CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE ET ANNEAUX DE KISIN

par

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu & Wiesława Nizioł

Résumé. — Nous utilisons un procédé de complétion $\mathscr{B}$-adique et la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ pour donner une construction des anneaux de Kisin et des représentations galoisiennes universelles associées (en dimension 2 et pour $\mathbf{Q}_p$) à partir de la correspondance de Langlands locale classique. Cela fournit, en particulier, une preuve uniforme de la conjecture de Breuil-Mézard (version géométrique) dans le cas supercuspidal.

Abstract. — We use a $\mathscr{B}$-adic completion and the p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ to give a construction of Kisin's rings and the attached universal Galois representations (in dimension 2 and for $\mathbf{Q}_p$) directly from the classical Langlands correspondence. This gives, in particular, a uniform proof of the geometric Breuil-Mézard conjecture in the supercuspidal case.

Table des matières

Introduction

Nous donnons, pour $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$) et en dimension 2, une construction directe des anneaux de Kisin et des représentations universelles attachées.

Les trois auteurs sont membres du projet ANR-19-CE40-0015-02 COLOSS..

Plus précisément, soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et de corps résiduel k_L, et soient M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 irréductible, $a < b$ des entiers et $\overline{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$ une représentation continue, semi-simple. Notre construction part de la représentation $\mathrm{LL}(M)$ de $G := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée à M par la recette de Fontaine et la correspondance de Langlands locale classique (c'est une représentation supercuspidale puisque M est supposé irréductible). On suppose que la représentation localement algébrique

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) = \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

a un caractère central unitaire. Elle admet alors des $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par G ; on fixe un tel réseau Λ. La représentation $\overline{\rho}$ détermine un bloc $\mathscr{B}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de G lisses de longueur finie et de caractère central égal à celui de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$. On définit [1] *le complété $\mathscr{B}$-adique* $\Lambda_{\mathscr{B}}$ de Λ comme la limite projective des quotients de longueur finie de Λ dont toutes les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$, et on pose $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Lambda_{\mathscr{B}}$ (le résultat est indépendant du choix de Λ). Soient alors [2] :

$$R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}} := \mathrm{End}_G(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)), \quad X^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}} := \mathrm{Spec}\, R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}, \quad \rho^{[a,b]}_M := \mathbf{V}(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M))$$

Notre résultat principal est que $\rho^{[a,b]}_M$ est la famille universelle des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de type (M, a, b) dont la réduction [3] est $\overline{\rho}$, (i.e. de dimension 2, potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate a et b, et dont le D_{pst} est isomorphe à M).

Théorème 0.1. — (i) $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ *est un anneau commutatif s'identifiant à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert analytique de* $\mathbf{P}^1$ *; algébriquement, c'est le produit d'un nombre fini d'anneaux principaux.*

(ii) $\rho^{[a,b]}_M$ *est libre de rang 2 sur* $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ *et l'application de spécialisation* $x \mapsto \rho_x$ *induit, pour toute extension finie* L' *de* L*, une bijection entre* $X^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}(L')$ *et l'ensemble des* L'*-représentations de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *de réduction* $\overline{\rho}$ *et de type* (M, a, b)*.*

Ce théorème est prouvé aux §§ 5.2 et 5.3 (les notations y sont un peu différentes car on met l'accent sur le bloc $\mathscr{B}$ plutôt que la représentation $\overline{\rho}$, et donc $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ devient $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ et $\rho^{[a,b]}_M$ devient $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$). La preuve repose sur deux ingrédients :

• Le « théorème $R = T$ » local de Paškūnas **[23, 26]** qui montre que $\mathbf{V}(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M))$ est « de type GL_2 » et munit ce module d'une action de l'anneau des déformations universelles du pseudo-caractère $\mathrm{Tr} \circ \overline{\rho}$.

---

1. Cette construction apparaît déjà dans **[22**, (1.6.4)**]**.
2. Rappelons que l'on dispose d'un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ associant une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à une L-représentation unitaire Π de G, et que la correspondance de Langlands locale p-adique $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associe à une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, une L-représentation de G vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V)) = V$.
3. Par définition, on prend la semi-simplifiée de la réduction d'un réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

• Une extension des résultats de [**16**] selon lesquels, si V est irréductible de dimension 2, de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, et si E est une extension de V par V, alors $\mathbf{\Pi}(V)$ est la complétée de ses vecteurs localement algébriques si et seulement si E est de Rham. Ces résultats permet de montrer que $R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ est un produit d'anneau principaux et que $\rho_M^{[a,b]}$ est libre de rang 2 sur $R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ (cf. th. 5.4 et cor. 5.5).

Remarque 0.2. — (i) Pour $\overline{\rho}$ générique, l'existence de $\rho_M^{[a,b]}$ peut se déduire des résultats de Kisin [**21**] (cf. aussi [**22**, cor. 1.4.7]) à part pour le fait que Kisin ne fixe pas M mais seulement sa restriction au sous-groupe d'inertie et son déterminant ce qui donne a priori deux M possibles : M et $M \otimes \mu_{-1}$ où μ_{-1} est le caractère non ramifié d'ordre 2. (Les résultats de Kisin sont valables pour des représentations de $\mathscr{G}_K$, avec $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, en dimension arbitraire, mais comme notre construction utilise la correspondance de Langlands locale p-adique, nous sommes forcés de nous restreindre aux représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; la géométrie de l'analogue de l'espace $X_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ ci-dessus a été étudiée par Wang-Erickson [**29**].)

(ii) Pour prouver que $R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ est un produit d'anneaux principaux, on commence par prouver que cet anneau est lisse et qu'il s'identifie à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert de $\mathbf{P}^1$, ce qui permet d'utiliser la classification standard des ouverts de $\mathbf{P}^1$ (voir les travaux de Rozensztajn [**27**] pour des résultats du même type).

(iii) Les deux ingrédients ci-dessus ont aussi été utilisés par Paškūnas [**25**] pour prouver la conjecture de Breuil-Mézard (avec quelques restrictions sur $\overline{\rho}$ dont certaines ont été levées par Hu et Tan [**20**]), ce qui nécessite des informations sur $R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ un peu différentes de celles mentionnées ci-dessus (et il ne faut pas rendre p inversible), cf. [**25**, th. 6.6, th. 6.24].

(iv) On déduit de la construction de $\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$ et des résultats des §§ 2.2 et 2.3 une suite de décomposition de la réduction de $\rho_M^{[a,b]}$ qui fournit (prop. 5.9 et 5.11) une forme de la conjecture de Breuil-Mézard [**6, 18**].

(v) La motivation première pour les résultats de cet article était la définition des objets apparaissant dans la factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld [**12**, th. 0.1].

Notations

On note :

- G le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$,
- B le borel des matrice triangulaires supérieures,
- Z le centre de G,
- $K := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ le sous-groupe compact maximal.

On note :

- μ_λ le caractère non ramifié de $\mathbf{Q}_p^*$ prenant la valeur λ en p (dans un anneau où λ est inversible), i.e. $\mu_\lambda(x) = \lambda^{v_p(x)}$.

- ε le caractère $x \mapsto x|x|$ de $\mathbf{Q}_p^*$.
- χ le caractère $\chi \circ \det$ de G, si χ est un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$.

1. La correspondance de Langlands locale p-adique

1.1. Représentations irréductibles

Si $0 \leq r \leq p-1$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ est un caractère continu, soit $W_{r,\chi}$ le KZ-module $(\mathrm{Sym}^r k_L^2) \otimes \chi$ (où $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur k_L^2), et soit $I_{r,\chi}$ son induite compacte de KZ à G. Soit T_{BL} l'opérateur de Barthel-Livné. Il résulte des travaux de Barthel-Livné [**1, 2**] et Breuil [**5**] que $\mathrm{End}_{k_L[G]} I_{r,\chi} = k_L[T]$, où T agit par T_{BL}, et que, si $P \in k_L[T]$ est irréductible, alors

$$\Pi_{r,\chi,P} := I_{r,\chi}/P$$

est irréductible sauf si $r = 0$ ou $p-1$ et $P = T \pm 1$ (bien sûr, si $\deg P \geq 2$, alors $\Pi_{r,\chi,P}$ n'est pas absolument irréductible).

Remarque 1.1. — Soit $B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$ la $k_L[T, T^{-1}]$-représentation

$$B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) := \mathrm{Ind}_B^G(\chi\mu_{T^{-1}} \otimes \chi\varepsilon^r\mu_T)$$

On déduit des résultats de Barthel-Livné que, si $P \in k_L[T]$ est irréductible et n'admet pas 0 pour racine, alors

$$B_{r,\chi,P} := (k_L[T, T^{-1}]/P) \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

a même semi-simplifiée que $\Pi_{r,\chi,P}$ et lui est isomorphe sauf si $r = p-1$ et $P = T - \lambda$, avec $\lambda = \pm 1$, où $\Pi_{r,\chi,P}$ est une extension de $\chi\mu_\lambda$ par $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda$ tandis que $B_{r,\chi,P}$ est une extension de $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda$ par $\chi\mu_\lambda$.

Si k est une extension de k_L, notons $\mathrm{Irr}_k G$ l'ensemble des k-représentations de G, lisses, admissibles et *absolument irréductibles*. Berger [**3**] a prouvé qu'un élément de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_p} G$ admet un caractère central, et les résultats de [**1, 2, 5**] fournissent la description suivante de $\mathrm{Irr}_k G$

Proposition 1.2. — *Les objets de* $\mathrm{Irr}_{k_L} G$ *sont :*
- *les* χ*, pour* $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ *caractère lisse,*
- *les* $\mathrm{St} \otimes \chi$*, pour* $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ *caractère lisse,*
- *les* $B(\chi_1, \chi_2) := \mathrm{Ind}_B^G \chi_2 \otimes \chi_1\varepsilon^{-1}$*, pour* $\chi_1, \chi_2 : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ *caractères lisses, avec* $\chi_1 \neq \varepsilon\chi_2$*,*
- *les* $\Pi_{r,\chi,T}$*, pour* $0 \leq r \leq p-1$ *et* $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k^*$ *caractère lisse.*

1.2. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$

Soit $\mathrm{Tors}\, G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules lisses, de longueur finie (un tel module est tué par p^N, si N est supérieur ou égal à la longueur). Si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on note $\mathrm{Tors}^\delta\, G$ la sous-catégorie des objets de caractère central δ.

Si $\Pi \in \mathrm{Tors}^\delta G$, on peut [**9**, th. IV.2.13, IV.2.14] associer à Π, de manière fonctorielle, une représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ « de type GL_2 » (cf. th. 1.7 pour le sens à donner à cet énoncé : si on est en dimension 2, l'opérateur $g + \delta\varepsilon(g)g^{-1}$ qui y apparaît est juste la trace de g).

Si $\Pi = \varprojlim \Pi_i$, où les Π_i sont de longueur finie, on pose $\mathbf{V}(\Pi) = \varprojlim \mathbf{V}(\Pi_i)$, et si $\Pi = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi^+$, on pose $\mathbf{V}(\Pi) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathbf{V}(\Pi^+)$, ce qui permet de définir $\mathbf{V}(\Pi)$ pour des banachs dont la réduction est de longueur finie (ou même juste limite projective d'objets de longueur finie).

Proposition 1.3. — ([**9**, th. 0.10] ou [**22**, th. 1.2.4])

(i) $\mathbf{V}(\Pi) = 0$ *si* Π *est de dimension* 1.

(ii) $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,P}) = \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda\chi$, *si* $P(\lambda) = 0$ *et* $\lambda \neq 0$.

(iii) $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,T}) = \mathrm{Ind}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}}^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} \omega_2^{r+1} \otimes \chi$.

1.3. Blocs

La théorie de Gabriel [**19**] fournit des décompositions

$$\mathrm{Tors}\, G = \prod\nolimits_{\mathscr{B}} \mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}\, G, \quad \mathrm{Tors}^\delta\, G = \prod\nolimits_{\mathscr{B}} \mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\, G$$

où $\mathscr{B}$ parcourt l'ensemble des blocs [(4)] de $\mathrm{Tors}\, G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta\, G$), et $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}\, G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\, G$) est la sous-catégorie de $\mathrm{Tors}\, G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta\, G$) des objets dont toutes les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$. (Les blocs de $\mathrm{Tors}^\delta\, G$ sont ceux de $\mathrm{Tors}\, G$ de caractère central δ.) Les composantes de Jordan-Hölder de $\Pi_{r,\chi,P}$ appartiennent toutes à un même bloc.

On dit qu'un bloc de $\mathrm{Tors}\, G$ ou $\mathrm{Tors}^\delta\, G$ est *absolu* s'il est constitué de représentations absolument irréductibles (si $\mathscr{B}$ n'est pas absolu, alors $\mathscr{B}$ peut être considéré comme absolu sur une extension non ramifiée $L(\mathscr{B})$ de L, cf. rem. 1.9).

Proposition 1.4. — (Paškūnas) *Les blocs absolus de* $\mathrm{Tors}\, G$ *sont d'une des formes suivantes :*

- $\{\Pi_{r,\chi,T}\}$.
- $\{B(\chi_1, \chi_2), B(\chi_2, \chi_1)\}$, *où* $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \varepsilon^{\pm}, 1$.
- $\{B(\chi, \chi)\}$, *si* $p \neq 2$ (*devient* $\{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi\}$, *si* $p = 2$).
- $\{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi, B(\chi, \chi\varepsilon)\}$, *si* $p \neq 3$ (*devient* $\{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi, \chi\varepsilon, \mathrm{St} \otimes \chi\varepsilon\}$, *si* $p = 3$).

4. On met, sur les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles, une relation d'équivalence définie par $\pi \sim \pi'$ si et seulement si il existe une suite $\pi = \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r = \pi'$ telle que $\pi_{i+1} = \pi_i$ ou $\mathrm{Ext}^1(\pi_i, \pi_{i+1}) \neq 0$ ou $\mathrm{Ext}^1(\pi_{i+1}, \pi_i) \neq 0$ (ces conditions ne sont pas exclusives). Une classe d'équivalence est *un bloc*.

Si π est irréductible, on note P_π (resp. P_π^δ) le dual de Pontryagin d'une enveloppe injective de π dans la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules lisses qui sont la réunion de leurs sous $\mathscr{O}_L[G]$-modules de longueur finie (resp. de caractère central δ). Le caractère central de P_π^δ est donc δ^{-1}, et P_π est un $\mathscr{O}_L[G]$-module compact, limite projective de $\mathscr{O}_L[G]$-modules compacts et de longueur finie.

Si $\mathscr{B}$ est un bloc de $\mathrm{Tors}\, G$ ou de $\mathrm{Tors}^\delta\, G$, on pose

$$\begin{array}{lll} P_{\mathscr{B}} = \oplus_{\pi\in\mathscr{B}} P_\pi & E_{\mathscr{B}} := \mathrm{End}_G(P_{\mathscr{B}}) & Z_{\mathscr{B}} := \text{centre de } E_{\mathscr{B}} \\ P_{\mathscr{B}}^\delta = \oplus_{\pi\in\mathscr{B}} P_\pi^\delta & E_{\mathscr{B}}^\delta := \mathrm{End}_G(P_{\mathscr{B}}^\delta) & Z_{\mathscr{B}}^\delta := \text{centre de } E_{\mathscr{B}}^\delta \end{array}$$

Alors on dispose d'un morphisme naturel $Z_{\mathscr{B}} \to Z_{\mathscr{B}}^\delta$.

Remarque 1.5. — Si $\pi \in \mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}^\delta\, G$, alors $Z_{\mathscr{B}}^\delta$ agit sur π ainsi que, par fonctorialité, sur $\mathbf{V}(\pi)$.

1.4. Blocs et représentations galoisiennes modulo p

On associe à un bloc absolu $\mathscr{B}$ de $\mathrm{Tors}\, G$ la k_L-représentation $\rho_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ semi-simple, de dimension 2, dont les composantes irréductibles sont les $\mathbf{V}(\pi)$, pour $\pi \in \mathscr{B}$. On obtient de la sorte une bijection entre les blocs absolus de $\mathrm{Tors}\, G$ et les k_L-représentations $\rho_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ semi-simples, de dimension 2.

Remarque 1.6. — $\rho_{\mathscr{B}}$ vérifie les propriétés suivantes :
- $\rho_{\mathscr{B}}$ est irréductible, de dimension 2, si $\mathscr{B} = \{\Pi_{r,\chi,T}\}$.
- $\rho_{\mathscr{B}} = \chi_1 \oplus \chi_2$, si $\mathscr{B} = \{B(\chi_1,\chi_2), B(\chi_2,\chi_1)\}$ et $\chi_1 \neq \chi_2$.
- $\rho_{\mathscr{B}} = \chi \oplus \chi$, si $\mathscr{B} = \{B(\chi,\chi)\}$.
- $\rho_{\mathscr{B}} = \chi \oplus \chi\varepsilon$, si $\mathscr{B} = \{\chi, \mathrm{St}\otimes\chi, B(\chi,\chi\varepsilon)\}$.

Si $\mathscr{B}$ est un bloc de Tors_G^δ, alors $(\det \rho_{\mathscr{B}})\varepsilon^{-1} = \delta$.

Soit $\mathscr{B}$ un bloc absolu de $\mathrm{Tors}^\delta\, G$. Notons $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$ l'anneau des déformations universelles du pseudo-caractère $\mathrm{Tr}\circ\rho_{\mathscr{B}}$, de dimension 2 et de déterminant $\delta\varepsilon$, et

$$T_{\mathscr{B}}^\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$$

le pseudo-caractère universel. On a alors le « théorème $R = T$ » local suivant (cf. rem. 1.5 pour l'action de $Z_{\mathscr{B}}^\delta$).

Théorème 1.7. — (Paškūnas [**23**], Paškūnas-Tung [**26**]) *Il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\iota_{\mathscr{B}}^\delta : R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta} \to Z_{\mathscr{B}}^\delta$$

tel que, pour tout $\pi \in \mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}^\delta G$ *et tout* $g \in \mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}_p}$, *on ait :*

$$\iota_{\mathscr{B}}^\delta(T_{\mathscr{B}}^\delta(g)) = g + \delta\varepsilon(g)g^{-1} \quad \textit{dans } \mathrm{End}(\mathbf{V}(\pi)).$$

De plus :
- *Si* $p \geq 5$, $\iota_{\mathscr{B}}^\delta$ *est un isomorphisme.*

• *Dans le cas général* $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \iota^\delta_{\mathscr{B}}$ *est un isomorphisme,* $Z^\delta_{\mathscr{B}} = R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}/\mathscr{O}_L$-torsion *si* $p = 3$ *et le conoyau de* $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}/\mathscr{O}_L$-torsion $\to Z^\delta_{\mathscr{B}}$ *est tué par* 2 *si* $p = 2$.

Remarque 1.8. — Les anneaux de déformations universelles de pseudo-caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont noethériens (et mêmes quotients de $\mathscr{O}_L[[x_1, \dots, x_r]]$) ; on en déduit que $Z^\delta_{\mathscr{B}}[1/p]$ est noethérien. En fait $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ est noethérien [**26**, th 1.1].

Remarque 1.9. — Tout ce qui précède suppose que $\mathscr{B}$ est absolu mais on peut considérer tout bloc comme absolu, quitte à remplacer L par une certaine extension non ramifiée $L(\mathscr{B})$. En effet :

(i) Si π est irréductible comme $k_L[G]$-module, alors l'anneau $k(\pi) := \mathrm{End}_{k[G]}\pi$ est une extension finie de k, et π est absolument irréductible vue comme $k(\pi)[G]$-module.

(ii) Si $\mathscr{B}$ est un bloc de $\mathrm{Tors}\, G$, alors $k(\pi)$ ne dépend pas de $\pi \in \mathscr{B}$; notons le $k(\mathscr{B})$, et notons $L(\mathscr{B})$ l'extension non ramifiée de L de corps résiduel $k(\mathscr{B})$.

(iii) Tout élément de $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}} G$ est muni d'une action de $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})}$ relevant celle de $k(\mathscr{B})$, ce qui permet de considérer $\mathscr{B}$ comme un bloc absolu de $\mathrm{Tors}_{\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})}} G$. De plus, l'oubli de l'action de $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})}$ induit une équivalence entre $\mathrm{Tors}_{\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})},\mathscr{B}} G$ et $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}} G$.

(iv) Si $\Pi \in \mathrm{Tors}_{\mathscr{B}} G$, alors $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})} \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi$ se decompose sous la forme $\oplus_\sigma \Pi^\sigma$, où σ décrit $\mathrm{Hom}_L(L(\mathscr{B}), L(\mathscr{B}))$. Cela découpe $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})} \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{B}$ en blocs absolus $\mathscr{B}^\sigma$ qui sont distincts mais conjugués sous l'action de $\mathrm{Gal}(k(\mathscr{B})/k_L)$.

2. Complétions profinie et $\mathscr{B}$-adique

2.1. Complétion profinie

Si X est un $\mathscr{O}_L[G]$-module topologique, on note $\widetilde{X}$ son *complété profini*, i.e. la limite projective des X/W, où W parcourt l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L[G]$-modules ouverts (et donc aussi fermés) de X tels que $X/W \in \mathrm{Tors}\, G$. Alors $\widetilde{X}$ admet une décomposition

$$\widetilde{X} = \prod\nolimits_{\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$$

où $\mathscr{B}$ décrit l'ensemble des blocs des représentations de G sur k_L ; $X_{\mathscr{B}}$ est le *complété* $\mathscr{B}$*-adique* de X. Si X a pour caractère central δ, les blocs apparaissant dans le produit sont ceux de $\mathrm{Tors}^\delta\, G$.

Remarque 2.1. — On n'est pas forcé de prendre un bloc pour définir un complété $\mathscr{B}$-adique : on peut prendre pour $\mathscr{B}$ un sous-ensemble d'un bloc et ne considérer que les quotients dont les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$.

Proposition 2.2. — *Si X est une représentation lisse de G, de type fini, on dispose d'un isomorphisme naturel de G-modules ind-profinis*

$$X^\vee_{\mathscr{B}} \simeq P_{\mathscr{B}} \otimes_{E_{\mathscr{B}}} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, X^\vee).$$

Démonstration. — Soit $(\sigma_i)_{i\in I}$ l'ensemble (dénombrable) des quotients de X qui appartiennent à $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}$. On a donc $X_{\mathscr{B}}^{\vee} \simeq \varinjlim_{i\in I} \sigma_i^{\vee}$ et pour tout i la flèche naturelle $P_{\mathscr{B}} \otimes_{E_{\mathscr{B}}} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, \sigma_i^{\vee}) \to \sigma_i^{\vee}$ est un isomorphisme, d'où un isomorphisme

$$X_{\mathscr{B}}^{\vee} \simeq P_{\mathscr{B}} \otimes_{E_{\mathscr{B}}} (\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, \sigma_i^{\vee}))).$$

Il suffit donc de montrer que l'injection $\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, \sigma_i^{\vee})) \to \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, X^{\vee})$ (induite par les injections $\sigma_i^{\vee} \to X^{\vee}$) est une surjection. Soit donc $f : P_{\mathscr{B}} \to X^{\vee}$ un morphisme continu G-équivariant. Son image est fermée et G-stable dans $X^{\vee}$, donc son dual de Pontryagin correspond à un quotient σ de X. Il suffit de montrer que σ est de longueur finie. Mais $\sigma^{\vee}$ est un quotient de $P_{\mathscr{B}}$, donc σ est un sous-objet de $P_{\mathscr{B}}^{\vee}$, et ce dernier est une limite inductive de représentations de longueur finie. D'autre part σ est un quotient de X, donc σ est de type fini, et on conclut que σ est de longueur finie. □

Corollaire 2.3. — *Le foncteur $X \mapsto X_{\mathscr{B}}$ est exact sur la catégorie des représentations lisses de type fini de G.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $P_{\mathscr{B}}$ est plat sur $E_{\mathscr{B}}$, or cela est une conséquence immédiate de l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, -)$ et du fait que ce foncteur est quasi-inverse du foncteur $(-) \otimes_{E_{\mathscr{B}}} P_{\mathscr{B}}$. □

Corollaire 2.4. — *Si X est une représentation lisse de type fini de G, alors $V(X_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps}}$.*

Démonstration. — Le $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps}}$-module $V(X_{\mathscr{B}})$ est une limite inverse de modules de la forme $V(\pi)$ avec π de longueur finie. Chaque $V(\pi)$ est de longueur finie sur $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps}}$, donc $V(X_{\mathscr{B}})$ est un $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps}}$-module compact. Soit m l'idéal maximal de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps}}$. Par le lemme de Nakayama topologique il suffit de montrer que $V(X_{\mathscr{B}})/mV(X_{\mathscr{B}}) \simeq V(X_{\mathscr{B}}/mX_{\mathscr{B}})$ est est de dimension finie sur k_L, et pour cela il suffit de voir que $X_{\mathscr{B}}/mX_{\mathscr{B}}$ est de longueur finie comme $k_L[G]$-module, ou encore que $X_{\mathscr{B}}^{\vee}[m]$ est de longueur finie comme $k_L[G]$-module compact. Comme $P_{\mathscr{B}}$ est plat sur $E_{\mathscr{B}}$, par la proposition ci-dessus il suffit de vérifier que $P_{\mathscr{B}}/mP_{\mathscr{B}} \otimes_{E_{\mathscr{B}}/mE_{\mathscr{B}}} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, X^{\vee})[m]$ est de longueur finie. Comme $(P_{\mathscr{B}}/mP_{\mathscr{B}})^{\vee}$ est de longueur finie, il suffit de voir que $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, X^{\vee})[m]$ est de dimension finie sur k_L. Cela découle du fait que $(P_{\mathscr{B}}/mP_{\mathscr{B}})^{\vee}$ est admissible (car de longueur finie) et que $\mathrm{Hom}_G(X, \pi)$ est de dimension finie quand X est de type fini et π est admissible. □

2.2. Complétion $\mathscr{B}$-adique des induites compactes : le cas irréductible

Proposition 2.5. — *Si $\mathscr{B}$ est le bloc contenant $\Pi_{r,\chi,P}$, alors*

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} = \varprojlim_n I_{r,\chi}/P^n$$

De plus,

$$\mathrm{End}_{k_L[G]}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}) = \varprojlim_n k_L[T]/P^n$$

Démonstration. — On déduit des résultats de Barthel-Livné (et Breuil) qu'un quotient Π de $I_{r,\chi}$, de longueur finie, est quotient de $I_{r,\chi}/Q$, avec $Q \in k_L[T]$. Le théorème des restes chinois implique donc que Π est quotient de $\oplus_\lambda I_{r,\chi}/P^{n_P}$, où la somme porte sur les P irréductibles et les n_P sont presque tous nuls. Le premier point s'en déduit remarquant que les blocs associés aux différents P sont distincts (à r, χ fixé, s'entend).

Le second découle de ce que $\mathrm{End}(I_{r,\chi}/Q) = k_L[T]/Q$ car toute copie de $W_{r,\chi}$ dans $I_{r,\chi}$ est de la forme $Q \cdot W_{r,\chi}$ puisque $\mathrm{End}(I_{r,\chi}) = k_L[T]$. □

Proposition 2.6. — *Si $P \in k_L[T]$ est irréductible et n'admet pas 0 pour racine, si $\mathscr{B}$ est le bloc qui lui correspond, et si T agit sur $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}$ via T_{BL}, on a un isomorphisme de $k_L[T]_P[G]$-modules*[5] *:*

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong k_L[T]_P \,\widehat{\otimes}_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

dans le cas générique, et une suite exacte

$$0 \to k_L[T]_P \,\widehat{\otimes}_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

si $r = p-1$ et $P = T-\lambda$ avec $\lambda = \pm 1$.

Démonstration. — On a une flèche naturelle $I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$ de $k_L[T][G]$-modules, où T agit sur $I_{r,\chi}$ par T_{BL}. Celle-ci induit une flèche de $k_L[T,T^{-1}][G]$-modules

$$k_L[T,T^{-1}] \otimes_{k_L[T]} I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

qui est injective et est un isomorphisme sauf si $r = p-1$ où l'on a une suite exacte

$$0 \to k_L[T,T^{-1}] \otimes_{k_L[T]} I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (\mathrm{St} \otimes \chi\mu_1) \oplus (\mathrm{St} \otimes \chi\mu_{-1}) \to 0$$

et T agit par 1 (resp. -1) sur le premier (resp. second) terme du conoyau.

• Si $r \neq p-1$ ou si $P \neq T-\lambda$, avec $\lambda \neq \pm 1$ (cas générique), on a donc, pour tout n, un isomorphisme

$$I_{r,\chi}/P^n \cong (k_L[T]/P^n) \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

• Si $r = p-1$ et si $\lambda = \pm 1$ (cas exceptionnels), on a, pour tout n, des suites exactes

$$0 \to \mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda \to I_{r,\chi}/(T-\lambda)^n \to M_{\lambda,n} \to 0$$
$$0 \to (T-\lambda)(B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})/(T-\lambda)^{n-1}) \to M_{\lambda,n} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$
$$M_{\lambda,n} := \mathrm{Ker}\big(B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})/(T-\lambda)^n \to \mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda\big)$$

Quand on passe de $n+1$ à n, la flèche $\mathrm{St}\otimes\chi\mu_\lambda \to \mathrm{St}\otimes\chi\mu_\lambda$ est 0 (et pas l'identité). En passant aux limites projectives, cela fournit, dans le cas générique, un isomorphisme

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong k_L[T]_P \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

5. $k_L[T]_P$ est le complété P-adique de $k_L[T]$.

et dans les cas exceptionnels, un isomorphisme $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong \varprojlim_n M_{\lambda,n}$, et une suite exacte

$$0 \to P\, k_L[T]_P \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

On en déduit le résultat. □

Lemme 2.7. — ([**22**, Lemma 1.5.11]) *Si $P \in k_L[T]$ est irréductible et si $\mathscr{B}$ est le bloc que lui est associé, l'application naturelle $\alpha_{r,\chi} : Z_{\mathscr{B}} \to \mathrm{End}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est surjective sauf dans le cas $r = p-2$ et $P = T\pm1$, correspondant à $\mathscr{B} = \{B(\chi\mu_{\pm1}, \chi\mu_{\pm1})\}$, où l'image est $k_L[[P^2]]$.*

Corollaire 2.8. — ([**22**, Lemma 1.5.2]) *$\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est un module de type fini sur $Z_{\mathscr{B}}$, de rang 2, si $P = T$ et « de rang 1 » si P n'a pas 0 comme racine.*

Démonstration. — Cela suit de ce que $\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P)$ est de rang fini sur $\mathrm{End}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})/P$, et ce rang vaut 2 si $P = T$ (car $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P$ est supersingulière) et 1 sinon (car $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P$ est une série principale à des caractères près). □

Remarque 2.9. — Dans le cas d'un bloc de la série principale, $\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est la déformation non ramifiée d'un caractère. Dans le cas $\mathscr{B}$ supersingulier, on obtient une déformation « Fontaine-Laffaille » de $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,T})$, cf. [**22**, Lemma 1.5.3].

2.3. Complétion $\mathscr{B}$-adique des induites compactes : exactitude

On fixe $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère lisse, et tous nos KZ-modules et G-modules sont supposés de caractère central δ. Si W est une représentation de KZ, de type fini sur $\mathscr{O}_L$, on pose

$$I(W) := \text{c-Ind}_{KZ}^G\, W$$

Comme $W \mapsto I(W)$ est exact, on déduit du cor. 2.3 le résultat suivant :

Corollaire 2.10. — *Les foncteurs $W \mapsto \widetilde{I(W)}$ et $W \mapsto I(W)_{\mathscr{B}}$ sont exacts.*

Corollaire 2.11. — *Soit W un $\mathscr{O}_L[KZ]$-module sans p-torsion.*

(i) *$\widetilde{I(W)}$ est sans p-torsion.*

(ii) *$\widetilde{I(W)} = \varprojlim_n \widetilde{I(W)}/p^n$, et $\widetilde{I(W)}/p^n = \widetilde{I(W/p^n)}$, pour tout n.*

Démonstration. — L'identification $\widetilde{I(W)} = \varprojlim_n \widetilde{I(W/p^n)}$ est immédiate. La multiplication par p^n induit un isomorphisme $I(W)/p^n \overset{\sim}{\to} p^n I(W)/p^{2n} I(W) \subset I(W)/p^{2n}$; elle induit donc aussi un isomorphisme $\widetilde{I(W)/p^n} \overset{\sim}{\to} \widetilde{p^n I(W)/p^{2n} I(W)} \subset \widetilde{I(W)/p^{2n}}$. A la limite, on voit qu'un élément de p-torsion de $\varprojlim_n \widetilde{I(W)/p^n}$ est dans l'image de la multiplication par p^n, pour tout n. Le résultat s'en déduit car le sous-groupe p-divisible de $\widetilde{I(W)}$ est réduit à 0 (vu que c'est le cas pour tous les quotients de longueur finie de $I(W)$). □

Remarque 2.12. — En utilisant la décomposition suivant les blocs, on en déduit les mêmes résultats pour la complétion $\mathscr{B}$-adique.

3. Le complété universel de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$

Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 sur $L \otimes \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, absolument irréductible en restriction au sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (et donc $N = 0$), et soit $\mathrm{LL}(M)$ la L-représentation lisse de G associée par la correspondance de Langlands locale classique (elle est supercuspidale grâce à l'hypothèse faite sur M).

Si $a < b$ sont des entiers, notons $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ la représentation localement algébrique

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) := \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

On suppose que le caractère central $\delta_M^{[a,b]}$ de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est unitaire.

D'après la classification des représentations supercuspidales de G, il existe une représentation irréductible σ_M de KZ (de dimension finie), telle que [(6)]

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M = \mathrm{LL}(M) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M = \mathrm{LL}(M) \oplus (\mathrm{LL}(M) \otimes \mu_{-1})$$

On a donc le même résultat pour $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ en remplaçant σ_M par

$$\sigma_M^{[a,b]} := \sigma_M \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \oplus (\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \otimes \mu_{-1})$$

L'hypothèse selon laquelle le caractère central de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est unitaire implique qu'il existe des réseaux de $\sigma_M^{[a,b]}$ stables par KZ. Si σ^+ est un tel réseau, on note $I_M(\sigma^+)$ l'image de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma^+$ dans $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$; c'est un réseau de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ et $\widehat{I_M(\sigma^+)} = \varprojlim I_M(\sigma^+)/\varpi^n$ est un réseau du complété universel $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$.

Proposition 3.1. — $\mathrm{End}_{L[G]}(\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)) = L$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ et comme

$$\mathrm{End}_{L[G]}(\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)) = L$$

d'après le lemme de Schur classique, il suffit de prouver que les vecteurs localement algébriques de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ sont réduits à $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$, et pour cela il suffit de prouver le même résultat pour $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$.

Notons X_n la double classe $KZ\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)KZ$ (cela correspond aux points à distance n du sommet central sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Alors $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \oplus_n \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma_M^{[a,b]}$, et le complété universel de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ est l'ensemble des $x = \sum_{n \geq 0} x_n$, avec $x_n \in \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma_M^{[a,b]}$, et $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (i.e. $x_n \in p^{k_n} \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma^+$, avec $k_n \to +\infty$).

6. On note ind := c-Ind l'induite à support compact.

L'application $x \mapsto R_n(x) = \sum_{i\leq n} x_i$ est K-équivariante et $x = \lim_{n\to\infty} R_n(x)$. Si x est K_r-algébrique, où $K_r = 1 + p^r \mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_p)$, il en est de même de $R_n(x)$ pour tout n. Comme $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ est admissible, les vecteurs K_r-algébriques dans $\oplus_{i\leq n} \mathrm{ind}_{KZ}^{X_i} \sigma_M^{[a,b]}$ ne dépendent pas de $n \geq n(r)$; on en déduit que $R_n(x) = R_{n(r)}(x)$ pour tout $n \geq n(r)$, et donc que $x = R_{n(r)}(x) \in \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$. En résumé, les vecteurs localement algébriques du complété universel de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ sont réduits à $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$.

Le résultat s'en déduit. □

Soit Π un $L[G]$-banach unitaire de longueur finie, contenant $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ comme sous-espace dense. Par propriété universelle de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ l'injection $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \hookrightarrow \Pi$ se prolonge en une application continue $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$. Comme $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ n'est pas admissible, il n'y a aucune raison *a priori*[(7)] pour que l'image soit fermée, mais on a le résultat suivant.

Proposition 3.2. — *L'application* $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ *est surjective, et donc* Π *est un quotient de* $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

Démonstration. — La surjectivité de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est une conséquence du fait que Π est résiduellement de longueur finie **[23, 13]** : on fixe un réseau Π^+ de Π, et on note r la longueur de Π^+/ϖ. Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans Π, on peut trouver $v_1, \dots, v_r \in \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \cap \Pi^+$ dont les images modulo ϖ engendrent Π^+/ϖ. Mais alors le sous-$\mathscr{O}_L[G]$-module W de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ engendré par $v_1, \dots, v_r$ est de type fini, et donc son complété ϖ-adique $\widehat{W}$ peut être choisi comme boule unité de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$. Par construction $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ envoie $\widehat{W}$ dans Π^+ et induit une surjection modulo ϖ. On en déduit, puisque tout est complet pour la topologie ϖ-adique, que $\widehat{W} \to \Pi^+$ est surjective, ce qui permet de conclure. □

4. Représentations de type M

On va associer un certain nombre d'objets à un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module M satisfaisant les hypothèses du chap. 3 (en plus de la représentation $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ déjà introduite).

4.1. Déformations de Rham et vecteurs localement algébriques

Soit V_0 une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, absolument irréductible. Soient $\delta = \det V_0$, et $\mathscr{B}$ le bloc correspondant à la réduction de V_0. Alors V_0 correspond à un point $x \in X := \mathrm{Spec}\, R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]$, et la restriction de $T_{\mathscr{B}}^{\delta}$ à une boule ouverte B

7. Par exemple, si $G = \mathbf{Z}_p$, l'inclusion $\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_p) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p)$ est d'image dense mais n'est pas bijective (et $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p)$ est admissible comme représentation de $\mathbf{Z}_p$, pas $\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_p)$).

de l'espace rigide associé à X, contenant x et suffisamment petite, est la trace [8] d'une représentation $\rho_B : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}(B)^+)$. Alors $\mathscr{O}(B)^+ \cong \mathscr{O}_L[[T_1, T_2, T_3]]$ (mais il ne semble pas y avoir de choix naturel des coordonnées T_1, T_2, T_3).

Les techniques des n$^{\mathrm{os}}$ II.2.4 et II.3.1 de **[9]** fournissent un faisceau G-équivariant $U \mapsto D(\rho_B) \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et une $\mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}]$-représentation $\mathbf{\Pi}(\rho_B)$ de G telle que, pour tout $y \in U$, on ait $\mathbf{\Pi}(\rho_B)_y = \mathbf{\Pi}(\rho_y)$, et qui vit dans une suite exacte [9]

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\rho_B)^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D(\rho_B) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_B) \to 0$$

Si E est un quotient de $\mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}]$, de dimension finie sur L, alors $\rho_E := E \otimes \rho_B$ est une E-représentation de dimension 2, et $\mathbf{\Pi}(\rho_E) := E \otimes \mathbf{\Pi}(\rho_B)$ est une E-représentation de G, vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(\rho_E)) = \rho_E$. En spécialisant la suite exacte ci-dessus et en utilisant les techniques de **[9**, chap. V**]** ou de **[11**, chap. V, VI**]**, on obtient des suites exactes

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\rho_E)^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D(\rho_E) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_E) \to 0$$
$$0 \to (\mathbf{\Pi}(\rho_E)^{\mathrm{an}})^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D_{\mathrm{rig}}(\rho_E) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_E)^{\mathrm{an}} \to 0$$

On peut appliquer ceci, en particulier, aux quotients E de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]/\mathfrak{m}_x^n$, pour $n \in \mathbf{N}$. Les E-représentations $V = \rho_E$ que l'on obtient vérifient $\mathrm{End}_{E[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]} V = E$ et, vues comme L-représentations, n'ont alors que V_0 comme composante de Jordan-Hölder.

Soit V comme ci-dessus (E est donc une algèbre locale de corps résiduel L ; on note $\mathfrak{m}_E$ son idéal maximal).

Théorème 4.1. — $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ *est dense dans* $\mathbf{\Pi}(V)$ *si et seulement si* V *est de Rham à poids de Hodge-Tate non tous égaux.*

Remarque 4.2. — (i) Si $V = V_0$, ce résultat est prouvé dans **[9**, chap. VI**]** (avec des preuves simplifiées dans **[15, 10]**) ; si V est une extension de V_0 par V_0, il est prouvé dans **[16]**.

(ii) Soit Π une L-représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphe à Π_0. Supposons Π_0^{alg} irréductible et dense dans Π_0. Alors une récurrence immédiate (utilisant la densité de $(\Pi/\Pi_0)^{\mathrm{alg}}$ dans Π/Π_0 si Π^{alg} est dense dans Π) sur la longueur de Π montre que Π^{alg} est dense dans Π si et seulement si $\mathrm{lg}(\Pi^{\mathrm{alg}}) = \mathrm{lg}(\Pi)$, et que, si c'est le cas, $\mathrm{lg}(W^{\mathrm{alg}}) = \mathrm{lg}(W)$ pour tout sous-quotient W de Π.

8. D'après **[7**, prop. G**]**, sur l'ouvert d'irréductibilité absolue U de X, on dispose d'une représentation à valeurs dans une algèbre d'Azumaya A sur $\mathscr{O}(U)$. Par ailleurs, d'après **[7**, cor. 2.23**]**, le complété de $\mathscr{O}(U)$ en x, est l'anneau des déformations universelles de V_0 de déterminant fixé. Comme V_0 est absolument irréductible, cet anneau est isomorphe à $L[[T_1, T_2, T_3]]$; en particulier U est lisse en tout point. L'algèbre A se trivialise sur une extension finie étale de $\mathscr{O}(U)$ et, comme U est lisse en x, cette extension étale est triviale sur une petite boule autour de x.

9. $\mathbf{\Pi}(\rho_B)^* := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(B)^+}(\mathbf{\Pi}(\rho_B), \mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}])$

Démonstration. — La preuve du cas $V = V_0$ que l'on trouve dans [**10**] s'étend presque verbatim au cas n quelconque. Nous allons en esquisser les grandes lignes.

Le cas $V = V_0$ permet de supposer que V_0 est de Rham, à poids de Hodge-Tate $k_1 < k_2$. Soient $\Delta := D_{\mathrm{rig}}(V)$ et $\Delta_0 := D_{\mathrm{rig}}(V_0)$. Comme $\mathrm{End}\, V = E$, on a $\mathrm{End}\, \Delta = E$, ce qui permet d'adapter la preuve de [**10**, prop. 2.2] pour obtenir $A_1, A_2 \in E$ vérifiant $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$ (car $\det V = \delta$) et $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)\Delta \subset t\Delta$ (on a donc $A_i = k_i + P_i$ avec $P_i \in \mathfrak{m}_E$, si $i = 1, 2$). La preuve de [**10**, th. 2.15] montre que le module qui permet de décrire (au moins en tant que module sous l'action du borel) les vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$ est $(\Delta_{\mathrm{dif}}^{-})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$; plus précisément, en adaptant cette preuve, on montre que le $L_\infty[t]$-module $(\Delta_{\mathrm{dif}}^{-})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$ est de longueur $(k_2 - k_1)\mathrm{lg}(\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}})$. La preuve de [**10**, prop. 2.7] montre alors que $\mathrm{lg}_{L_\infty[t]}((\Delta_{\mathrm{dif}}^{-})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}})$ est la longueur du quotient par le plus grand sous-$L_\infty[[t]]$-réseau N de $\Delta_{\mathrm{dif}}^{+}$ vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset tN$.

Il existe une base $e_{0,1}, e_{0,2}$ de $\Delta_{0,\mathrm{dif}}^{+}$ vérifiant $\nabla(e_{0,1}) = k_1 e_{0,1}$ et $\nabla e_{0,2} = k_2 e_{0,2}$. Les seuls sous-$L_\infty[[t]]$-modules d'indice fini de $\Delta_{0,\mathrm{dif}}^{+}$ vérifiant $(\nabla - k_1)(\nabla - k_2)N \subset tN$ sont $\Delta_{0,\mathrm{dif}}^{+}$ et le module $N_{0,\mathrm{dif}}$ engendré par $e_{0,2}$ et $t^{k_2-k_1}e_{0,1}$.

On peut relever $e_{0,1}, e_{0,2}$ en une base e_1, e_2 de $\Delta_{\mathrm{dif}}^{+}$ vérifiant $\nabla(e_1) = A_1 e_1$ et $\nabla(e_2) = A_2 e_2 + Bt^{k_2-k_1}e_1$ avec $B \in L_\infty \otimes_L \mathfrak{m}_E$. La représentation V est de Rham si et seulement si $A_1 = k_1$, $A_2 = k_2$ et $B = 0$.

Posons $L_{E,\infty} := L_\infty \otimes E$. Les seuls sous-$L_{E,\infty}[[t]]$-modules d'indice fini de $\Delta_{\mathrm{dif}}^{+}$ vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset (t, \mathfrak{m}_E)N$ sont les $N_{\mathrm{dif}} + \Lambda\Delta_{\mathrm{dif}}^{+}$, où N_{dif} est le module engendré par e_2 et $t^{k_2-k_1}e_1$ et Λ est un idéal de E. Parmi ceux-ci, le seul qui peut fournir des vecteurs localement algébriques de la bonne longueur est N_{dif}, i.e. $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N_{\mathrm{dif}} \subset tN_{\mathrm{dif}}$. Cette dernière condition équivaut à $(\nabla - A_2)t^{k_2-k_1}e_1 \in tN_{\mathrm{dif}}$ et $(\nabla - A_2)e_2 \in tN_{\mathrm{dif}}$.

- La première des deux conditions équivaut à $A_1 - A_2 + k_2 - k_1 = 0$, et comme $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$, cela équivaut à $A_1 = k_1$ et $A_2 = k_2$.
- La seconde équivaut à $B = 0$.

La conjonction des deux conditions équivaut donc à ce que V soit de Rham, ce qui permet de conclure. □

4.2. Déformations infinitésimales de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$

Fixons $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ et soit $L_{\mathscr{L}}$ le corps de définition de $\mathscr{L}$. Choisissons une base e_1, e_2 de M_{dR} sur L, avec $e_1 \notin \mathscr{L}$, de telle sorte que $\mathscr{L}$ soit engendrée par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, avec $L_{\mathscr{L}} = L(z(\mathscr{L}))$.

Si $n \geq 0$, soit $M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, de rang 2 sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, défini par

$$M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M$$

en tant que $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, la filtration $\mathrm{Fil}^{\bullet}_{\mathscr{L},n}$ sur

$$(\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n})^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}}$$

étant définie par

$$\mathrm{Fil}^{i}_{\mathscr{L},n} = \begin{cases} (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}} & \text{si } i \leq -b, \\ (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \cdot (e_2 + (z(\mathscr{L}) + T)e_1) & \text{si } -b+1 \leq i \leq -a, \\ 0 & \text{si } i \geq -a+1. \end{cases}$$

Notons que le sous-module $T^k M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ est isomorphe à $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n-k}$ comme $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré (sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$ et donc a fortiori sur L).

Lemme 4.3. — *Si $n \geq 1$, alors :*

(i) *$M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$, vu comme $L_{\mathscr{L}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, est faiblement admissible.*

(ii) *Les seuls sous-$L_{\mathscr{L}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules filtrés faiblement admissibles de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ sont les $T^k M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$, pour $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer L par $L_{\mathscr{L}}$, et e_2 par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, on peut supposer que $\mathscr{L}$ est définie sur L et que $z(\mathscr{L}) = 0$.

Les seuls sous-L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ sont les $\Lambda \otimes_L M$, où Λ est un sous-L-module de $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$. Comme la filtration n'a que deux crans, le (i) équivaut à ce que

$$\dim_L \big((\Lambda \otimes_L M_{\mathrm{dR}}) \cap \mathrm{Fil}^{-a}_{\mathscr{L},n}\big) \leq \dim_L \Lambda$$

pour tout Λ, et le (ii) à ce que les seuls Λ pour lesquels il y a égalité sont les $T^k(L[T]/T^{n+1-k})$. Comme $\mathrm{Fil}^{-a}_{\mathscr{L},n}$ est l'ensemble des $Pe_2 + TPe_1$, l'intersection ci-dessus est l'ensemble des $Pe_2 + TPe_1$ avec $P \in \Lambda$ et $TP \in \Lambda$. L'inégalité dans le (i) est donc une évidence et, s'il y a égalité, c'est que Λ est stable par $P \mapsto TP$, et donc est un idéal de $L[T]/T^{n+1-k}$, et donc de la forme $T^k(L[T]/T^{n+1-k})$, ce qui permet de conclure. □

Le (i) du lemme 4.3 fournit une représentation

$$V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n} := \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n})$$

C'est une déformation à $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$ de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, qui est de Rham, dont la réduction modulo T^2 est non scindée (car la filtration n'est pas définie sur $L_{\mathscr{L}}$ modulo T^2), et dont, d'après le (ii) du lemme 4.3, les seuls sous-objets sont les $T^k V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ (isomorphe à $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n-k}$), pour $0 \leq k \leq n$.

Remarque 4.4. — (i) En adaptant les méthodes de [**8**, § 5.1], on peut construire une déformation de Rham de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans un voisinage p-adique, et pas juste dans un voisinage formel.

(ii) Le th. 5.4 et le lemme 5.3 ci-dessous donnent une construction d'une déformation au-dessus de tout l'espace des représentations de Rham de type (M, a, b).

Soit $\mathscr{B}$ le bloc correspondant à la réduction de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$. Alors $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ définit un point de Spec $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]$; notons $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ le complété de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]$ en l'idéal maximal correspondant à ce point (isomorphe à $L_{\mathscr{L}}[[T_1, T_2, T_3]]$), et $\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}$ son idéal maximal. On dispose d'une représentation $\widehat{\rho}_{\mathscr{L}} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\widehat{R}_{\mathscr{L}})$ universelle pour les déformations de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ aux $L_{\mathscr{L}}$-algèbres locales finies sur $L_{\mathscr{L}}$ de corps résiduel $L_{\mathscr{L}}$: si E est une telle algèbre et si $\rho_E : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour représentation résiduelle $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$, alors il existe $\lambda : \widehat{R}_{\mathscr{L}} \to E$ tel que $\rho_E \cong E \otimes \widehat{\rho}_{\mathscr{L}}$. De plus, $\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}^2$ est isomorphe au groupe des extensions de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ par $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ de déterminant δ (une telle extension est naturellement une $(L_{\mathscr{L}}[T]/T^2)$-représentation de dimension 2 et son déterminant est, a priori, à valeurs dans $L_{\mathscr{L}}[T]/T^2$).

On note $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ le quotient de $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ classifiant les représentations de Rham : on a $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} = \widehat{R}_{\mathscr{L}}/I$, où $I = \cap\,\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux de $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ tels que $\widehat{R}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{a}$ soit de dimension finie sur $L_{\mathscr{L}}$ (ce qui équivaut à $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}_{\mathscr{L}}^n$, pour $n \gg 0$), et $(\widehat{R}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{a}) \otimes \widehat{\rho}_{\mathscr{L}}$ soit de Rham>

Proposition 4.5. — *$\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} \cong L_{\mathscr{L}}[[T]]$.*

Démonstration. — Comme $V_{M,\mathscr{L},2}^{[a,b]}$ est, à isomorphisme près, l'unique extension non triviale de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ par $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$, de déterminant δ, qui est de Rham, il s'ensuit que $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ est un anneau local régulier de dimension 1, et donc est un quotient de $L_{\mathscr{L}}[[T]]$. Par ailleurs, l'existence de $V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$, pour tout n, fournit une suite compatible de morphismes $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} \to L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, pour $n \in \mathbf{N}$. Le fait que $V_{M,\mathscr{L},2}^{[a,b]}$ soit non scindée implique que cette flèche est surjective pour $n = 2$, et donc aussi pour tout n. Il s'ensuit que $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ admet pour quotient $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, pour tout n. On en déduit le résultat. □

Remarque 4.6. — On déduit de la prop. 4.5 que $V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ est, à isomorphisme près, l'unique déformation de Rham de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ à $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, dont le quotient par T^2 soit non scindé.

4.3. Déformations infinitésimales de $\Pi_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$

En appliquant les constructions du § 4.1 à $V = V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$, on construit une représentation

$$\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]} := \mathbf{\Pi}(V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})$$

Remarque 4.7. — (i) Il résulte du th. 4.1 que $(\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ et on déduit du (ii) de la rem. 4.2 que

$$(\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})^{\mathrm{alg}} \cong (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$$

(ii) En fait, si $\lambda \in (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1})$ est inversible, alors $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est déjà dense dans $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ car les seuls sous-objets stricts de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ sont les $T^k\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ (cela se voit en appliquant le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et en utilisant le fait que les seuls sous-objets stricts de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ sont les $T^k V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$, cf. lemme 4.3 et définition de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$), et $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ n'est inclus dans aucun. Il résulte donc de la prop. 3.2 que $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est un quotient de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

Proposition 4.8. — *Si* Π *est une représentation unitaire de* G *munie d'un morphisme* $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ *d'image dense, et si les composantes de Jordan-Hölder de* Π *sont* $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ *avec multiplicité* n*, alors* $\Pi \cong \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$.

Démonstration. — D'après [**26**, cor. 6.16], la catégorie des représentations unitaires de longueur finie, dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ est équivalence à la catégorie des $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$-modules. On peut décrire le foncteur réalisant cette équivalence par la théorie de Gabriel [**19**]. Soit $J_{\mathscr{L}}$ l'enveloppe injective de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans la catégorie des limites inductives de représentations unitaires de G. Alors $\mathrm{End}\, J_{\mathscr{L}} = \widehat{R}_{\mathscr{L}}$ d'après [**26**, cor. 6.16] et comme le bloc de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans la catégorie des représentations unitaires de G n'a qu'un élément, on a

$$\Pi \cong (\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*) \otimes_{\widehat{R}_{\mathscr{L}}} J^*_{\mathscr{L}})^*$$

L'hypothèse selon laquelle $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est d'image dense implique a fortiori que Π^{alg} est dense dans Π. Il en résulte, d'après le th. 4.1 et la définition de $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$, que $\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*)$ est en fait un $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$-module. La prop. 4.5 implique alors que

$$\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*) \cong \oplus_i L_{\mathscr{L}}[[T]]/T^{n_i} \quad \text{et} \quad \Pi \cong \oplus_{i\in I} \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n_i}$$

où I est un ensemble fini. On conclut en remarquant que l'hypothèse selon laquelle $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est d'image dense implique que I n'a qu'un seul élément : en effet, cette hypothèse permet de déduire que $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}})$ est de dimension au plus 1, mais d'autre part cet espace est de dimension au moins $|I|$. $\square$

5. Complétion $\mathscr{B}$-adique et anneaux de Kisin

5.1. Les $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$-modules $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

Notons $I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$ le complété $\mathscr{B}$-adique de $I_M(\sigma^+)$ (cf. § 3). On définit alors le complété $\mathscr{B}$-adique de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ par :

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) := L \otimes_{\mathscr{O}_L} I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$$

(le résultat ne dépend pas du choix de σ^+). Posons

$$\delta = \delta^{[a,b]}_M, \quad I^+ := I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$$

Alors I^+ est une limite projective d'objets Π_i de $\mathrm{Tors}^{\delta}_{\mathscr{B}}\, G$. On a donc une action de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ sur I^+ et sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$. Par fonctorialité, cela fournit une action de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ sur $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$. Cette action coïncide avec l'action naturelle de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$, via l'isomorphisme du th. 1.7.

On note $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ le quotient à travers lequel $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ agit sur I^+ (notons que $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ est sans p-torsion puisque I^+ l'est, cf. cor. 2.11), et on pose

$$R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} := R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}[\tfrac{1}{p}]$$

Remarque 5.1. — On verra plus loin que $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert strict $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$ de la droite projective analytique $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$, et donc est très loin d'être réduit à L. Or $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ agit fidèlement sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$, ce qui contraste avec le fait que $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) = L$ (prop. 3.1).

On peut envisager les choses de la manière suivante (et il est probable que la théorie de Dotto-Emerton-Gee **[17]** rende cette vision correcte). Tous les objets ci-dessus « vivent sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ », i.e. $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ est un faisceau sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ est le localisé-complété de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ en l'ouvert $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$. Alors $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ est un fibré en droites sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$, qui est trivial ce qui explique que $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) = L$ (sections globales constantes).

Posons

$$\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} := \mathbf{V}(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M))$$

Alors $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ agit, par fonctorialité de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$, sur $\mathbf{V}(I^+)$ et $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ agit sur $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.

Lemme 5.2. — *$\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est de type fini sur $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — $I_M(\sigma^+)$ est un facteur direct de $I(\sigma^+)$ et donc I^+ est un facteur direct de $I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$. Il suffit donc de prouver que $\mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$. On a $k_L \otimes \mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}) = \mathbf{V}(k_L \otimes I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}) = \mathbf{V}(I(k_L \otimes \sigma^+)_{\mathscr{B}})$ (les morphismes de transitions entre les objets entrant dans la définition des complétés $\mathscr{B}$-adiques sont surjectifs, et donc les $\mathrm{R}^1 \lim$ s'annulent). Maintenant $k_L \otimes \sigma^+$ est une extension successive finie d'induites compactes $I(W)$, où les W sont de la forme $W_{r,\chi}$, et le cor. 2.8 implique que $k_L \otimes \mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$. Il en est donc de même de $\mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$. □

5.2. Spécialisation en un point de $\mathrm{Spec}\, R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

On note $U_{M,\mathscr{B}}$ l'ensemble des $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ tels que $\Pi_{M,\mathscr{L}} \in \mathrm{Ban}^{\delta}_{\mathscr{B}}\, G$; c'est aussi l'ensemble des $\mathscr{L}$ tels que $V_{M,\mathscr{L}}$ ait pour réduction $\rho_{\mathscr{B}}$. Comme nous le verrons, $U_{M,\mathscr{B}}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$ de la droite projective $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$. Soient

$$X = \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}[\tfrac{1}{p}], \quad X_M = \mathrm{Spec}\, R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$$

On note aussi X^{an} et X_M^{an} les espaces analytiques associés à X et X_M : X^{an} est de dimension 3 et, comme nous le verrons, X_M^{an} est de dimension 1 (isomorphe à l'ouvert $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$).

On note $\mathrm{Ban}^\delta G$ la catégorie des $L[G]$-banachs unitaires de caractère central δ, de longueur finie. On note $\mathrm{Ban}^\delta_{\mathscr{B}} G$ la sous-catégorie de $\mathrm{Ban}^\delta G$ des Π dont la réduction est un objet de $\mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}$. D'après Paškūnas **[23]**, tout objet Π de $\mathrm{Ban}^\delta_{\mathscr{B}} G$ a une décomposition $\Pi = \oplus_x \Pi_x$, où la somme porte sur $x \in X$ fermé, $\Pi_x = 0$ sauf pour un nombre fini de x et toutes les composantes de Jordan-Hölder de Π_x sont élément du bloc $\mathscr{B}_x$ de $\mathrm{Ban}^\delta G$ correspondant à x (si le pseudo-caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ correspondant à x est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\mathscr{B}_x$ a un unique élément, si ce pseudo-caractère est $\chi_1 \oplus \chi_2$, ce bloc est constitué des composantes de Jordan-Hölder des induites continues de $\chi_1 \otimes \chi_2 \varepsilon^{-1}$ et $\chi_2 \otimes \chi_1 \varepsilon^{-1}$ – ces représentations sont toutes les deux irréductibles sauf si $\chi_2 = \chi_1 \varepsilon^{\pm 1}$).

Si $x \in X_M$, notons $\mathfrak{m}_x$, l'idéal maximal de $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ qui lui est associé, et L_x le corps résiduel $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x$.

Lemme 5.3. — (i) *Si $x \in X_M$, il existe $\mathscr{L}(x) \in U_{M,\mathscr{B}}$ tel que*

$$L_x \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \cong \Pi_{M,\mathscr{L}(x)}, \quad L_x \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \cong V_{M,\mathscr{L}(x)}$$

(ii) *Plus généralement, si $n \geq 0$, alors*

$$(R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \cong \Pi_{M,\mathscr{L}(x),n}, \quad (R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \cong V_{M,\mathscr{L}(x),n}$$

(iii) *$x \mapsto \mathscr{L}(x)$ est une bijection de X_M sur $U_{M,\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — Par construction, $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans $\Pi_x = L_x \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$. Donc le bloc de $\mathrm{Ban}^\delta_{\mathscr{B}} G$ correspondant à x contient un unique $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $\mathscr{L}(x) \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(L_x)$. Comme $V_{M,\mathscr{L}(x)}$ est irréductible, ce bloc est réduit à $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$, et on peut déduire les (i) et (ii) de la prop. 4.8.

Enfin, le (iii) est une conséquence de ce qui précède et de ce que $\mathscr{L} \mapsto V_{M,\mathscr{L}}$ est injective. □

5.3. La propriété universelle de $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

Théorème 5.4. — (i) *$\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est localement libre sur X_M, de rang 2.*

(ii) *X_M est lisse, réduit, purement de dimension 1.*

Démonstration. — Posons, pour simplifier, $R := R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$, $\rho := \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$. Alors R agit fidèlement sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et donc aussi sur ρ car $\mathbf{V}$ ne tue que les représentations de dimension finie, et aucun des blocs qui apparaissent n'en contient.

Notons $\widehat{\rho}_x$ le complété du localisé de ρ en x. Comme ρ est de type fini sur R, on a une injection R-linéaire $\rho \hookrightarrow \prod_x \widehat{\rho}_x$, et comme R agit fidèlement sur ρ, il agit fidèlement sur $\prod_x \widehat{\rho}_x$. Il résulte du (ii) du lemme 5.3 que $\widehat{\rho}_x$ est libre de rang 2 sur $L_x[[T_x]]$ (car

$V_{M,\mathscr{L}(x),n}$ est libre de rang 2 sur $L_x[T_x]/T_x^{n+1})$, et comme ρ_x est irréductible, on a $\mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\widehat{\rho}_x) \cong L_x[[T_x]]$. On en déduit une injection d'anneaux $R \hookrightarrow \prod_x L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que R est réduit.

Comme ρ_x est de rang 2, pour tout x (lemme 5.3 (i)), et que ρ est de type fini sur R, cela implique que ρ est localement libre, de rang 2, sur X_M. On en déduit, en utilisant ce qui précède, que le complété $\widehat{R}_x$ de l'anneau local de X_M en x est $L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que X_M est lisse, purement de dimension 1. □

Il résulte de [**4**, § 5.3] que l'application $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ ci-dessus est la restriction aux points classiques d'une application analytique $X_M^{\mathrm{an}} \to \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$. L'ensemble $U_{M,\mathscr{B}}$ ci-dessus est donc l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$, et $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ identifie X_M^{an} à $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ et $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$. Comme $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un quotient de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$ qui est de type fini, $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et comme un ouvert analytique connexe de $\mathbf{P}^1$ est un disque ouvert privé d'un nombre fini de disques fermés, on en déduit les résultats suivants.

Corollaire 5.5. — (i) $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ *est un produit fini d'anneaux principaux.*

(ii) $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ *est libre sur* $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$*, de rang* 2.

Corollaire 5.6. — $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} = \mathrm{End}_G\,\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$.

Démonstration. — L'inclusion $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} \subset \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$ est immédiate ; montrons l'inclusion dans l'autre sens. Soit donc $\alpha \in \mathrm{End}_G\,\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$. Alors α commute à l'action de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ puisque puisque $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un quotient de $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$ qui est le centre de la catégorie. Donc $\mathbf{V}(\alpha) \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ commute aussi à l'action de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ et puisque $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$-module libre de rang 2, et toutes les spécialisations de $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ sont irréductibles, on en déduit que $\mathbf{V}(\alpha) \in \mathrm{M}_2(R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]})$ et que l'image de $\mathbf{V}(\alpha)$ mod $\mathfrak{m}_x$ est une homothétie pour tout $x \in X_M$. Donc $\mathbf{V}(\alpha)$ est une homothétie, i.e. $\mathbf{V}(\alpha) \in R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$.

On peut donc voir $\alpha - \mathbf{V}(\alpha)$ comme un élément de $\mathrm{End}_G\,\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$, et on a $\mathbf{V}(\alpha - \mathbf{V}(\alpha)) = 0$, et donc $\alpha - \mathbf{V}(\alpha) = 0$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 5.7. — *Si E est un quotient de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ de degré fini sur L, alors $E \otimes \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de réduction*[10] $\rho_{\mathscr{B}}^{\oplus[L:E]}$*, potentiellement semi-stable à poids a et b, dont le D_{pst} est $E \otimes M$.*

Démonstration. — Cela résulte du (ii) du lemme 5.3 et du théorème des restes chinois. □

10. Par définition, c'est la semi-simplifiée de $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Lambda$ (vue comme k_L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), où Λ est n'importe quel $\mathscr{O}_L$-réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Réciproquement, on a le résultat suivant qui montre que $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est universelle pour ces propriétés.

Théorème 5.8. — *Si E est une L-algèbre commutative de dimension d, et si $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour réduction $\rho_{\mathscr{B}}^{\oplus d}$, est potentiellement semi-stable à poids a et b, et si $D_{\mathrm{pst}}(\rho) = E \otimes M$, alors il existe un morphisme $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \to E$ tel que $\rho = E \otimes \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — Si E est un corps, alors ρ est de la forme $E \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $x \in U_{M,\mathscr{B}}$, et comme $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)} = L_x \otimes \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$, on obtient le résultat dans ce cas.

Si $E = E_0[I]/T^k$, où E_0 est un corps, alors $\rho_i := (T^i E/T^{i+1}E) \otimes_E \rho$ est de la forme $E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $x \in U_{M,\mathscr{B}}$ indépendant de i. L'extension

$$0 \to \rho_i \to (T^{i-1}E/T^{i+1}E) \otimes_E \rho \to \rho_{i-1} \to 0$$

de $E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$ par elle-même est indépendante de i car la multiplication par T sur ρ induit un isomorphisme permettant de passer de i à $i+1$. Comme le groupe des extensions de Rham est de dimension 1, il y a deux cas possibles :

– toutes ces extensions sont triviales et $\rho = E \otimes_{E_0} \rho_0$, et on conclut comme ci-dessus.

– ces extensions sont non triviales et $\rho = E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$, et on déduit le résultat dans ce cas de ce que $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k} = (R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^k) \otimes \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.

Si E est un quotient de $E_0[T_1, \ldots, T_r]/(T_1, \ldots, T_r)^k$, en raisonnant comme ci-dessus et en utilisant de nouveau que le groupe des extensions de Rham est de dimension 1, on prouve que $\rho = E \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$ ou bien $\rho = E \otimes_{E'} \rho'$, avec E' quotient de E de la forme $E_0[I]/T^k$ et $\rho' \cong E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$.

Le cas général s'en déduit en décomposant E comme un produit d'algèbres quotients de $E_0[T_1, \ldots, T_r]/(T_1, \ldots, T_r)^k$. □

5.4. Applications à la conjecture de Breuil-Mézard

Dans l'énoncé géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard [**6, 18**], au lieu de fixer le D_{pst}, on fixe seulement la restriction à l'inertie et le déterminant, ce qui fournit a priori deux D_{pst} possibles puisqu'on peut tordre par le caractère non ramifié μ_{-1} d'ordre 2 (rien n'empêche que ces deux D_{pst} soient, en fait, isomorphes). Le résultat est, qu'au lieu de considérer le sous-objet $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ (cf. § 3), on considère à la place $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ en entier.

On pose donc

$$\begin{aligned} M' &= M & &\text{ou} & M' &= M \oplus (M \otimes \mu_{-1}) \\ \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') &= \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) & &\text{ou} & \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') &= \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \oplus (\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \otimes \mu_{-1}) \\ R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} & &\text{ou} & R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \times R^{[a,b]}_{M\otimes\mu_{-1},\mathscr{B}} \\ \rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} & &\text{ou} & \rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \oplus \rho^{[a,b]}_{M\otimes\mu_{-1},\mathscr{B}} \end{aligned}$$

suivant que $M = M \otimes \mu_{-1}$ ou que $M \neq M \otimes \mu_{-1}$.

Si σ est une k_L-représentation irréductible de K, on note $m_M^{[a,b]}(\sigma)$ la multiplicité de σ dans la réduction de $\sigma_M^{[a,b]}$. L'énoncé suivant est une forme de la version géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard.

Proposition 5.9. — *Les réductions de* $\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M')$ *et* $\rho_{M',\mathscr{B}}^{[a,b]}$ *se décomposent sous la forme*

$$\overline{\mathrm{LL}}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M') = \oplus_\sigma m_M^{[a,b]}(\sigma) I(\sigma)_{\mathscr{B}}$$
$$\overline{\rho}_{M',\mathscr{B}}^{[a,b]} = \oplus_\sigma m_M^{[a,b]}(\sigma) \mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$$

Démonstration. — Le premier énoncé est une conséquence du cor. 2.3. Le second s'en déduit via la fonctorialité de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$. □

Remarque 5.10. — Si $\mathscr{B}$ n'est pas un bloc supersingulier, $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$ est de rang 1 sur un quotient de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$, mais ce dernier agit par un pseudo-caractère de dimension 2 (cf. th. 1.7), pas de dimension 1.

La conjecture de Breuil-Mézard (version [11] géométrique [**18**]) postule une décomposition analogue pour les supports des objets ci-dessus, vus comme faisceaux sur Spec $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$.

On note $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}$ le quotient à travers lequel $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$ agit sur $I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ (cet anneau dépend a priori de σ, mais nous ne l'indiquons pas sur la notation). Alors $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}$ s'injecte dans $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b]}$ et on a $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b]} = R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}[\frac{1}{\varpi}]$. Comme $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est de dimension 1 puisque c'est un produit d'anneaux principaux, on en déduit que $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}$ est un anneau local (comme quotient de $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$ qui est un anneau local), de dimension 2 et $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}/\varpi$ est de dimension 1.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}/\varpi$. Notons encore $\mathfrak{p}$ l'image inverse de $\mathfrak{p}$ dans $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$; c'est un idéal premier de $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$ et $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}/\mathfrak{p}$ est de dimension 1. La conjecture de Breuil-Mézard postule une formule pour la longueur du localisé $(R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}/\varpi)_{\mathfrak{p}}$ comme $(Z_{\mathscr{B}}^{\delta})_{\mathfrak{p}}$-module (on note $\ell_{\mathfrak{p}}(M)$ la longueur d'un $(Z_{\mathscr{B}}^{\delta})_{\mathfrak{p}}$-module). On la déduit du résultat suivant (le membre de gauche se calcule en utilisant la prop. 5.9) :

Proposition 5.11. — *Si* $\mathfrak{p}$ *est comme ci-dessus,*

$$\ell_{\mathfrak{p}}(\overline{\rho}_{M',\mathscr{B}}^{[a,b]}) = 2\ell_{\mathfrak{p}}((R_{M',\mathscr{B}}^{[a,b],+}/\varpi)_{\mathfrak{p}})$$

11. Il semble y avoir une certaine latitude dans l'énoncé de la conjecture : par exemple, on peut prendre des anneaux de déformations de représentations galoisiennes, ou de représentations encadrées ; la version que nous obtenons utilise des anneaux de déformations de pseudo-caractères – le th. 1.7 identifie $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$ à un tel anneau.

Démonstration. — Les longueurs ne changent pas par complétion. Notons donc Z le complété de $(Z^{\delta}_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique, R celui de $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$, et V celui de $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$.

Alors R/ϖ est un corps local de dimension 1 – c'est le corps des fractions de $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)/\mathfrak{p}$ – et donc R est un anneau de valuation discrete dont $R[\frac{1}{\varpi}]$ est le corps des fractions. Comme $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$ est sans ϖ-torsion puisque $I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ l'est (cor. 2.11), on en déduit que V est un module libre sur R, de rang 2 puisque $\rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ est libre de rang 2 sur $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$. Il s'ensuit que V/ϖ est libre de rang 2 sur R/ϖ ; d'où le résultat. □

Références

[1] L. Barthel, R. Livné, Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

[2] L. Barthel, R. Livné, Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory **55** (1995), 1–27.

[3] L. Berger, Central characters for smooth irreducible modular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **128** (2012), 1–6.

[4] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique. Astérisque **319** (2008), 303–337.

[5] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compos. Math. **138** (2003), 165–188.

[6] C. Breuil, A. Mézard, Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $\ell = p$, avec un appendice par G. Henniart, Duke Math. J. **115** (2002), 205–310.

[7] G. Chenevier, The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings, *Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011, Automorphic forms and Galois representations, vol. 1*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **414** (2014), 221–285.

[8] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

[9] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[10] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. EMS **21** (2019) 797–838.

[11] P. Colmez, G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra & Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[12] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld, preprint 2022.

[13] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.

[14] P. Colmez, J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

[15] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[16] G. Dospinescu, Extensions de Représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques, Compos. Math. **151** (2015), 1462–1498.

[17] A. Dotto, M. Emerton, T. Gee, en préparation.

[18] M. Emerton, T. Gee, A geometric perspective on the Breuil-Mézard conjecture, J. Inst. Math. Jussieu **13** (2014), 183–223.

[19] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. SMF **90** (1962), 323–448.

[20] Y. Hu, F. Tan, The Breuil-Mézard conjecture for non-scalar split residual representations, Ann. ENS **48** (2015), 1383–1421.

[21] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings. J. AMS **21** (2008), 513–546.

[22] M. Kisin, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, J. AMS **22** (2009), 641–690.

[23] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor. Publ. IHES **118** (2013), 1–191.

[24] V. Paškūnas, Blocks for mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. *Automorphic forms and Galois representations.* Vol. 2, 231–247, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 415, Cambridge Univ. Press, 2014.

[25] V. Paškūnas, On the Breuil-Mézard conjecture. Duke Math. J. **164** (2015), 297–359.

[26] V. Paškūnas, S.-N. Tung, Finiteness properties of the category of mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. arXiv :2104.08948 [math.RT].

[27] S. Rozensztajn, On the locus of 2-dimensional crystalline representations with a given reduction modulo p, Algebra & Number Theory **14** (2020) 643–700.

[28] P. Scholze, On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Ann. ENS **51** (2018), 811–863.

[29] C. Wang-Erickson, Algebraic families of Galois representations and potentially semistable pseudodeformation rings, Math. Ann. **371** (2018), 1615–1681.

---

23 avril 2022

Pierre Colmez, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : `pierre.colmez@imj-prg.fr`

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* `gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr`

Wiesława Nizioł, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : `wieslawa.niziol@imj-prg.fr`