Théorèmes de finitude I

Le but de ce cours est de démontrer un certain nombre de résultats fondamentaux concernant les représentations des groupes réels. Nous commençons par étudier les nombreuses conséquences d'un théorème de finitude de Harish-Chandra (que nous démontrerons dans un cours prochain, faute d'outils dans celui-ci...), résultats utilisés systématiquement dans l'étude de la croissance des formes automorphes. Nous utilisons ensuite des méthodes hilbertiennes pour établir un certain nombre de résultats parfaitement classiques: théorème de Peter-Weyl, décomposition discrète (Gelfand, Graev, Piatetski-Shapiro), lemme de finitude de Godement, admissibilité des représentations unitaires irréductibles d'un groupe réductif réel (Harish-Chandra).

1 Conséquences d'un théorème de finitude de Harish-Chandra

Soit $G \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ un groupe réductif réel et K un sous-groupe compact maximal de G. Rappelons (théorème de Cartan-Mostow) que deux tels K sont conjugués et que K rencontre chaque composante connexe de G, i.e. $G = KG^0$. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ le centre de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

Rappelons que si $V \in \mathrm{Rep}(G)$ est une représentation continue de G sur un espace de Fréchet, on note

$$HC(V) = V_K \cap V^{\infty}$$

l'espace des vecteurs K-finis et lisses de V. C'est un $(\mathfrak{g}, K)$-module, dense dans V. Rappelons aussi qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-module M est dit admissible si ses composantes isotypiques $M(\tau)$ ($\tau \in \hat{K}$) pour l'action de K sont de dimension finie.

Le résultat suivant est un des points clés de la théorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules. La preuve en est repoussée à un cours futur, car elle demande des outils pas encore à notre disposition. Les conséquences du théorème sont nombreuses et importantes, et seront exposées dans la suite de ce paragraphe.

Théorème 1.1. *(Harish-Chandra)*

Soit M un $(\mathfrak{g}, K)$-module, de type fini en tant que $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-module. Pour tout $\tau \in \hat{K}$ le $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-module $M(\tau)$ est de type fini.

Nous allons surtout utiliser la conséquence suivante du théorème:

Corollaire 1.1. *Soit M un $(\mathfrak{g}, K)$-module engendré en tant que $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-module par un nombre fini de vecteurs $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-finis. Alors M est admissible.*

Proof. Soient $v_1, ..., v_d \in M$ des vecteurs $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-finis qui engendrent M sur $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Il existe un idéal I de codimension finie dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ qui tue les v_i, donc I tue M. D'autre part le théorème 1.1 montre que $M(\tau)$ est un $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-module de type fini, donc un $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})/I$-module de type fini, et donc un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. $\square$

1.1 Application 1: admissibilité des $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles

Théorème 1.2. *(lemme de Schur) Les endomorphismes d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible M sont scalaires.*

Proof. Fixons $v \in M \setminus \{0\}$. L'espace engendré par les Xkv avec $X \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ et $k \in K$ est stable par $\mathfrak{g}$ et K, donc est M tout entier. Comme v est K-fini et $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est de dimension dénombrable sur $\mathbf{C}$, M est de dimension au plus dénombrable sur $\mathbf{C}$.

Soit alors T un endomorphisme de M, qui n'est pas scalaire. Comme M est irréductible, $T - a$ est inversible pour tout $a \in \mathbf{C}$, donc $P(T)$ est inversible pour $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul. On obtient des injections $\mathbf{C}(X) \to \mathrm{End}(M) \to M, f(X) \to f(T), \varphi \to \varphi(v)$. Or $\mathbf{C}(X)$ est de dimension non dénombrable sur $\mathbf{C}$ (les $1/(X-a)$ avec $a \in \mathbf{C}$ forment une famille libre), ce qui permet de conclure. $\square$

Théorème 1.3. *Tout $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible est admissible.*

Proof. Soit M irréductible et $v \in M - \{0\}$. Soit $v_1, ..., v_d$ une base de $\mathbf{C}[K]v$. Alors M est engendré sur $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ par les v_i, qui sont tous $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-finis par le lemme de Schur (théorème 1.2). On applique le corollaire 1.1.

$\square$

1.2 Application 2: théorème d'harmonicité de Harish-Chandra

Rappelons le résultat suivant, toujours pas démontré (on en verra la preuve plus tard... c'est promis).

Théorème 1.4. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$ et $v \in HC(V)$ un vecteur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini. Si $l \in V^*$, l'application $G \to V, g \to l(g.v)$ est analytique réelle.*

Le résultat suivant est assez technique, mais crucial.

Proposition 1.1. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$ et $v \in HC(V)$ un vecteur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini. Soit W l'adhérence de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v := \mathrm{Vect}_{D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}), k \in K} D.k.v$ dans V. Alors:*

a) W est l'adhérence de $\mathbf{C}[G]v := \mathrm{Vect}_{g \in G} g.v$ dans V, en particulier W est G-stable et $W \in \mathrm{Rep}(G)$.

b) W est admissible et $W_K = U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v$.

Proof. a) Soit M l'adhérence de $\mathbf{C}[G]v$ dans V. L'inclusion $W \subset M$ est "claire": on a $v \in M^\infty$, donc $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v \subset M^\infty \subset M$ et donc $W \subset M$. Si l'inclusion était stricte, Hahn-Banach fournirait $l \in M^* - \{0\}$ tel que $l(W) = 0$. Soit $f(g) = l(gv)$, alors f est analytique (théorème 1.4) et ses dérivées en 1 sont nulles (car calculables à partir de l'action de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur v, or l est nulle sur $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})v \subset W$). Donc f est nulle sur G^0. De même, $k^{-1}.l \in M^* - \{0\}$ est nulle sur W (car W est stable sous K), donc d'après ce qui précède elle est nulle sur G^0v. Ainsi l est nulle sur $KG^0v = Gv$ et donc sur M, une contradiction.

b) Le corollaire 1.1 appliqué à $N = U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v$ montre que N est admissible. Par définition N est dense dans W, donc pour tout $\tau \in \hat{K}$ l'espace de dimension finie $N(\tau) = e_\tau(N)$ est dense dans $W(\tau) = e_\tau(W)$, ce qui force $W(\tau) = N(\tau)$, et donc W est admissible. De plus, $N = \oplus_\tau N(\tau) = \oplus_\tau W(\tau) = W_K$. $\square$

Théorème 1.5. *(d'harmonicité de Harish-Chandra) Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$, $v \in HC(V)$ un vecteur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini et U un voisinage ouvert de 1 dans G. Il existe $f \in C_c^\infty(G)$ à support dans U, invariante par conjugaison par K et telle que $v = f.v$.*

Proof. Soit J l'espace vectoriel des fonctions f comme dans l'énoncé du théorème. Puisque J contient une suite de Dirac, v est dans l'adhérence de $J.v := \{f.v | f \in J\}$. Il suffit de montrer que $J.v$ est de dimension finie, car alors on aura $v \in J.v$. Soit M l'adhérence de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v$. Par la proposition précédente M est stable par G, donc par l'action de chaque $f \in J$, et $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v = \oplus_{\tau \in \hat{K}} M(\tau)$, chaque $M(\tau)$ étant de dimension finie. Les fonctions f dans J étant K-centrales, elles laissent stable chaque $M(\tau)$. Comme $v \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v = \oplus M(\tau)$, il existe $\tau_1, ..., \tau_n$ tels que $v \in \sum_{i=1}^n M(\tau_i)$ et alors $J.v \subset \sum_{i=1}^n M(\tau_i)$, ce qui montre que $J.v$ est de dimension finie.

□

2 Méthodes hilbertiennes

2.1 Opérateurs sur un espace de Hilbert: rappels

Tous les espaces de Hilbert ci-dessus seront sur $\mathbf{C}$ et séparables (i.e. possèdent une base orthonormale au plus dénombrable).

Si H est un tel Hilbert, $B(H)$ désigne l'espace des applications linéaires continues (i.e. bornées) $T : H \to H$. On appelle simplement un tel T un **opérateur sur** H. Un opérateur T a un adjoint $T^* \in B(H)$ caractérisé par $(Tv, w) = (v, T^*w)$ pour $v, w \in H$, où $(.,.)$ est le produit hermitien de H. On note $||T|| = \sup_{v \neq 0} \frac{||Tv||}{||v||}$ la norme d'opérateur de T, faisant donc de $B(H)$ une algèbre de Banach. **Sauf mention explicite du contraire, la topologie sur $B(H)$ est celle fournie par la norme d'opérateur.** Pour tout $T \in B(H)$

$$||T||^2 = ||T^*||^2 = ||TT^*||.$$

Un opérateur $T \in B(H)$ est appelé

• **auto-adjoint** si $T = T^*$ (ce qui équivaut à $(Tv, v) \in \mathbf{R}$ pour tout $v \in H$),

• **unitaire** si $TT^* = T^*T = 1$ (i.e. $||Tv|| = ||v||$ pour tout v),

• **normal** si $TT^* = T^*T$ (cela équivaut à $||Tv|| = ||T^*v||$ pour tout v).

• **positif** si $(Tv, v) \geq 0$ pour tout v. Un tel T est donc auto-adjoint. Par exemple, TT^* et T^*T sont positifs pour tout $T \in B(H)$.

La théorie de Gelfand s'applique à l'algèbre de Banach $B(H)$ et montre que pour tout $T \in B(H)$ le **spectre de** T

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} | \ \lambda - T \textbf{ n'est pas inversible}\}$$

est un compact non vide de $\mathbf{C}$, tel que

$$\max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} ||T^n||^{1/n}.$$

Cette quantité est appelée **rayon spectral de** T. Par exemple, si T est normal, $\max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = ||T||$, car $||T^2|| = ||T||^2$ dans ce cas (exercice!).

L'opérateur T est dit **compact ou complètement continu** si T est limite dans $B(H)$ d'une suite d'opérateurs T_n de rang fini (i.e. leur image est de dimension finie). Cela équivaut à la propriété suivante: l'image de toute partie bornée de H est relativement compacte dans H (i.e. son adhérence est compacte). Les opérateurs compacts ont des propriétés fort agréables (pour éviter les trivialités **supposons que H est de dimension infinie**):

• l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère de $B(H)$, fermé dans $B(H)$.

• Si T est compact, on a $0 \in \sigma(T)$.

• si λ est une valeur propre **non nulle** de T, alors l'espace propre $\ker(T - \lambda)$ est de dimension finie. L'ensemble de tels λ est au plus dénombrable. Tout élément de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est automatiquement une valeur propre de T.

• Si T est compact **et normal**, l'orthogonal du noyau de T possède une base orthonormale $e_1, e_2, ...$ telle que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ pour certains $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ tendant vers 0. On a donc

$$T(v) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n (v, e_n) e_n.$$

Tout opérateur de cette forme est compact et son spectre est $\{0\} \cup \{\lambda_n\}$.

Une classe très importante (et qu'on utilisera tout le temps) d'opérateurs compacts sur H est celle d'opérateurs **de Hilbert-Schmidt (ou HS)**. Ce sont les $T \in B(H)$ pour lesquels il existe une base orthonormale $e_1, e_2, ...$ de H telle que $\sum_{n\geq 1} ||Te_n||^2 < \infty$. Un calcul simple mais un peu miraculeux montre alors que pour **toute** base orthonormale $f_1, f_2, ...$ de H on a

$$\sum_{n\geq 1} ||Tf_n||^2 = \sum_{n\geq 1} ||Te_n||^2 < \infty.$$

De plus, T est HS si et seulement si T^* est HS.

Il est très facile de voir qu'un opérateur HS est compact: les opérateurs $T_n : v \to \sum_{k=1}^{n} (v, e_k) T(e_k)$ sont clairement de rang fini, et on a pour tout $v \in H$ (Cauchy-Schwarz plus l'égalité $T(v) = \sum_{k\geq 1} (v, e_k) T(e_k)$)

$$||(T - T_n)(v)||^2 = ||\sum_{k>n} (v, e_k) T(e_k)||^2 \leq \sum_{k>n} |(v, e_k)|^2 \sum_{k>n} ||T(e_k)||^2 \leq ||v||^2 \cdot \sum_{k>n} ||T(e_k)||^2$$

ce qui montre que T_n tend vers T dans $B(H)$.

Attention, contrairement au cas des opérateurs compacts, les opérateurs HS ne forment pas un sous-espace fermé de $B(H)$ (sauf si H est de dimension finie...). Un résultat important qu'on utilisera dans ce cours est le suivant.

Théorème 2.1. *Soit (X, μ) un espace mesuré tel que $H = L^2(X, \mu)$ soit séparable (par exemple X est localement compact et μ une mesure de Radon). Pour tout $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ l'opérateur T_K sur H défini par*

$$T_K(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

est HS, donc compact.

Proof. Si $e_1, e_2, ...$ est une base orthonormale de H, par Fubini la fonction $K_x : y \to K(x, y)$ est dans $L^2(X, \mu)$ pour presque tout x, et on a

$$T_K(e_n)(x) = \int_X K(x, y) e_n(y) d\mu(y) = (K_x, \bar{e_n}).$$

Comme $\bar{e_n}$ est aussi une base orthonormale de H, on obtient

$$\sum_{n\geq 1} ||T_K(e_n)||^2 = \sum_{n\geq 1} \int_X |(K_x, \bar{e_n})|^2 d\mu(x) =$$

$$= \int_X (\sum_{n\geq 1} |(K_x, \bar{e_n})|^2) d\mu(x) = \int_X ||K_x||^2 d\mu(x) = ||K||_{L^2}^2 < \infty.$$

□

2.2 Généralités sur les représentations unitaires

Dans toute la suite G sera un groupe **raisonnable**, i.e. un groupe topologique localement compact, unimodulaire, dénombrable à l'infini (réunion croissante dénombrable de compacts). Soit dg une mesure de Haar (bi-invariante) sur G.

Rappelons que $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations continues de G sur des espaces de Fréchet.

Definition 2.1. Une **représentation unitaire** de G est une représentation continue de G sur un espace de Hilbert H (séparable, complexe), telle que l'opérateur $v \to g.v$ soit unitaire (i.e. une isométrie) pour tout $g \in G$.

Le **dual unitaire** $\hat{G}$ **de** G est l'ensemble[1] des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles unitaires de G. C'est un objet fort compliqué même pour des groupes assez simples comme $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, et il est étudié depuis bien longtemps. $\hat{G}$ est assez gros pour tout groupe raisonnable G: un théorème de Gelfand-Raikov montre que pour tout $g \neq 1$ dans G, il existe $H \in \hat{G}$ sur laquelle g n'agit pas trivialement. D'autre part, même pour des groupes tout à fait sympathiques comme $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ on ne peut pas choisir un tel V de dimension finie: la représentation triviale est la seule représentation de dimension finie dans $\hat{G}$ (exercice très amusant!).

Si H est une représentation unitaire de G et si $f \in C_c(G)$, on dispose d'un opérateur

$$T_f : H \to H, v \to f.v = \int_H f(g) g.v dg.$$

Notons que l'adjoint de T_f est simplement

$$T_f^* = T_{f^*}, \quad f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}.$$

En effet, pour tous $v, w \in H$ on a, par unitarité de l'action,

$$(T_f(v), w) = \int_G f(g)(g.v, w) dg = \int_G f(g)(v, g^{-1}.w) dg = (v, \int_G \overline{f(g)} g^{-1}.w dg) = (v, T_{f^*}.w).$$

2.3 Le lemme de Schur

Le lemme de Schur est un outil indispensable dans la théorie des représentations. Dans le cas des groupes finis (et représentations de dimension finie) ce résultat est une trivialité (bien utile!), mais il ne l'est pas dans notre contexte. En fait, la preuve utilise la théorie spectrale des opérateurs sur un Hilbert, plus précisément le **calcul fonctionnel continu**. Rappelons très brièvement de quoi il s'agit. Supposons que T est un opérateur **auto-adjoint** sur H. Son spectre $X = \sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbf{R}$, donc (Stone-Weierstrass) les fonctions polynomiales sont denses dans $C(X)$ pour la convergence uniforme. Si $f \in C(X)$ est la limite (uniforme) d'une suite (p_n) de fonctions polynomiales, la suite d'opérateurs $p_n(T) \in B(H)$ converge vers un opérateur $f(T) \in B(H)$. Cela se déduit de l'égalité fondamentale

$$||p(T)||_{B(H)} = \max_{\lambda \in X} |p(\lambda)|,$$

qui découle des rappels ci-dessus et de la normalité de $p(T)$ pour $p \in \mathbf{C}[T]$. On obtient ainsi un morphisme **isométrique** d'algèbres de Banach

$$C(\sigma(T)) \to B(H), \ f \to f(T),$$

tel que $f(T)^* = \bar{f}(T)$. En particulier $f(T)$ est toujours normal, et $f(T)$ est positif si $f \geq 0$.

[1] C'est vraiment un ensemble, car si H est irréductible unitaire, la dimension de H-en tant qu'espace de Hilbert-est majorée par le cardinal de G...

Théorème 2.2. *(lemme de Schur) Soit V une représentation unitaire irréductible de G. Alors tout endomorphisme*[2] *de V est scalaire.*

Proof. Soit $A = \mathrm{End}_G(V)$. Notons que si $X, Y \in A$ et $XY = 0$, alors $X = 0$ ou $Y = 0$. En effet, si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, alors $Y(V)$ est non nul et contenu dans $\ker(X)$, donc $\ker(X)$ est fermé, G-stable, non nul et différent de V, une contradiction.

Ensuite, pour tout $T \in A$ on a $T^* \in A$, car la représentation est unitaire (exercice), et $T + T^*, (T - T^*)/(2i)$ sont auto-adjoints, avec

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i \cdot \frac{T - T^*}{2i}.$$

Pour montrer que $A = \mathbf{C}$ il suffit donc de voir que tout opérateur auto-adjoint $T \in A$ est scalaire. Soit $K = \sigma(T)$ le spectre de T, et supposons que K a au moins deux points. Il existe alors $f, g \in C(K)$ telles que $fg = 0$ sur K, mais f, g ne sont pas nulles (exercice). Comme $f(T)$ est une limite d'opérateurs polynomiaux en T et A est clairement fermée dans $B(H)$, on a $f(T) \in A$ pour tout $f \in C(K)$. Comme $f(T)g(T) = (fg)(T) = 0$ et $f(T), g(T) \in A$, par la remarque initiale on peut supposer que $f(T) = 0$, donc (calcul fonctionnel!) $\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda)| = 0$ et $f = 0$, une contradiction.

Ainsi $K = \{\lambda\}$ pour un $\lambda \in \mathbf{R}$ et le spectre de $T - \lambda$ est réduit à $\{0\}$, donc $T - \lambda = 0$. □

Exercice 2.3. Que dire de la réciproque de ce théorème?

Voici une première conséquence bien pratique:

Corollaire 2.1. *Soient H, H' des représentations unitaires de G, avec H irréductible. Alors tout morphisme G-équivariant $T : H \to H'$ est d'image fermée et induit un isomorphisme entre H et une sous-représentation de H'.*

Proof. On vérifie que $T^*T \in B(H)$ commute à G, donc est un scalaire > 0 par le lemme de Schur (et le fait qu'il est positif et T est non nul). On en déduit immédiatement que l'image est fermée. Le noyau est clairement nul, donc T induit un isomorphisme sur son image (car c'est un morphisme bijectif entre des Banach). Cela permet de conclure. □

Exercice 2.4. Soient H, H' des représentations unitaires de G. Si $H \simeq H'$ dans $\mathrm{Rep}(G)$, montrer qu'il existe un isomorphisme G-équivariant $U : H \to H'$ tel que $||U(h)|| = ||h||$ pour tout $h \in H$. Indication: soit $T : H \simeq H'$ un isomorphisme, vérifier que $S = T^*T \in B(H)$ est auto-adjoint, positif, bijectif et qu'il existe un opérateur auto-adjoint positif inversible R tel que $R^{-2} = S$. Montrer que $U = TR$ marche.

2.4 Relations d'orthogonalité de Schur

Ce paragraphe est un premier pas vers le théorème de Peter-Weyl. Soit K un groupe compact et dk est l'unique mesure de probabilité invariante sur K. Le résultat suivant, connu sous le nom de **relations d'orthogonalité de Schur**, est une extension au cas d'un groupe compact d'un résultat standard et fondamental de la théorie des représentations des groupes finis:

Théorème 2.5. *a) Tout $V \in \hat{K}$ est de dimension finie et pour tous $a_i, b_i \in V$*

$$\int_K (k.a_1, a_2)\overline{(k.b_1, b_2)}dk = \frac{(a_1, b_1)\overline{(a_2, b_2)}}{\dim V}.$$

[2] Dans $\mathrm{Rep}(G)$, donc continu, linéaire, G-équivariant.

b) Si $U, V \in \hat{K}$ ne sont pas isomorphes et $a_i \in U, b_i \in V$, alors

$$\int_K (k.a_1, a_2)\overline{(k.b_1, b_2)}dk = 0.$$

Proof. a) Fixons $v_0 \in V$ non nul et considérons le produit hermitien K-invariant

$$\langle v, w\rangle = \int_K (k.v, v_0)\overline{(k.w, v_0)}dk,$$

continu car (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle v, w\rangle| \le \int_K ||k.v|| \cdot ||v_0|| \cdot ||k.w|| \cdot ||v_0||dk = c(v_0)||v|| \cdot ||w||.$$

Le théorème de Riesz fournit une application linéaire continue $A : V \to V$ telle que $\langle v, w\rangle = (Av, w)$, et comme $\langle ., .\rangle$ est K-invariant, A est K-équivariante, et donc scalaire (lemme de Schur). Il existe donc $\alpha(v_0) > 0$ tel que

$$\int_K |(k.v, v_0)|^2 dk = \alpha(v_0)||v||^2, \quad \forall v.$$

Par K-invariance de $(., .)$ et de dk on a

$$\alpha(v_0)||v||^2 = \int_K |(k.v, v_0)|^2 dk = \int_K |(v, k^{-1}v_0)|^2 dk = \int_K |(k.v_0, v)|^2 dk = \alpha(v)||v_0||^2,$$

donc $\alpha(v) = \frac{||v||^2}{d}$ pour une constante $d > 0$, et pour tous $v, w \in V$

$$\int_K |(k.v, w)|^2 dk = \frac{||v||^2 \cdot ||w||^2}{d} \quad (*).$$

Soit maintenant $e_1, ..., e_n$ une famille orthonormale dans V. Pour tout $v \in V$ on a $\sum_{i=1}^n |(k.v, e_i)|^2 \le ||k.v||^2 = ||v||^2$, donc (en utilisant (*))

$$n\frac{||v||^2}{d} = \int_K (\sum_i |(k.v, e_i)|^2)dk \le \int_K ||v||^2 dk = ||v||^2,$$

ce qui montre que n est borné et donc V est de dimension finie. En prenant $e_1, ..., e_n$ une base orthonormale, on a $\sum_{i=1}^n |(k.v, e_i)|^2 = ||v||^2$ pour tout v, et l'argument ci-dessus donne $n = d$. Enfin, l'identité de polarisation permet de déduire l'identité

$$\int_K (k.a_1, a_2)\overline{(k.b_1, b_2)}dk = \frac{(a_1, b_1)\overline{(a_2, b_2)}}{\dim V}$$

de son analogue (*).

b) Si U et V ne sont pas isomorphes, la forme hermitienne sur $U \times V$

$$B(u, v) = \int_K (k.u, a_2)\overline{(k.v, b_2)}dk$$

est continue, car Cauchy-Schwarz et le point a) fournissent

$$|B(u, v)| \le \frac{||a_2|| \cdot ||b_2|| \cdot ||u|| \cdot ||v||}{\sqrt{\dim U \cdot \dim V}}.$$

Le théorème de Riesz montre l'existence d'une application linéaire continue $A : U \to V$ telle que $B(u, v) = (A(u), v)$. On vérifie sans mal que A est K-équivariante, puisque B est K-invariante. Comme U, V sont irréductibles et pas isomorphes, on a forcément (cor. 2.1) $A = 0$ et donc $B(u, v) = 0$ pour tous u, v.

□

Rappelons que pour $\tau \in \hat{K}$ on dispose de la fonction

$$e_\tau = \dim(\tau) \cdot \overline{\chi_\tau} \in C(K),$$

$\chi_\tau : K \to \mathbf{C}$ étant le caractère de τ (cela a un sens, car $\dim \tau < \infty$). Comme les valeurs propres de $v \to k.v$ sont de module 1 (par compacité de K), on a $\overline{e_\tau(g^{-1})} = e_\tau(g)$, donc l'opérateur

$$T_\tau := T_{e_\tau} : v \to \int_K e_\tau(k) k.v dk$$

induit sur toute représentation unitaire H de K est auto-adjoint.

Proposition 2.1. *Si $\tau \in \hat{K}$, T_τ agit par l'identité sur τ et par 0 sur tout autre $\sigma \in \hat{K}$. De plus*

$$e_\tau * e_\sigma = 1_{\tau \simeq \sigma} \cdot e_\tau, \quad \forall \tau, \sigma \in \hat{K}.$$

Les opérateurs T_τ induits sur toute représentation unitaire H de G sont des projections orthogonales sur leurs images $H(\tau)$, qui sont deux à deux orthogonales dans H.

Proof. La dernière assertion se déduit des deux premières et de la discussion ci-dessus. Montrons que $e_\tau * e_\tau = e_\tau$. Soit $e_1, ..., e_n$ une base orthonormale de $\tau \in \hat{K}$. Alors

$$e_\tau(x) = n \sum_{i=1}^{n} \overline{(x.e_i, e_i)}.$$

Le théorème 2.5 et la K-invariance de $(.,.)$ donnent

$$\overline{e_\tau * e_\tau(x)} = n^2 \int_K \sum_{i,j} (xk^{-1}.e_i, e_i)(k.e_j, e_j) dk = n^2 \sum_{i,j} \int_K (k.e_j, e_j)\overline{(kx^{-1}.e_i, e_i)} dk$$

$$= n \sum_{i,j} (e_j, x^{-1}.e_i)\overline{(e_j, e_i)} = n \sum_i (x.e_i, e_i) = \overline{e_\tau(x)}.$$

On montre de même que $e_\tau * e_{\tau'} = 0$ quand τ et τ' ne sont pas isomorphes.

Montrons que T_τ agit par l'identité sur τ i.e. $\int_K e_\tau(k) k.v dk = v$ pour $v \in \tau$. Il suffit de vérifier que $\int_K e_\tau(k)(k.v, w) dk = (v, w)$ pour tous $v, w \in \tau$, ce qui revient à

$$\sum_i \int_K \overline{(k.e_i, e_i)}(k.v, w) dk = \frac{(v, w)}{n}$$

et découle encore directement du corollaire cité.

□

Exercice 2.6. Montrer que les caractères des éléments de $\hat{K}$ forment une famille orthonormale dans $L^2(K)$. Une représentation de dimension finie τ de K est irréductible si et seulement si $(\chi_\tau, \chi_\tau) = 1$.

Exercice 2.7. Démontrer le résultat suivant: l'application $(\tau_1, \tau_2) \to \tau_1 \otimes \tau_2$ induit une bijection entre $\hat{K}_1 \times \hat{K}_2$ et $\widehat{K_1 \times K_2}$, si K_i sont des groupes compacts.

2.5 Décomposition discrète d'une représentation unitaire

Commençons par quelques rappels sur les sommes directes hilbertiennes. Considérons une suite[3] (H_n) d'espaces de Hilbert (séparables...). Leur **somme directe hilbertienne** $H = \widehat{\oplus}_n H_n$ est l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\oplus_n H_n$ pour le produit hermitien

$$((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_n (x_n, y_n).$$

[3]On pourrait travailler avec des familles quelconques au lieu d'une suite, mais comme tous nos espaces sont séparables, on se fatiguerait pour rien...

Autrement dit H est l'espace des suites $(x_n)_n$ avec $x_n \in H_n$ et $\sum_n ||x_n||^2 < \infty$, le produit hermitien dans H étant celui défini ci-dessus. Si les H_n sont des représentations unitaires d'un groupe raisonnable G, alors $H = \widehat{\oplus}_n H_n$ devient une représentation unitaire de G, en prolongeant par continuité l'action de G sur $\oplus_n H_n$, définie comme on le pense, i.e. $g.(x_n)_n = (g.x_n)_n$.

Nous allons introduire maintenant une notion très utile, celle de décomposition discrète d'une représentation unitaire. Il faut faire attention au point suivant: en dimension finie il est clair que toute représentation possède une sous-représentation irréductible, mais cela est complètement faux en dimension infinie, même avec des représentations unitaires. Par exemple la représentation de $\mathbf{R}$ par translation à droite sur $L^2(\mathbf{R})$ n'a aucune sous-représentation irréductible, et n'est pas elle-même irréductible.

Exercice 2.8. Démontrer l'assertion ci-dessus!

Definition 2.2. On dit qu'une représentation unitaire H de G possède une **décomposition discrète** si H est une somme directe hilbertienne $H = \widehat{\oplus}_n H_n$ de sous-représentations irréductibles de G, avec des multiplicités finies, i.e. pour tout $\tau \in \hat{G}$ il n'y a qu'un nombre fini de n tels que $H_n \simeq \tau$.

Si H est une représentation unitaire de G qui possède une décomposition discrète, on a un isomorphisme de G-représentations unitaires

$$H \simeq \widehat{\bigoplus}_{\tau \in \hat{G}} \tau^{\oplus m(\tau)},$$

avec $m(\tau) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, donnés (grâce au lemme de Schur et au corollaire 2.1) par $m(\tau) = \dim \mathrm{Hom}_G(\tau, H)$. Il arrive cependant que H ait des symétries supplémentaires, dans quel cas l'écriture

$$H \simeq \widehat{\bigoplus}_{\tau \in \hat{G}} X_\tau \otimes \tau, \ X_\tau = \mathrm{Hom}_G(\tau, H)$$

est préférable, les espaces de dimension finie X_τ héritant de ces symétries supplémentaires.

Il est difficile de sous-estimer l'importance du résultat fondamental suivant dans la théorie des formes automorphes ou des représentations unitaires:

Théorème 2.9. *(Gelfand, Graev, Piatetski-Shapiro) Soit H une représentation unitaire de G telle que l'opérateur T_f induit par tout $f \in C_c(G)$ soit compact. Alors H possède une décomposition discrète.*

Proof. Par "sous-espace stable" on entendra dans la suite "sous-espace fermé stable sous l'action de G".

Etape 1: Montrons que tout sous-espace stable non nul W contient un sous-espace stable irréductible. Prenons $f \in C_c(G)$ telle que $f = f^*$ et $T_f|_W \neq 0$ (suites de Dirac!). L'opérateur $T_f|_W$ est compact, auto-adjoint et non nul, donc il possède une valeur propre $\lambda \neq 0$. Parmi les sous-espaces stables V de W tels que $V[\lambda] := \ker(T_f - \lambda |\ V)$ soit non nul, prenons V minimisant $\dim V[\lambda]$ (noter que $V[\lambda]$ est de dimension finie car $T_f|_V$ est compact et $\lambda \neq 0$). Soit $v \in V[\lambda]$ non nul et montrons que $V_1 := \overline{\mathbf{C}[G].v}$ (adhérence dans H ou dans V) est irréductible. En effet, sinon $V_1 = U_1 \oplus^\perp U_2$, avec U_i des sous-espaces stables non nuls. Si $v_1 \in V_1[\lambda]$, écrivons $v_1 = u_1 + u_2$ avec $u_i \in U_i$, alors $\lambda u_1 - T_f(u_1) = T_f(u_2) - \lambda u_2 \in U_1 \cap U_2 = 0$, donc $Tu_i = \lambda u_i$, ce qui montre que $V_1[\lambda] = U_1[\lambda] \oplus U_2[\lambda]$. Par minimalité de V, on doit avoir $U_1[\lambda] = 0$ ou $U_2[\lambda] = 0$ et donc $v \in V_1[\lambda]$ est dans U_1 ou dans U_2, disons dans U_1. Comme U_1 est stable, il contient V_1 et donc $U_2 = 0$, une contradiction qui montre que V_1 est bien irréductible.

Etape 2: Montrons que H est somme directe hilbertienne de sous-représentations irréductibles. C'est un argument facile avec le lemme de Zorn: une famille orthogonale est un ensemble de sous-espaces de H stables, irréductibles, deux à deux orthogonaux. Soit

FO l'ensemble des familles orthogonales[4]. Si (A_i) est un ensemble totalement ordonné d'éléments de FO, $\cup_i A_i$ est un élément de FO qui majore les A_i. Le lemme de Zorn montre donc que FO possède un élément maximal A, et $W = (\sum_{\pi \in A} \pi)^\perp = (\widehat{\bigoplus}_{\pi \in A} \pi)^\perp$ est un sous-espace stable de H qui ne contient aucun sous-espace stable irréductible, donc $W = 0$ et $H = \widehat{\bigoplus}_{\pi \in A} \pi$ d'après l'étape 1.

Etape 3 Montrons que les multiplicités sont finies. Soient $(\pi_i)_{i \in I}$ des sous-représentations irréductibles de H intervenant dans la décomposition précédente, deux à deux isomorphes. On va majorer le cardinal de I, ce qui permettra de conclure. Fixons $i_0 \in I$. Comme dans l'étape 1, on trouve $f \in C_c(G)$ telle que T_f soit auto-adjoint et non nul sur π_{i_0}, donc possède une valeur propre $\lambda \neq 0$ dans π_{i_0}. L'espace propre $\pi_{i_0}[\lambda]$ est non nul et isomorphe à $\pi_i[\lambda]$ pour tout $i \in I$, car $\pi_i \simeq \pi_{i_0}$. Tous ces espaces sont en somme directe et contenus dans $H[\lambda]$, qui est de dimension finie (car T_f est compact). Donc $|I| \leq \dim H[\lambda]$.

□

2.6 Application à $L^2(\Gamma\backslash G)$ pour Γ cocompact dans G

Soit G un groupe raisonnable et soit Γ un sous-groupe fermé, unimodulaire de G. Le quotient $X = \Gamma\backslash G$ est muni d'une action de G par translation à droite, ainsi que d'une mesure quotient $d\bar{g}$, induite par une mesure de Haar (choisie une fois pour toutes) dg sur G. On en déduit une action de G sur le Hilbert séparable $H = L^2(X, dg)$, qui en fait une représentation unitaire de G.

Exercice 2.10. Vérifiez la continuité de l'action de G sur H (utiliser la densité de $C_c(X)$ dans H).

Notons que pour tous $f \in C_c(G)$ et $\varphi \in H$ on a

$$T_f(\varphi)(x) = \int_G f(g)\varphi(xg)dg = \int_G f(x^{-1}g)\varphi(g)dg.$$

Comme φ est invariante à gauche sous Γ, on peut encore écrire

$$T_f(\varphi)(x) = \int_{\Gamma\backslash G} \varphi(\bar{g}) \left(\int_\Gamma f(x^{-1}\gamma g)d\gamma \right) d\bar{g} = \int_X \varphi(y) K_f(x,y)dy,$$

où

$$K_f(x,y) = \int_\Gamma f(x^{-1}\gamma y)d\gamma.$$

Comme f est continue à support compact, K_f est continue. Donc, **si** X **est compact**, K_f est dans $L^2(X \times X)$. Les théorèmes 2.1 et 2.9 fournissent alors:

Théorème 2.11. *Si Γ est un sous-groupe fermé, unimodulaire,* ***co-compact*** *(i.e. $\Gamma\backslash G$ est compact) d'un groupe raisonnable G, alors l'opérateur T_f est Hilbert-Schmidt, donc compact sur $L^2(\Gamma\backslash G)$. En particulier, $L^2(\Gamma\backslash G)$ possède une décomposition discrète.*

2.7 Application au théorème de Peter-Weyl

Soit K un groupe compact, dk l'unique mesure de probabilité invariante, et $H = L^2(K)$, muni de l'action par translation à gauche ($g.f(x) = f(g^{-1}x)$). Alors $T_f(\varphi) = f * \varphi$ pour $f \in C(K)$ et $\varphi \in L^2(K)$, comme le montre un calcul immédiat. En particulier $T_\tau(\varphi) = e_\tau * \varphi$. On a déjà vu (prop. 2.1) que les T_τ sont des projecteurs orthogonaux sur leurs images $L^2(H)(\tau)$. Le théorème suivant décrit ces images:

[4]Les problèmes ensemblistes seront laissés aux logiciens...

Théorème 2.12. *(Peter-Weyl)*

On a des isomorphismes canoniques

$$L^2(K)(\tau) \simeq \tau \otimes \tau^*,$$

et une décomposition discrète, équivariante pour l'action naturelle de $K \times K$

$$L^2(K) = \widehat{\bigoplus}_{\tau \in \hat{K}} \tau \otimes \tau^*.$$

En particulier $f = \sum_{\tau \in \hat{K}} e_\tau * f$ pour $f \in L^2(K)$.

Proof. L'opérateur T_f induit par tout $f \in C(K)$ sur H est compact (théorème 2.1), donc (th. 2.9) $L^2(K)$ possède une décomposition discrète

$$L^2(K) = \widehat{\oplus}_{\tau \in \hat{K}} X_\tau \otimes \tau,$$

avec $X_\tau = \mathrm{Hom}_K(\tau, L^2(K))$ de dimension finie. L'opérateur T_τ agit par l'identité sur $X_\tau \otimes \tau$ et par 0 sur les autres composantes (prop. 2.1), donc $L^2(K)(\tau) = \mathrm{Im}(T_\tau) = X_\tau \otimes \tau$. Il suffit donc de montrer que $X_\tau \simeq \tau^*$ pour conclure.

Je dis que l'inclusion $C(K) \subset L^2(K)$ induit un isomorphisme $X_\tau \simeq \mathrm{Hom}_K(\tau, C(K))$. En effet, si $\varphi \in X_\tau$, alors $\varphi(\tau)$ est un sous-espace de dimension finie de $L^2(K)$, stable sous K. Si $f \in \varphi(\tau)$, alors $\{\Psi.f | \Psi \in C(K)\}$ est de dimension finie (contenu dans $\varphi(\tau)$) et f est dans son adhérence (suites de Dirac), donc $f = \Psi.f = \Psi * f$ pour un $\Psi \in C(K)$, donc $f \in C(K)$ et $X_\tau \simeq \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{cont}}(\tau, C(K))$. Ce dernier s'identifie (réciprocité de Frobenius) à τ^*, en envoyant $\varphi \in X_\tau$ sur $v \to \varphi(v)(1)$ et $l \in \tau^*$ sur $v \to (k \to l(k.v))$. Donc $X_\tau \simeq \tau^*$. □

Théorème 2.13. *(Peter-Weyl) Soit K un groupe compact et $V \in \mathrm{Rep}(K)$.*

1. *On a $V_K = \sum_{\tau \in \hat{K}} V(\tau)$ et V_K est dense dans V.*
2. *L'application évidente $\tau \otimes \mathrm{Hom}_K(\tau, V) \to V$ induit un isomorphisme*

$$\tau \otimes \mathrm{Hom}_K(\tau, V) \simeq V(\tau).$$

3. *Si V est irréductible, alors $\dim V < \infty$.*

Proof. a) Montrons que $V_K \subset \sum_{\tau \in \hat{K}} V(\tau)$. Si $v \in V_K$, l'espace $W = \mathrm{Vect}(K.v)$ est de dimension finie, stable par K, donc une somme directe de représentations irréductibles de dimension finie, disons $\tau_1, ..., \tau_d$. Comme e_τ agit par l'identité sur τ, on obtient $v \in \sum_{i=1}^d V(\tau_i)$.

Ensuite, montrons que $V(\tau) \subset V_K$ pour $\tau \in \hat{K}$. Soit $v \in V(\tau)$ et soit W l'adhérence de $\mathrm{Vect}(K.v)$. On va montrer que $\dim W < \infty$. Par Hahn-Banach il suffit de voir que W^* l'est (dual continu). Soit $l \in W^*$ et posons $f_l \in C(K)$, $f_l(k) = l(k^{-1}.v)$. On a pour $g \in K$

$$e_\tau * f_l(g) = \int_K e_\tau(k) l(g^{-1}k.v) dk = l(g^{-1}e_\tau.v) = l(g^{-1}.v) = f_l(g),$$

autrement dit $e_\tau * f_l = f_l$. La compacité de $f \to e_\tau * f$ montre que les f_l restent dans un espace de dimension finie quand l varie. Comme $l \to f_l$ est clairement injective sur W^*, cela montre que $\dim W^* < \infty$.

Enfin, montrons que V_K est dense dans V. Sinon, il existe $l \in V^*$ non nulle et s'annulant sur V_K. Soit $v \in V$ et posons $\varphi(k) = l(k^{-1}.v)$. Alors $\varphi \in C(K)$ et un calcul comme ci-dessus montre que pour tout $\tau \in \hat{K}$ on a $e_\tau * \varphi(x) = l(x^{-1} e_\tau(v)) = 0$ pour tout

x, donc $e_\tau * \varphi = 0$ pour tout τ. Le théorème de Peter-Weyl entraîne alors $\varphi = 0$ dans $L^2(K)$ et donc, par continuité, $\varphi = 0$ tout court et donc $l = 0$, une contradiction.

b) Le fait que l'image tombe dans $V(\tau)$ découle d'un calcul évident (avec $x \in \tau$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(\tau, V)$):

$$e_\tau.\varphi(x) = \int_K e_\tau(k)\varphi(k.x)dk = \varphi(\int_K e_\tau(k)k.xdk) = \varphi(e_\tau.x) = \varphi(x).$$

L'injectivité n'est pas difficile et laissée en exercice. Pour la surjectivité, soit $v \in V(\tau)$, alors on a vu dans a) que $W = \mathrm{Vect}(K.v)$ est une somme directe finie de représentations irréductibles de dimension finie, forcément toutes isomorphes à τ (car e_τ agit par l'identité sur W, donc sur chacune de ces représentations irréductibles, or il agit par 0 sur tout $\sigma \in \hat{K}$ pas isomorphe à τ). Ainsi l'application naturelle $\tau \otimes \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{cont}}(\tau, W) \to W$ est un isomorphisme. On en déduit que l'image de $\tau \otimes \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{cont}}(\tau, V) \to V(\tau)$ contient W et donc contient v, ce qui finit la preuve du point b).

c) Chaque $V(\tau)$ est nul ou V tout entier, car il est fermé et K-stable. Comme $V_K = \oplus_\tau V(\tau)$ est dense dans V, il existe τ tel que $V(\tau) \neq 0$. Mais alors $V = V(\tau) \simeq \tau \otimes \mathrm{Hom}_K(\tau, V)$, et comme V est irréductible, il est clair que $V \simeq \tau$, donc $\dim V < \infty$.

□

2.8 Admissibilité des irréductibles unitaires

Dans ce paragraphe G est réductif réel. On dit que $V \in \mathrm{Rep}(G)$ est **quasi-simple** si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ agit par des scalaires sur V^∞.

Théorème 2.14. *(Harish-Chandra)*
Toute représentation de Banach irréductible et quasi-simple est admissible.

Proof. Soit V une telle représentation et soit $v \in HC(V)$ non nul. Soit M l'adhérence de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K]v$. La proposition 1.1 montre (noter que v est $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini par hypothèse) que M est G-stable, donc égal à V (par irréductibilité de V), et $M(\tau)$ sont de dimension finie, donc V est admissible. □

Une classe importante de représentations quasi-simples sont celles irréductibles unitaires, comme le montre le théorème suivant:

Théorème 2.15. *(Segal) Toute représentation unitaire irréductible de G est quasi-simple.*

L'ingrédient principal de la preuve du théorème de Segal est le résultat de densité suivant (qui est un cas très particulier du théorème de densité de von Neumann), lui-même une application très astucieuse du lemme de Schur. Ce résultat est l'analogue d'un résultat classique appelé "théorème de densité de Jacobson", affirmant que si V est une représentation irréductible d'une $\mathbf{C}$-algèbre associative A (sans aucune topologie, sans hypothèse de dimension finie sur V!) et si $v_1, ..., v_n \in V$ forment une famille libre, alors pour tous $w_1, ..., w_n \in V$ il existe $a \in A$ tel que $a.v_i = w_i$, $1 \leq i \leq n$.

Théorème 2.16. *Si V est une représentation unitaire irréductible de G et $v_1, ..., v_n \in V$ forment une famille libre, alors $\{(f.v_1, ..., f.v_n) | \, f \in C_c(G)\}$ est dense dans V^n.*

Proof. Soit $A = C_c(G)$ et soit X l'adhérence dans V^n de $Y := \{(f.v_1, ..., f.v_n) | \, f \in A\}$. Notons que $(v_1, ..., v_n) \in X$, en prenant une suite de Dirac. On veut montrer que $X = V^n$. Il suffit de voir que la projection orthogonale p de V^n sur X est l'identité. Montrons que p est G-équivariante. Remarquons d'abord que X est G-stable (pour l'action diagonale de G sur V^n). En effet, il suffit de voir que Y est G-stable, qui vient du fait que $g.(f.v) = f(g^{-1}\cdot).v$ pour $g \in G$, $f \in A$ et $v \in V$. Ainsi pour $w \in V^n$ et $g \in G$ on a $g.p(w) \in X$ et il suffit de voir que $g.w - g.p(w) \in X^\perp$, ce qui revient à $w - p(w) \in (g^{-1}X)^\perp = X^\perp$, vrai par définition.

Donc p est G-équivariante. Mais $\mathrm{End}_G(V^n) = M_n(\mathrm{End}_G(V)) = M_n(\mathbf{C})$ par le lemme de Schur. On peut donc écrire

$$p(x_1, ..., x_n) = (\sum a_{1i}x_i, ..., \sum a_{ni}x_i)$$

avec $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Comme $(v_1, ..., v_n) \in X$, on a $p(v_1, ..., v_n) = (v_1, ..., v_n)$. Comme v_i sont libres, cela force $(a_{ij}) = I_n$ et donc $p = \mathrm{Id}$. $\square$

Le théorème de Segal s'en déduit comme suit. Prenons $D \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$, alors D commute[5] à l'action de G. Notons que si $X \in \mathfrak{g}$ on a pour tous $v, w \in V^\infty$

$$(Xv, w) = (\lim_{t\to 0} \frac{e^{tX}.v - v}{t}, w) = \lim_{t\to 0}(v, \frac{e^{-tX}.w - w}{t}) = (v, -Xw).$$

L'application $Z = X + iY \in \mathfrak{g}_\mathbf{C} \to \check{Z} = -(X - iY)$ s'étend en un anti-automorphisme semi-linéaire $D \to \check{D}$ de $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$, préservant $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$, et tel que $(Dv, w) = (v, \check{D}w)$ pour $D \in U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$, $v, w \in V^\infty$. Prenons $D \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ et supposons qu'il existe $v \in V^\infty$ tel que v et $D.v$ ne soient pas colinéaires. Par le théorème précédent pour tous $x, y \in V^\infty$ on peut trouver $f_k \in C_c(G)$ tels que $f_k.v \to x$ et $f_k.D.v \to y$. Si $w \in V^\infty$ on obtient

$$(y, w) = \lim_{k\to\infty}(f_k.D.v, w) = \lim_{k\to\infty}(D.f_k.v, w) = \lim_{k\to\infty}(f_k.v, \check{D}.w) = (x, \check{D}.w) = (D.x, w),$$

autrement dit $y - D.x$ est orthogonal à V^∞, en particulier à lui-même et donc $y = D.x$. Mais $x, y \in V^\infty$ sont arbitraires, et cela est manifestement absurde.

Théorème 2.17. *(Harish-Chandra) Soit V une représentation unitaire de G.*

a) Si V est irréductible alors V est admissible.

b) V est irréductible si et seulement si $HC(V)$ est irréductible.

c) Soient $V_1, V_2 \in \hat{G}$. Alors V_1, V_2 sont isomorphes si et seulement si $HC(V_1) \simeq HC(V_2)$.

Proof. a) Découle du théorème 2.14 et du théorème de Segal.

b) Si V est irréductible, elle est admissible par a), donc $HC(V)$ est irréductible par le théorème **??** (cf. cours précédent). Dans l'autre sens, si $V = V_1 \oplus V_2$ est une décomposition G-stable avec $V_i \neq 0$ fermés dans G, alors $HC(V) = HC(V_1) \oplus HC(V_2)$ et $HC(V_i)$ sont des sous $(\mathfrak{g}, K)$-modules non nuls ($HC(V_i)$ est dense dans V_i) de $HC(V)$, donc ce dernier n'est pas irréductible.

c) Une direction étant évidente, supposons que $A : HC(V_1) \to HC(V_2)$ est un isomorphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules. Alors A induit un isomorphisme $HC(V_1)(\tau) \simeq HC(V_2)(\tau)$ et par admissibilité on peut définir $A^* : HC(V_2) \to HC(V_1)$ tel que $(A^*v, w) = (v, Aw)$ pour $v \in V_2(\tau), w \in V_1(\tau)$. Mais alors A^*A est un automorphisme du $(\mathfrak{g}, K)$-module $HC(V_2)$. Comme ce module est irréductible (point b)), le lemme de Schur (théorème 1.2) montre que A^*A est scalaire, et le scalaire c en question est automatiquement > 0. Mais alors $T = \frac{1}{\sqrt{c}}A$ se prolonge en un opérateur unitaire $T : V_1 \to V_2$, K-équivariant et tel que $T \circ e^X = e^X \circ T$ sur $HC(V_1)$, pour $X \in \mathfrak{g}$. Comme $G = KG^0$, T définit un isomorphisme unitaire entre V_1 et V_2. $\square$

[5] Cela n'est pas vraiment évident, mais une fois les sorites sur les groupes réductifs faites-cours prochain!-ça sera immédiat.

2.9 Le résultat de finitude de Godement

Le résultat fort sympathique suivant sera d'une importance cruciale dans la preuve de la finitude le d'espace des formes automorphes cuspidales.

Théorème 2.18. *(Godement) Soit (X, μ) un espace muni d'une mesure positive finie et soit V un sous-espace fermé de $L^2(X, \mu)$, contenu dans $L^\infty(X, \mu)$. Alors V est de dimension finie.*

Proof. La preuve suivante, due à Hörmander, est tout simplement magnifique. Soit $c = \mu(X) < \infty$, alors (Cauchy-Schwarz) $||f||_2 \leq c||f||_\infty$ pour $f \in V$. Donc l'application identité $(V, || \cdot ||_\infty) \to (V, || \cdot ||_2)$ est continue. Par hypothèse $(V, || \cdot ||_2)$ est un Banach (même un Hilbert). Ensuite, V est fermé dans $L^\infty(X, \mu)$, car si $f_n \in V$ convergent dans $L^\infty(X, \mu)$ vers un $f \in L^\infty(X, \mu)$, alors $f_n \to f$ dans $L^2(X, \mu)$ et donc $f \in V$.

Ainsi $(V, || \cdot ||_\infty)$ est un Banach, et le théorème de Banach (une application linéaire continue bijective entre des Banach est un homéomorphisme) montre alors que l'inverse de l'identité (sic!) est continue, donc il existe $C > 0$ tel que $||f||_\infty \leq C||f||_{L^2}$ pour $f \in V$. Prenons une famille orthonormale $f_1, ..., f_n \in V$. On va montrer que $n \leq C^2 c$, ce qui permettra de conclure que $\dim V \leq C^2 c$. Pour tous $a_i \in \mathbf{C}$ on a

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)| \leq C \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$$

pour presque tout x. En prenant les a_i dans un ensemble dense dénombrable $Z \subset \mathbf{C}$, on obtient l'existence d'un ensemble de mesure nulle $T \subset X$ en dehors duquel on a l'inégalité précédente pour tous $a_i \in Z$. Pour $x \in X \setminus T$ on a la même inégalité pour tous les $a_i \in Z$, donc pour tous les $a_i \in \mathbf{C}$ (par densité), en particulier pour $a_i = \overline{f_i(x)}$, ce qui fournit

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leq C^2, \ x \in X \setminus T.$$

En intégrant cette inégalité on obtient $n \leq C^2 c$. □