# TD 5-Lissité

Dans la suite $k$ sera un corps algébriquement clos.

## 0.1 Complément au cours

Soit $F \in k[X, Y]$ un polynôme non constant et $P \in V(F)$. Montrer que si $\left(\frac{\partial F}{\partial X}(P), \frac{\partial F}{\partial Y}(P)\right) \neq (0, 0)$, alors $P$ est un point lisse de $V(F)$ et la tangente en $P$ à $V(F)$ est donnée par l'équation usuelle.

## 0.2 Exemples explicites

Pour chacune des courbes suivantes, décrire le lieu singulier et donner, pour chaque point singulier, la multiplicité et les tangentes au point en question :

$$x^2y + xy^2 = x^4, \quad x^2y + xy^2 = x^4 + y^4, \quad x^6 + y^6 = xy, \quad (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0.$$

## 0.3 Finitude du lieu singulier

a) Soient $f, g \in k[X, Y]$ premiers entre eux et sans facteurs carrés. Montrer qu'un point $P$ de $V(fg)$ est singulier si et seulement si $P$ est un point singulier d'une des courbes $V(f)$, $V(g)$ **ou** $P \in V(f) \cap V(g)$.

b) Montrer que si $P$ est un point d'une courbe plane $C$ qui se trouve sur au moins deux composantes irréductibles de $C$, alors $P$ est un point singulier de $C$.

c) Montrer qu'une courbe affine plane n'a qu'un nombre fini de points singuliers.

## 0.4 Coniques

On suppose que $\mathrm{car}(k) \neq 2$.

a) Montrer qu'une conique irréductible est lisse.

b) Montrer que si $C$ est une conique affine irréductible, alors par un point situé hors de $C$ passent en général exactement deux tangentes de $C$.

## 0.5 Points doubles ordinaires

Soit $C$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ et soit $P$ un point singulier sur $C$. On suppose que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Montrer que $P$ est un point double avec des tangentes distinctes si et seulement si

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)\right)^2 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(P) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(P).$$

## 0.6 Désingularisation d'une courbe

On considère la courbe $C = V(Y^2 - X^3 + X^4)$ et on note $f = \frac{y}{x} \in k(C)$.

a) Montrer que $f^2 = x - x^2$ et en déduire que $k[x, f]$ est entier sur $k[C]$.

b) Montrer que $k[x, f]$ est intégralement clos, et que c'est la clôture intégrale de $k[C]$ dans $k(C)$.

c) Trouver une désingularisation de $C$.

## 0.7 Un anneau normal non factoriel

On suppose dans cet exercice que $k$ n'est pas de caractéristique 2 et on considère la cubique $C = V(Y^2 - X^3 + X)$.

a) Montrer que $C$ est irréductible et que tout $f \in k[C]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = P(x) + Q(x)y$ avec $P, Q \in k[X]$ ($x, y \in k[C]$ étant les images de $X$ et $Y$).

b) Montrer que $\sigma(x, y) = (x, -y)$ définit un automorphisme de $C$ et décrire les éléments de $k[C]$ fixés par $\sigma^*$.

c) En utilisant l'application $N : k[C] \to k[C]$ qui à $f$ associe $f \cdot \sigma^*(f)$, montrer que $k[C]^* = k^*$.

d) Montrer que $x$ et $y$ sont irréductibles et non associés dans $k[C]$ (utiliser l'application $N$ de la question c)).

e) Trouver le lieu singulier de $C$.

f) Montrer que $k[C]$ est intégralement clos, non factoriel, et que l'idéal maximal $(x, y)$ correspondant au point lisse $(0, 0)$ de $C$ n'est pas principal.

## 0.8 Lissité d'un arc paramétré

Soit $f : \mathbf{A}^1 \to C$ un morphisme surjectif, avec $C$ une courbe plane. Soit $x \in C$.

a) On suppose qu'il existe $t_1 \neq t_2 \in f^{-1}(x)$ tels que $df_{t_1}(1)$ et $df_{t_2}(1)$ soient linéairement indépendants sur $k$. Montrer que $x$ est un point singulier de $C$.

b) On suppose que la fibre $f^{-1}(x)$ a un unique point $t$, tel que $df_t(1) \neq (0, 0)$. Montrer que $x$ est un point lisse de $C$.

## 0.9 Bitangentes

On suppose que $k$ n'est pas de caractéristique 2 et on se donne $P \in k[X]$ non constant et qui n'est pas le carré d'un polynôme. On note $C$ la courbe affine $V(Y^2 - P(X))$.

a) Montrer que $C$ est irréductible.

b) Montrer que $C$ est lisse si et seulement si $k[X, Y]/(Y^2 - P(X))$ est intégralement clos, si et seulement si $P$ est sans racines multiples.

c) On prend $P = X^4 + 1$.

i) Trouver les droites passant par $(0, 0)$ et tangentes à $C$.

ii) Trouver les bitangentes de $C$, i.e. les droites tangentes en deux points distincts.

## 0.10 L'espace tangent en général

Soit $X$ un fermé algébrique et $x \in X$. Un vecteur tangent en $x$ est une forme linéaire $d$ sur $k[X]$ telle que

$$d(fg) = f(x)d(g) + g(x)d(f)$$

pour tous $f, g \in k[X]$. On note $T_x(X)$ l'ensemble des vecteurs tangents en $x$.

a) Montrer que

$$T_x(\mathbf{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} k \cdot \frac{\partial}{\partial X_i}(x),$$

où $\frac{\partial}{\partial X_i}(x)$ est l'application $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)$. En déduire que si $X \subset \mathbf{A}^n$, alors

$$T_x(X) \simeq \{a = (a_1, ..., a_n) \in k^n | \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0, \quad \forall f \in I(X)\}.$$

b) En déduire que si $X \subset \mathbf{A}^n$ est un fermé et si $I(X) = (f_1, ..., f_s)$, alors pour tout $x \in X$

$$\dim T_x(X) = n - \mathrm{rgJac}(f_1, ..., f_s)(x),$$

où $\mathrm{Jac}(f_1, ..., f_s)(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}$ est la matrice jacobienne en $x$.

c) Montrer que si $d \in T_x(X)$, alors $d$ induit une forme linéaire sur $m_x/m_x^2$, où $m_x \subset k[X]$ est l'idéal maximal associé à $x$. En déduire un isomorphisme canonique entre $T_x(X)$ et le dual du $k$-espace vectoriel $m_x/m_x^2$.

d) Soit $m_{X,x} = m_x O_{X,x}$ l'idéal maximal de $O_{X,x}$. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique $m_x/m_x^2 \simeq m_{X,x}/m_{X,x}^2$, et donc que $T_x(X)$ ne dépend que de l'anneau local de $X$ en $x$.

e) Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme de fermés algébriques. Montrer que $d \to d \circ \varphi^*$ induit une application $k$-linéaire $d\varphi_x : T_x(X) \to T_{\varphi(x)}(Y)$. Vérifier que cette application est la transposée de l'application naturelle $m_{\varphi(x)}/m_{\varphi(x)}^2 \to m_x/m_x^2$ induite par $\varphi$, si on identifie $T_x(X)$ (resp. $T_{\varphi(x)}(Y)$) avec le dual de $m_x/m_x^2$ (resp. $m_{\varphi(x)}/m_{\varphi(x)}^2$). Vérifier la formule usuelle $d(\psi \circ \varphi)_x = d\psi_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x$.

f) Montrer que si $Y$ est un fermé de $X$, alors $T_y(Y)$ est un sous-espace de $T_y(X)$ pour $y \in Y$. Montrer que si $f : X \to Y$ est un isomorphisme, alors $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ est un isomorphisme pour tout $x \in X$.

g) On considère la courbe $C = \{(t^n, t^{n+1}, ..., t^{2n-1}) | t \in k\}$, avec $n \geq 1$. On admet qu'il s'agit d'un fermé algébrique de $\mathbf{A}^n$. Calculer $T_x(C)$ pour $x = (0, ..., 0)$. En déduire que $C$ n'est isomorphe à aucun fermé algébrique de $\mathbf{A}^m$, avec $m < n$.

h) Vérifier que $T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_x(X) \oplus T_y(Y)$.

### 0.11 Lissité en général

Soit $X$ un fermé algébrique et $x \in X$. On note $\dim_x(X)$ le maximum des dimensions des composantes irréductibles de $X$ passant par $x$.

I. Nous allons montrer que $\dim_k T_x(X) \geq \dim_x(X)$ pour tout $x \in X$.

a) Expliquer pourquoi on peut supposer que $X$ est irréductible, ce que l'on fera dans la suite.

b) Soient $f_1, ..., f_r \in m_x$ tels que leurs images dans $m_x/m_x^2$ forment une $k$-base de $m_x/m_x^2$ (donc $r = \dim T_x(X)$). Soit $Y = \{x \in X, f_1(x) = ... = f_r(x) = 0\}$ et soit $C$ une composante irréductible de $Y$ contenant $x$.

i) Soit $m = \{f \in k[C], f(x) = 0\}$. Montrer que $m = m^2$.

ii) En déduire que $C = \{x\}$ et conclure en utilisant le Hauptidealsatz de Krull (voir la feuille de TD 3).

II. On dit que $x \in X$ est lisse si $\dim_k T_x(X) = \dim_x(X)$. Dans la suite $X$ est un fermé irréductible de dimension $d$ de $\mathbf{A}^n$,

a) Supposons que $I(X) = (f_1, ..., f_s)$. Montrer que $x \in X$ est lisse si et seulement si

$$\mathrm{rgJac}(f_1, ..., f_s)(x) = n - d.$$

En déduire que l'ensemble $X^{\mathrm{sing}}$ des points singuliers (i.e. non lisses) de $X$ est un fermé algébrique de $X$.

b) Supposons que $X = V(f_1, ..., f_s) \in \mathbf{A}^n$, mais pas forcément que $I(X) = (f_1, ..., f_s)$. Montrer que si $\mathrm{rgJac}(f_1, ..., f_s)(x) = n - d$, alors $X$ est lisse en $x$.

c) (plus difficile) Montrer que $X - X^{\mathrm{sing}}$ est un ouvert dense de $X$ (commencer par le cas où $X$ est une hypersurface, ensuite utiliser un exercice d'une feuille précédente, disant que $X$ est birationnel à une hypersurface).

On verra dans le TD prochain (ou pas...) que si $X$ n'est pas forcément irréductible, alors tout point lisse appartient à une unique composante irréductible de $X$ (autrement dit que l'anneau local de $X$ en $x$ est intègre). Cela permet d'étendre le résultat du c) au cas non irréductible.