delta_2 = \chi^b\chi_2$, *avec* $a < b \in \mathbf{Z}$ *et* χ_1, χ_2 *des caractères lisses unitaires. Dans ce cas*

$$B(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{alg}} = (\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1|\cdot|^a \otimes \chi_2|\cdot|^{b-1}))^{\mathrm{lisse}} \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1}(L^2) \otimes (\det)^a$$

et ceci est une représentation irréductible.

Démonstration. — La preuve est longue, bien que le résultat ne soit pas très difficile. Le a) est dû à Schneider et Teitelbaum, le b) est dû à Colmez et le c) se trouve dans le papier IHES de Paskunas (vers la fin, chapitre sur les complétions unitaires), mais c'est un résultat standard. □

Je dois faire quelques rappels de mon preprint avec Colmez. Cela permet d'éviter un certain nombre de contorsions relativement pénibles qui se trouvent dans le papier de Paskunas (pages 17 et 18 de loc.cit). Soit $\mathrm{Rep}_L(\zeta)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Rep}_L^{\mathrm{adm}}(\zeta)$ formée des représentations résiduellement de longueur finie (cela revient aussi à : topologiquement de longueur finie, mais c'est très difficile à vérifier-c'est un des résultats principaux du papier de Paskunas dans IHES). Soit $\mathscr{C}_\zeta$ l'image essentielle de la restriction de $\check{V}$ à $\mathrm{Rep}_L(\zeta)$.

Théorème 0.13. — *Il existe un foncteur* $\Pi_\zeta : \mathscr{C}_\zeta \to \mathrm{Rep}_\zeta(L)$ *tel que*

a) $\check{V}(\Pi_\zeta(\sigma)) \simeq \sigma$ *pour* $\sigma \in \mathscr{C}_\zeta$.

b) Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(\zeta)$, *alors il existe un morphisme canonique* $\Pi_\zeta(\check{V}(\Pi)) \to \Pi/\Pi^{\mathrm{SL}_2}$, *dont le noyau et conoyau sont de dimension finie sur* L *(et donc* SL_2 *agit trivialement sur eux).*

c) Si σ *est absolument irréductible de dimension* 2, *alors* $\Pi_\zeta(\sigma)$ *est supersingulière.*

Démonstration. — C'est le résultat principal du chapitre III de mon papier avec Colmez. □

Puisque $k \otimes_{R^\psi} N$ est de type fini sur Λ_K et de longueur finie, on dispose comme dans l'exposé d'Eugen d'un foncteur $m \to \Pi(m)$ de la catégorie des $R^\psi[1/p]$-modules de longueur finie dans $\mathrm{Rep}_L(\zeta)$. Rappelons que

$$\Pi(m) = \mathrm{Hom}_O^{\mathrm{cont}}(m^0 \otimes_{R^\psi} N, L),$$

où m^0 est un O-réseau du L-espace vectoriel de dimension finie m, qui est stable par R^ψ.

Proposition 0.14. — *On a*

$$\check{V}(\Pi(m)) \simeq m \otimes_{R^\psi} \rho^{\mathrm{un}}.$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{L} = \mathrm{Hom}_O^{\mathrm{cont}}(m^0 \otimes_{R^\psi} N, O)$ la boule unité de $\Pi(m)$. Il suffit de vérifier que $\check{V}(\mathscr{L}^d) = m^0 \otimes_{R^\psi} \rho^{\mathrm{un}}$. On a $\mathscr{L}^d = (m^0 \otimes_{R^\psi} N)/(m_0 \otimes_{R^\psi} N)_{O-\mathrm{tors}}$, donc $\check{V}(\mathscr{L}^d) = \check{V}(m^0 \otimes_{R^\psi} N)/X$, où X est de O-torsion. Mais l'exactitude de $\check{V}$ et le fait que m^0 est de présentation finie sur R^ψ fournissent

$$\check{V}(m^0 \otimes_{R^\psi} N) \simeq m^0 \otimes_{R^\psi} \check{V}(N) \simeq m^0 \otimes_{R^\psi} \rho^{\mathrm{un}}$$

et le dernier O-module est sans torsion, car isomorphe à $m^0 \oplus m^0$. Le résultat s'en déduit.

□

Définition 0.15. — Si n est un idéal maximal de $R^\psi[1/p]$ on note $k(n) = R^\psi[1/p]/n$ et $\Pi_n = \Pi(k(n)) \in \mathrm{Rep}_{k(n)}(\zeta)$. On note ρ_n^{un} la spécialisation de ρ^{un} via n. Enfin, on dit que n est **convenable** si ρ_n^{un} n'est pas isomorphe à $\left(\begin{smallmatrix} \chi & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \chi \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$ pour un caractère δ.

Remarque 0.16. — Noter que tous les n sauf un nombre fini sont convenables (regarder le déterminant). En fait on imposera une hypothèse faible plus tard, pour que tous les n soient convenables.

Théorème 0.17. — *(Paskunas) Si n est convenable, alors Π_n est soit supersingulière, soit elle vit dans une suite exacte non scindée*

$$0 \to B(\delta_1, \delta_2) \to \Pi_n \to B(\delta_2, \delta_1) \to 0$$

pour certains caractères unitaires génériques $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to k(n)^*$, uniquement déterminés.

Démonstration. — Comme $\mathrm{End}(\rho) = k$, il n'est pas difficile de voir que l'on a deux cas :
- Soit ρ_n^{un} est absolument irréductible.
- Soit ρ_n^{un} est une extension non scindée de deux caractères $0 \to \delta_2 \to \rho_n^{\mathrm{un}} \to \delta_1 \to 0$, avec $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to k(n)^*$. Noter qu'alors δ_1, δ_2 sont uniquement déterminés et génériques (puisque l'on a supposé que n est convenable).

Notons $\Pi_1 = \Pi_\zeta(\rho_n^{\mathrm{un}})$. Il découle des th. 0.13 (plutôt de sa preuve) et 0.12 que Π_1 est supersingulière dans le premier cas, et l'unique extension non scindée de $B(\delta_2, \delta_1)$ par $B(\delta_1, \delta_2)$ dans le second cas. Ensuite, on déduit facilement de la remarque 0.9 b) que $\Pi_n^{\mathrm{SL}_2} = 0$, donc le théorème 0.13 fournit un morphisme $\beta : \Pi_1 \to \Pi_n$ dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie sur L, avec action triviale de SL_2. Comme $\Pi_1^{\mathrm{SL}_2} = 0$, on en déduit une extension $0 \to \Pi_1 \to \Pi_n \to W \to 0$, avec $\dim_L(W) < \infty$ et $W = W^{\mathrm{SL}_2}$. Si $W \neq 0$, Paskunas (IHES) montre que $\mathrm{Ext}^1(W, \Pi_1) = 0$, donc W s'injecte dans Π_n et même dans $\Pi_n^{\mathrm{SL}_2} = 0$, contradiction. Donc $W = 0$ et $\Pi_n \simeq \Pi_1$, ce qui permet de conclure quant à la première partie du théorème. Ensuite, l'unicité de δ_1, δ_2 découle en appliquant $\check{V}$ et en utilisant la discussion précédente.

□

0.4. Vecteurs localement algébriques. — C'est de loin la partie la plus délicate et technique du papier, et d'ailleurs la seule qui a encore un argument de nature globale (la compatibilité entre les correspondances de Langlands locales p-adique et classique). Je vais fixer deux entiers $a < b$ et un type galoisien $\tau : I_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(L)$, tel que $\psi | I_{\mathbf{Q}_p} = \chi^{a+b} \cdot \det \tau$ (sinon ce qui suit est vide...). Pour nous simplifier la vie, on va supposer que $a \neq b-1$ ou que τ n'est pas la somme directe de deux caractères égaux (dans ce cas il est plus simple d'utiliser directement le papier de Breuil-Mézard). Avec cette hypothèse, tous les idéaux maximaux n de $R^{\psi}[1/p]$ sont convenables au sens de la la partie précédente.

Définition 0.18. — On dit que ρ_n^{un} est **du bon type** si elle est de de Rham, à poids de Hodge-Tate a et b, et si $WD(\rho_n^{\mathrm{un}})|I_{\mathbf{Q}_p} \simeq \tau$.

Un théorème classique d'Henniart fournit alors une unique représentation lisse irréductible $\sigma(\tau)$ de $K = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ sur L, uniquement déterminée par la condition suivante : pour toute représentation lisse irréductible π de G sur L on a

$$\mathrm{Hom}_K(\sigma(\tau), \pi) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad LL(\pi)|I_{\mathbf{Q}_p} \simeq \tau.$$

Dans ce cas, le terme de gauche est de dimension 1 sur L.

Définition 0.19. — On pose

$$V = \sigma(\tau) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1}(L^2) \otimes (\det)^a$$

et on choisit un réseau K-invariant Θ dans V.

Proposition 0.20. — *Supposons que n est un idéal maximal de $R^{\psi}[1/p]$ tel que l'on ait une suite exacte*

$$0 \to B(\delta_1, \delta_2) \to \Pi_n \to B(\delta_2, \delta_1) \to 0$$

comme dans le théorème 0.17. Alors $\Pi_n^{\mathrm{alg}} = B(\delta_1, \delta_2)^{\mathrm{alg}}$ et si de plus ceci est non nul, alors $B(\delta_1, \delta_2)$ est le complété unitaire universel de $B(\delta_1, \delta_2)^{\mathrm{alg}}$.

Démonstration. — Supposons d'abord que $B(\delta_1, \delta_2)^{\mathrm{alg}} \neq 0$. Le théorème 0.12 permet de conclure que $B(\delta_2, \delta_1)^{\mathrm{alg}} = 0$ (regarder les poids de Hodge-Tate de δ_1 et δ_2). Donc $\Pi_n^{\mathrm{alg}} = B(\delta_1, \delta_2)^{\mathrm{alg}}$ et la seconde partie est un résultat standard.

Supposons que $B(\delta_1, \delta_2)^{\mathrm{alg}} = 0$, mais que $\Pi_n^{\mathrm{alg}} \neq 0$. Donc $B(\delta_2, \delta_1)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ et ceci est irréductible (th. 0.12). Mais alors $\Pi_n^{\mathrm{alg}} \to B(\delta_2, \delta_1)^{\mathrm{alg}}$ est forcément un isomorphisme. On a donc une injection $B(\delta_2, \delta_1)^{\mathrm{alg}} \to \Pi_n$. En passant au complété universel on obtient une section $B(\delta_2, \delta_1) \to \Pi_n$ qui permet de scinder la suite exacte définissant Π_n, contradiction.

□

Le difficile théorème suivant est le seul ingrédient dont la preuve utilise encore des arguments globaux.

Théorème 0.21. — *(Colmez, Emerton) Soit n un idéal maximal de $R^{\psi}[1/p]$. Alors*

$$\dim_{k(n)} \mathrm{Hom}_K(V, \Pi_n) \leq 1$$

avec égalité si et seulement si ρ_n^{un} est du bon type.

Démonstration. — Notons que $\mathrm{Hom}_L(V, \Pi_n) = \mathrm{Hom}_K(V, \Pi_n^{\mathrm{alg}})$ puisque V est de dimension finie sur L. Si Π_n est réductible, le résultat découle facilement de la proposition précédente et du théorème 0.12. Si Π_n est supersingulière cela découle du profond théorème de compatibilité entre la correspondance de Langlands p-adique et classique pour G, qui décrit Π_n^{alg} en termes de $WD(\rho_n^{\mathrm{un}})$ et des poids de ρ_n^{un} (il faut aussi utiliser le théorème de multiplicité 1 d'Henniart dont j'ai parlé au début de ce numéro).

□

Théorème 0.22. — *Soit n comme toujours. Si Π_n est supersingulière, posons $\Pi = \Pi_n$. Sinon, posons $\Pi = B(\delta_1, \delta_2)$ (voir le th. 0.17). Le sous-espace de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{k(n)}(\zeta)}(\Pi, \Pi)$ engendré par les extensions $0 \to \Pi \to E \to \Pi \to 0$ telles que $0 \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to E^{\mathrm{alg}} \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to 0$ soit exacte est de dimension au plus 1.*

Démonstration. — Ce théorème est très délicat. Le cas où Π_n est réductible ou bien $\check{V}(\Pi_n)$ est trianguline est dû à Paskunas (cela utilise Berger-Breuil pour traiter la série principale, et les travaux de Liu, Xie, Zhang, Colmez sur la conjecture de Berger, Breuil et Emerton dans le cas spécial). Le cas général se trouve dans un preprint sur ma page web : 25 pages d'astuces et dévissages avec des (φ, Γ)-modules pour montrer que si E est une telle extension, alors $\check{V}(E)$ est de de Rham. Le reste découle d'un calcul en théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham.

□

Théorème 0.23. — *Pour tout n on a*

$$\dim_L \mathrm{Hom}_K(V, \Pi(R_n^{\psi}/n^2)) \leq 2[k(n) : L].$$

Démonstration. — C'est une conséquence relativement formelle du théorème précédent, mais c'est assez long à écrire. Je vais supposer que Π_n est supersingulière (l'autre cas est presqu'identique, à condition de jouer un peu avec les complétés universels via la prop. 0.26). Notons $d = \dim_{k(n)} n/n^2$, de telle sorte que la suite exacte de R_n-modules

$$0 \to n/n^2 \to R_n^{\psi}/n^2 \to k(n) \to 0$$

induit

$$0 \to \Pi_n \to \Pi(R_n^{\psi}/n^2) \to \Pi_n^d \to 0.$$

Noter que l'on peut supposer que $\mathrm{Hom}_K(V, \Pi_n) \neq 0$, sinon tout est clair. On a donc $\mathrm{Hom}_K(V, \Pi_n) \simeq k(n)$ (th. 0.21).

Lemme 0.24. — *L'espace $\mathrm{Hom}_G(\Pi_n, \Pi(R_n^{\psi}/n^2))$ est de dimension au plus 1 sur $k(n)$.*

Démonstration. — Il n'est pas très difficile de voir que $\check{V}$ induit une injection

$$\mathrm{Hom}_G(\Pi_n,\Pi(R_n^\psi/n^2))\to \mathrm{Hom}_{k(n)[G_{\mathbf{Q}_p}]}(\check{V}(\Pi(R_n^\psi/n^2)),\check{V}(\Pi_n))=\mathrm{Hom}(\rho^{\mathrm{un}}\otimes_{R^\psi}R_n^\psi/n^2,\rho_n^{\mathrm{un}}),$$

donc il suffit de voir que ce dernier espace est de dimension au plus 1. La suite exacte

$$0\to\rho^{\mathrm{un}}\otimes_{R^\psi}n/n^2\to\rho^{\mathrm{un}}\otimes_{R^\psi}R_n^\psi/n^2\to\rho_n^{\mathrm{un}}\to 0$$

induit une suite

$$0\to k(n)=\mathrm{End}(\rho_n^{\mathrm{un}})\to\mathrm{Hom}(\rho^{\mathrm{un}}\otimes_{R^\psi}R_n^\psi/n^2,\rho_n^{\mathrm{un}})\to$$
$$\mathrm{Hom}(\rho^{\mathrm{un}}\otimes_{R^\psi}n/n^2,\rho_n^{\mathrm{un}})\to\mathrm{Ext}^1_{G_{\mathbf{Q}_p},\psi}(\rho_n^{\mathrm{un}},\rho_n^{\mathrm{un}}).$$

Le dernier espace classifie les déformations de ρ_n^{un} à $k(n)[\varepsilon]$ dont le déterminant (comme $k(n)[\varepsilon]$-module) est ψ. Cela permet de montrer que la dernière flèche de la longue suite exacte est surjective. Mais $\mathrm{Ext}^1_{G_{\mathbf{Q}_p},\psi}(\rho_n^{\mathrm{un}},\rho_n^{\mathrm{un}})$ est de dimension 3 (dualité de Tate) et $\mathrm{Hom}(\rho^{\mathrm{un}}\otimes_{R^\psi}n/n^2,\rho_n^{\mathrm{un}})$ est aussi de dimension 3 (puisque $\mathrm{End}(\rho_n^{\mathrm{un}})=k(n)$ et $\dim_{k(n)}(n/n^2)=3$ vu que $R^\psi=O[[X,Y,Z]]$). Donc cette dernière flèche est un isomorphisme et le résultat s'en déduit.

□

Revenons à la preuve du théorème. La suite exacte $0\to\Pi_n\to\Pi(R_n^\psi/n^2)\to\Pi_n^d\to 0$ fournit un morphisme $\beta: k(n)^d=\mathrm{Hom}_K(V,\Pi_n^d)\to\mathrm{Ext}^1_{K,\zeta}(V,\Pi_n)$ et il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker}(\beta)$ est de dimension au plus 1 sur $k(n)$. La même suite exacte fournit un morphisme $\mathrm{Hom}_G(\Pi_n,\Pi_n^d)\to\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\Pi_n,\Pi_n)$, qui est injectif d'après le lemme précédent et le lemme de Schur p-adique (qui assure que $\mathrm{End}_G(\Pi_n)=k(n)$). De plus $\mathrm{Hom}_G(\Pi_n,\Pi_n^d)=k(n)^d$, donc il suffit de vérifier que le noyau de la flèche naturelle $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\Pi_n,\Pi_n)\to\mathrm{Ext}^1_{K,\zeta}(V,\Pi_n)$ est de dimension au plus 1 sur $k(n)$. Mais ceci est exactement le contenu du théorème 0.22. Cela finit la preuve du théorème 0.23.

□

0.5. Etude du module $M(\Theta)$. — Rappelons que l'on a choisi et fixé un réseau Θ dans V, stable par K. Cela permet de définir, comme dans l'exposé d'Eugen, un R^ψ-module de type fini

$$M=M(\Theta)=(\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N,\Theta^d))^d.$$

Notons que le centre de K agit par ζ sur Θ, donc $(\Theta/\pi_L^n)^\vee\in\mathrm{Mod}^{\mathrm{pro}}_{K,\zeta}$ pour tout n. Puisque N est projectif dans cette catégorie d'après le cor. 0.11, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N,\Theta^d)/\pi_L^n\simeq\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N,(\Theta/\pi_L^n)^\vee).\quad(*)$$

pour tout $n\geq 1$. Posons, pour λ un $O[K]$-module lisse de longueur finie, à caractère central ζ,

$$M(\lambda)=(\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N,\lambda^\vee))^\vee.$$

Puisque N est projectif dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{pro}}_{K,\zeta}$, le foncteur $\lambda \to M(\lambda)$ est exact. On a vu dans l'exposé d'Eugen que $M(\lambda)$ sont des R^{ψ}-modules de type fini. De plus, on vient de voir que

Proposition 0.25. — *$M = M(\Theta)$ est la limite projective des $M(\Theta/\pi_L^n)$ et*

$$M(\Theta)/\pi_L \simeq M(\Theta/\pi_L).$$

Un truc très important que l'on a vu dans l'exposé d'Eugen est la formule fondamentale

$$\dim_L \mathrm{Hom}_K(V, \Pi(m)) = \dim_L(m \otimes_{R^{\psi}} M)$$

pour tout $R^{\psi}[1/p]$-module de longueur finie m.

Théorème 0.26. — *(Paskunas)*

a) Soit x comme dans le théorème 0.10. Alors M/xM est un O-module libre de type fini et x est régulier sur M (i.e. la multiplication par x est injective sur M). En particulier, M est un module de Cohen-Macaulay de dimension 2 sur R^{ψ}.

b) Soit $R = R^{\psi}/I$, où $I = \mathrm{Ann}_{R^{\psi}}(M)$. Alors tout $\wp \in Ass(R)$ est minimal et $\dim(R/\wp) = 2$.

c) Si n est un idéal maximal de $R^{\psi}[1/p]$, alors n est dans le support de M si et seulement si ρ_n^{un} est du bon type. Si c'est le cas, alors M_n est un R_n-module libre de rang 1 et R_n est régulier de dimension 1.

Démonstration. — a) La projectivité de N induit une suite exacte (où Hom désigne $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}$)

$$0 \to \mathrm{Hom}(N/x, \Theta^d) \to \mathrm{Hom}(N, \Theta^d) \to \mathrm{Hom}(N, \Theta^d) \to 0,$$

qui a un scindage O-linéaire continu, donc en passant aux duaux de Schikhof on obtient

$$0 \to M \to M \to (\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N/xN, \Theta^d))^d \to 0.$$

En faisant un twist pour se ramener à ζ trivial et en écrivant N/xN comme facteur direct d'un $O[[K/Z\cap K]]$-module libre, on voit que $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N/xN, \Theta^d)$ est un O-module libre de type fini, ce qui permet de conclure.

b) M est un R-module fidèle, donc il existe un plongement $R \to M^d$ pour un certain d. Ainsi $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{Ass}(M^d) = \mathrm{Ass}(M)$. Mais d'après a) on sait que pour tout $\wp \in \mathrm{Ass}(M)$ on a $\dim(R/\wp) = \dim M = 2$. Donc pour tout $\wp \in \mathrm{Ass}(R)$ on a $\dim(R/\wp) = \dim R = 2$, ce qui permet de conclure.

c) Le théorème 0.21 montre que ρ_n^{un} est du bon type si et seulement si $\mathrm{Hom}_K(V, \Pi_n)$ est non nul, dans quel cas il est de dimension 1 sur $k(n)$. Mais

$$\dim_L \mathrm{Hom}_K(V, \Pi_n) = \dim_L(k(n) \otimes_{R^{\psi}} M).$$

Donc ρ_n^{un} est du bon type ssi $n \in \mathrm{Supp}(M)$, dans quel cas $\dim_{k(n)}(k(n) \otimes_{R_n} M_n) = 1$. Comme M est un R-module fidèle et de type fini, il en est de même de M_n sur R_n. Le lemme de Nakayama permet de conclure que M_n est libre de rang 1 sur R_n. Enfin, le théorème 0.23 montre que dans ce cas

$$\mathrm{long}_{R_n}(M \otimes_R R_n/n^2) \leq 2.$$

Comme on vient de voir que M_n est libre de rang 1 sur R_n, cela s'écrit $\mathrm{long}_{R_n}(R_n/n^2) \leq 2$ et la suite exacte $0 \to n/n^2 \to R_n/n^2 \to k(n) \to 0$ fournit $\dim_{k(n)}(n/n^2) \leq 1$. Donc R_n est régulier de dimension 1.

□

Corollaire 0.27. — *L'anneau R du théorème précédent est l'anneau de Kisin $R_\rho^{a,b,\tau,\psi}$.*

Démonstration. — Comme M est plat sur O, il en est de même de R. Le théorème précédent montre que le spectre maximal de la fibre générique de R (qui est Zariski-dense dans R) est en bijection avec les n du spectre maximal de la fibre générique de R^ψ tels que ρ_n^{un} soit du bon type. Autrement dit, R classifie bien des représentations du bon type. Pour conclure, il faut voir qu'il est réduit. Or le théorème précédent montre que R_n est réduit pour tout idéal maximal n de $R[1/p]$. Comme R s'injecte dans $\prod_{\wp\in \mathrm{Ass}(R)} R_\wp$, il suffit de voir que chaque $R_\wp$ est réduit. On a vu qu'un tel $\wp$ est minimal, donc par Zariski-densité on peut trouver n maximal de la fibre générique de R contenant $\wp$. Il suffit donc de voir que R_n est réduit. Mais on a vu qu'il est même régulier !

□

0.6. Fin de la preuve : alléluia !— Rappelons que si R est un anneau noethérien, un d-cycle sur R est un élément du groupe abélien libre engendré par les $\wp \in \mathrm{Spec}(R)$ tels que $\dim(R/\wp) = d$. Si M est un R-module de type fini et de dimension $\leq d$, alors $M_\wp$ est un $R_\wp$-module artinien pour $\dim(R/\wp) = d$. De plus, on vérifie sans mal que

$$Z_d(M) = \sum_{\dim(R/\wp)=d} \mathrm{long}_{R_\wp}(M_\wp) \cdot \wp$$

est un d-cycle sur R (si $M_\wp \neq 0$, alors $\wp$ est dans le support de M et $\dim(R/\wp) = 2 = \dim M$, donc $\wp$ est un point générique du support de M et donc $\wp$ est dans un ensemble fini).

Théorème 0.28. — *(Kisin, Breuil-Mézard, Paskunas) Soit $R = R^\psi/\mathrm{Ann}(M(\Theta)) \simeq R_\rho^{a,b,\tau,\psi}$. Alors R est de dimension 2, plat sur O et on a une égalité*

$$Z_1(R/\pi_L R) = \sum_\sigma m_\sigma Z_1(M(\sigma)),$$

où $M(\sigma)$ ont été définis dans le § précédent, et m_σ est la multiplicité du poids de Serre σ (à caractère central ζ) dans Θ/π_L. De plus $M(\sigma)$ est non nul si et seulement si $\mathrm{Hom}_K(\sigma, \mathrm{soc}_K\pi) \neq 0$. Dans ce cas, ce dernier espace est de dimension 1 et on a une suite exacte

$$0 \to M(\sigma) \to M(\sigma) \to k \to 0,$$

où $x \in R^{\psi}$ est l'élément usuel. Donc la multiplicité de Hilbert-Samuel de $M(\sigma)$ est 1 quand $M(\sigma) \neq 0$.

Démonstration. — Le fait que R est de dimension 2 et plat sur O a été déjà vu. Montrons l'égalité des cycles. Puisque $\lambda \to M(\lambda)$ est exact (car N est projectif), l'additivité des cycles en suites exactes montre que

$$Z_1(M(\Theta/\pi_L)) = \sum_{\sigma} m_\sigma Z_1(M(\sigma)).$$

Il faut donc vérifier que $Z_1(R/\pi_L R) = Z_1(M(\Theta/\pi_L))$. Par la proposition 0.25 cela revient à $Z_1(R/\pi_L) = Z_1(M(\Theta)/\pi_L)$. Par un lemme d'algèbre commutative (voir le papier d'Emerton-Gee) il suffit de vérifier que $Z_2(R) = Z_2(M(\Theta))$ (cela utilise le fait que R et $M(\Theta)$ sont sans π_L-torsion). Mais le théorème 0.26 montre que $M(\Theta)_n$ est libre de rang 1 sur R_n quand n est un idéal maximal de $R[1/p]$. Comme ces n forment un ensemble Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}(R)$ (car R est plat sur O), on obtient que $M_\wp$ est libre de rang 1 sur $R_\wp$ pour tout $\wp$ tel que $\dim(R/\wp) = 2$. Cela entraîne $Z_2(R) = Z_2(M(\Theta))$.

Il reste à vérifier la dernière partie du théorème. La suite exacte $0 \to N \to N \to N/xN \to 0$ induit une suite exacte (car N est projectif)

$$0 \to M(\sigma) \to M(\sigma) \to (\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N/xN, \sigma^\vee))^\vee \to 0,$$

la flèche de gauche étant la multiplication par x. Comme N/xN est une enveloppe projective de $(\mathrm{soc}_K \pi)^\vee$, on a

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\Lambda_K}(N/xN, \sigma^\vee) = \mathrm{Hom}_K(\sigma, \mathrm{soc}_K \pi).$$

Le dernier espace est de dimension 0 ou 1 sur k (car on peut explicitement calculer le K-socle de π), et le reste se déduit alors du lemme de Nakayama.

□

Gabriel Dospinescu