Croissance des formes automorphes

Nous retournons enfin aux formes automorphes! Un premier but est de comprendre le lien entre $L^2(\Gamma\backslash G)$ et les formes automorphes sur G de niveau Γ. Une étude fine de la croissance de ces formes automorphes (qui utilise à fond les résultats de tous les cours précédents) nous permettra de démontrer[1] un théorème fondamental de finitude d'Harish-Chandra (encore lui...). Ce cours est particulièrement technique et difficile, il est conseillé de prendre $G = \mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$ (voire $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$...) partout...

On se donne un groupe algébrique connexe semi-simple[2] $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ défini sur $\mathbf{Q}$. Nous avons vu (cours 7) que $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$, donc $\mathbf{G} \subset \mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$. Si $\mathbf{H}$ est un groupe algébrique défini sur un sous-corps de $\mathbf{R}$, on écrira $H = \mathbf{H}(\mathbf{R})$. On note

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbf{G}), \quad \mathfrak{g}(\mathbf{R}) = \mathrm{Lie}(G),$$

de telle sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

On fixe aussi une fois pour toutes les données suivantes:

• un sous-groupe compact maximal K de $G = \mathbf{G}(\mathbf{R})$.

• un sous-groupe arithmétique $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbf{Q})$. Puisque $\mathbf{G}$ est semi-simple, Γ est un réseau de G (théorème de Borel et Harish-Chandra, cf. cours 7).

1 Un (autre) théorème de finitude de Harish-Chandra

Si $V \in \mathrm{Rep}(G)$ on note $HC(V)$ l'espace des vecteurs lisses, K-finis de V. Soit $\mathscr{A}(G,\Gamma) \subset HC(C(\Gamma\backslash G)) \subset C^\infty(\Gamma\backslash G)$ l'espace des formes automorphes pour G de niveau Γ (relativement à K). Rappelons le théorème d'harmonicité d'Harish-Chandra (cf. cours 4):

Théorème 1.1. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$ et $v \in HC(V)$ un vecteur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$-fini. Il existe $\alpha \in C_c^\infty(G)$ K-invariante[3] telle que $\alpha.v = v$.*

En prenant $V = C(\Gamma\backslash G)$ on obtient:

Corollaire 1.1. *Pour tout $f \in \mathscr{A}(G,\Gamma)$ il existe $\alpha \in C_c^\infty(G)$ telle que $f * \alpha = f$.*

Rappelons que tout $D \in U(\mathfrak{g})$ induit un endomorphisme $f \to D.f$ de $C^\infty(G)$ et on a $D.f(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(ge^{tD})$ si $D \in \mathfrak{g}(\mathbf{R})$.

[1] Enfin, presque...

[2] i.e. réductif, de centre fini. La plupart des énoncés sont vrais sans l'hypothèse de semi-simplicité, mais cette hypothèse permet d'éviter un certain nombre de contorsions, tout en gardant toute la difficulté...

[3] i.e. $\alpha(kgk^{-1}) = \alpha(k)$.

Lemme 1.1. *Si $f \in C^\infty(G)$ et $D \in U(\mathfrak{g})$, alors $D.(f * \alpha) = f * (D.\alpha)$.*

Proof. Il suffit de le faire pour $D \in \mathfrak{g}(\mathbf{R})$, dans quel cas

$$D.(f*\alpha)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_G f(xe^{tD}y^{-1})\alpha(y)dy = \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_G f(xz^{-1})\alpha(ze^{tD})dz = f*(D.\alpha)(x).$$

□

On posera

$$||g|| = \sqrt{\mathrm{Tr}(gg^*)} = \sqrt{\sum_{i,j} |g_{ij}|^2}.$$

Nous utiliserons systématiquement l'inégalité $||gg'|| \leq ||g|| \cdot ||g'||$. Puisque $\mathbf{G} \subset \mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$, on a[4] $||g|| \geq 1$ pour $g \in \mathbf{G}$ et on n'a pas besoin de travailler avec la norme plus compliquée utilisée dans la définition des formes automorphes.

Corollaire 1.2. *a) Pour tout $f \in \mathscr{A}(G, \Gamma)$ il existe N tel que*

$$\sup_{g \in G} \frac{|D.f(g)|}{||g||^N} < \infty \quad \forall D \in U(\mathfrak{g}).$$

b) $\mathscr{A}(G, \Gamma)$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module.

Proof. a) Prenons $\alpha \in C_c^\infty(G)$ telle que $f = f * \alpha$. Comme f est à croissance modérée, il existe N et $c > 0$ tels que $|f(g)| \leq c||g||^N$ pour tout $g \in G$. Si $D \in U(\mathfrak{g})$ on a $D.f = D.(f * \alpha) = f * (D.\alpha)$, donc (noter que $D.\alpha \in C_c^\infty(G)$)

$$|D.f(g)| = |\int_G f(gx^{-1})(D.\alpha)(x)dx| \leq c||g||^N \int_G ||x^{-1}||^N |(D.\alpha)(x)|dx,$$

ce qui permet de conclure.

b) La seule difficulté est de vérifier que $D.f$ est à croissance modérée quand $f \in \mathscr{A}(G, \Gamma)$ et $D \in U(\mathfrak{g})$, ce qui découle de a). □

Le théorème suivant est un des résultats fondamentaux de la théorie des formes automorphes. Nous allons démontrer un résultat plus faible[5] dans la suite de ce cours.

Théorème 1.2. *(Harish-Chandra) Soit J un idéal de codimension finie dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Le $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathscr{A}(G, \Gamma)[J] = \{f \in \mathscr{A}(G, \Gamma) | D.f = 0, \forall D \in J\}$ est admissible.*

2 Conséquences sur le spectre discret de $L^2(\Gamma \backslash G)$

Nous avons vu (cours 4) que si $\Gamma \backslash G$ est compact, alors $L^2(\Gamma \backslash G)$ possède une décomposition discrète

$$L^2(\Gamma \backslash G) = \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \hat{G}} \pi^{\oplus m(\pi)}, \ m(\pi) < \infty,$$

[4] Si X est une matrice hermitienne définie positive et telle que $\det(X) = 1$, on a $\mathrm{Tr}(X) \geq n$.

[5] En se restreignant à la partie cuspidale; c'est la partie la plus délicate de l'argument, mais il faut faire un peu de gymnastique pour déduire le cas général de cet énoncé plus faible...

où $\hat{G}$ est le dual unitaire[6] de G. Cela n'est plus vrai quand $\Gamma\backslash G$ n'est pas compact (par exemple $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$) et on considère plutôt l'espace $L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash G)$, défini comme l'adhérence de la somme des sous-représentations irréductibles de $L^2(\Gamma\backslash G)$. C'est le plus petit sous-espace fermé G-stable de $L^2(\Gamma\backslash G)$ contenant toutes les sous-représentations irréductibles de $L^2(\Gamma\backslash G)$. Par "general nonsense" on peut écrire

$$L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash G) = \widehat{\bigoplus_{\pi\in\hat{G}}} \pi^{\oplus m(\pi)},$$

avec

$$m(\pi) = \dim \operatorname{Hom}_G^{\text{cont}}(\pi, L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash G)) \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}.$$

Puisque $\pi \in \hat{G}$ est irréductible, tout morphisme G-équivariant continu $\pi \to L^2(\Gamma\backslash G)$ se factorise par $L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash G)$, donc $m(\pi) = \dim \operatorname{Hom}_G^{\text{cont}}(\pi, L^2(\Gamma\backslash G))$.

On se propose d'expliquer pourquoi le théorème 1.2 entraîne le beau:

Théorème 2.1. *(Harish-Chandra) On a $m(\pi) < \infty$ pour tout $\pi \in \hat{G}$, i.e. "le spectre discret possède une décomposition discrète" (sic!).*

La stratégie pour déduire le théorème 2.1 du théorème 1.2 est assez simple. Fixons $\pi \in \hat{G}$ et prenons $\tau \in \hat{K}$ tel que $HC(\pi)[\tau] \neq 0$. Soit $v \in HC(\pi)[\tau]$ non nul. Par le théorème de Segal (cours 4) il existe un idéal de codimension finie J de $U(\mathfrak{g})$ tel que $J.v = 0$. Pour tout $\varphi \in \operatorname{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G))$ la fonction $f = \varphi(v) \in HC(L^2(\Gamma\backslash G))$ est aussi $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$-finie. Nous allons voir que cela force $f \in \mathscr{A}(G,\Gamma)$, ce qui combiné à l'irréductibilité de π fournit une injection

$$\operatorname{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \to \mathscr{A}(G,\Gamma)[J](\tau), \varphi \to \varphi(v).$$

Or l'espace $\mathscr{A}(G,\Gamma)[J](\tau)$ est de dimension finie par le théorème 1.2, donc $m(\pi) < \infty$. Il nous reste à expliquer pourquoi $f \in \mathscr{A}(G,\Gamma)$. La partie difficile est la croissance modérée de f. Pour cela nous aurons besoin d'un résultat préliminaire très technique, mais bien utile (à plusieurs endroits dans ce cours...).

Théorème 2.2. *Il existe un entier $N \geq 1$ tel que*

$$\forall \alpha \in C_c^\infty(G) \text{ on a } \sup_{f\in L^1(\Gamma\backslash G)\backslash\{0\}, x\in G} \frac{|f*\alpha(x)|}{||x||^N ||f||_{L^1}} < \infty.$$

Proof. En posant $K_x(y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\alpha(y^{-1}\gamma x)|$, on a pour $f \in L^1(\Gamma\backslash G)$ et $x \in G$

$$|f*\alpha(x)| = |\int_G f(y)\alpha(y^{-1}x)dy| \leq \int_G |f(y)|\cdot|\alpha(y^{-1}x)|dy = \int_{\Gamma\backslash G} |f(y)|K_x(y)dy.$$

Il suffit donc de montrer l'existence d'un $N \geq 1$ tel que

$$\forall \alpha \in C_c^\infty(G)\ \exists c_\alpha > 0\ \forall x, y \in G\ K_x(y) \leq c_\alpha ||x||^N.$$

Soit $\alpha \in C_c^\infty(G)$ et soit S un compact contenant le support de α. Chaque $|\alpha(x\gamma y^{-1})|$ est majoré par $||\alpha||_\infty$, donc il suffit de montrer qu'il existe au plus $c_\alpha ||x||^N$ termes non nuls dans la somme définissant $K_x(y)$ (pour certains c_α, N, et tout x).

[6] Ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles unitaires de G.

Si $\alpha(y^{-1}\gamma x)$ et $\alpha(y^{-1}\gamma' x)$ sont non nuls, alors $y^{-1}\gamma x \in S, y^{-1}\gamma' x \in S$, ce qui donne

$$x^{-1}(\gamma')^{-1}\gamma x = (y^{-1}\gamma' x)^{-1} \cdot (y^{-1}\gamma x) \in S^{-1}S$$

et enfin $(\gamma')^{-1}\gamma \in xS^{-1}Sx^{-1}$. Il existe N ne dépendant que de G et $c_\alpha > 0$ (ne dépendant que de S) tel que $||xgx^{-1}|| \leq c_\alpha ||x||^N$ pour tout $x \in G$ et $g \in SS^{-1}$ (utiliser la compacité de SS^{-1} et l'inégalité $||x^{-1}|| \leq c'||x||^M$ sur G, pour des constantes c', M ne dépendant que de G). On en déduit que $(\gamma')^{-1}\gamma \in \Gamma_{c_\alpha ||x||^N}$, où

$$\Gamma_a = \{\gamma \in \Gamma |\ ||\gamma|| \leq a\}.$$

Il suffit donc de montrer l'existence de constantes C, M telles que pour tout $a > 0$ on ait $|\Gamma_a| \leq C||a||^M$. Ecrivons $\Gamma = \coprod_{i\in I} \gamma_i(\Gamma \cap G(\mathbf{Z}))$ pour un ensemble fini I et certains $\gamma_i \in \Gamma$. Si $\gamma_i\gamma \in \Gamma_a$, alors $\gamma \in G(\mathbf{Z})_{a||\gamma_i^{-1}||}$, donc il suffit de démontrer l'énoncé avec $\Gamma = G(\mathbf{Z})$. Puisque $G(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$, il suffit de montrer qu'il existe c, N tels que pour tout $a > 0$ il y a au plus ca^N matrices $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ telles que $||A|| \leq a$. Cela est évident: si $a < 1$ il n'y a clairement pas de telle matrice, donc on peut supposer $a \geq 1$. Dans ce cas $|a_{ij}| \leq a$ pour tous i, j, donc on a au plus $2a + 1 \leq 3a$ possibilités pour a_{ij} et donc le nombre de A est majoré par $(3a)^{n^2}$. □

Corollaire 2.1. *Si $f \in HC(L^2(\Gamma\backslash G))$ est une fonction $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$-finie, alors:*

a) $f \in \mathscr{A}(G, \Gamma)$.

b) $f \in L^2(\Gamma\backslash G)_{\text{disc}}$, plus précisément $\overline{\mathbf{C}[G]f} \subset L^2(\Gamma\backslash G)$ est une somme finie de sous-espaces fermés irréductibles.

Proof. a) Il suffit de montrer que f est à croissance modérée. Le théorème d'harmonicité assure l'existence d'une fonction $\alpha \in C_c^\infty(G)$ telle que $f = f * \alpha$. En particulier f est[7] C^∞. On conclut en appliquant le théorème 2.2, en remarquant que $L^2(\Gamma\backslash G) \subset L^1(\Gamma\backslash G)$ puisque Γ est un réseau de G.

b) Il suffit de démontrer le deuxième point. Soit $V = L^2(\Gamma\backslash G)$ et $W = \overline{\mathbf{C}[G]f}$. On a vu (cours 5) que W est admissible. Prenons $\tau_1, ..., \tau_n \in \hat{K}$ tels que $f \in \sum_i W(\tau_i)$. Nous allons montrer que si $X \subset W$ est fermé, G-stable et $X \neq 0$, alors $\sum_i X(\tau_i) \neq 0$. En effet, on a $W = X \oplus X^\perp$, donc si $\sum_i X(\tau_i) = 0$ alors $\sum_i W(\tau_i) = \sum_i X^\perp(\tau_i)$ et donc $f \in X^\perp$ et $X^\perp = W$ (par densité de $\mathbf{C}[G]f$ dans W), une contradiction.

On en déduit que si $X_1, ..., X_d$ sont des sous-espaces fermés, G-stables non nuls de W, deux à deux orthogonaux alors

$$d \leq \sum_{i=1}^d \dim(\sum_j X_i(\tau_j)) \leq \sum_j \dim W(\tau_j),$$

la dernière quantité étant finie par admissibilité de W. Donc d est borné et le résultat s'en déduit immédiatement. □

Remarque 2.3. En combinant les résultats ci-dessus, on obtient (avec un peu de travail, cf. exercice ci-dessous...)

$$\mathscr{A}(G,\Gamma) \cap L^2(\Gamma\backslash G) = HC(L^2(\Gamma\backslash G))^{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})-\text{fini}} = HC(L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash G))^{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})-\text{fini}} = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} HC(\pi)^{\oplus m(\pi)}.$$

[7]Plutôt: quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer qu'elle est lisse...

Exercice 2.4. Donner une preuve complète de l'assertion faite dans la remarque précédente.

Le reste de ce cours est destiné à la preuve d'un résultat plus faible (mais qui en constitue le coeur) que le théorème 1.2, où l'on remplace $\mathscr{A}(G,\Gamma)$ par un sous-espace $\mathscr{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\Gamma)$ des "formes automorphes cuspidales", à définir.

3 Formes cuspidales

Soit $\mathbf{P}$ un $\mathbf{Q}$-parabolique de $\mathbf{G}$, de radical unipotent $\mathbf{U}$. Notons que $U\cap\Gamma\backslash U$ est compact, car $U\cap\Gamma$ est arithmétique dans U et $\mathbf{U}$ est un $\mathbf{Q}$-groupe formé de matrices unipotentes (cf. cours 7). On normalise la mesure de Haar (quotient) sur $U\cap\Gamma\backslash U$ de telle sorte qu'il soit de masse totale 1.

Si $f\in C(G)$ on définit le **terme constant de** f **le long de** P $f_P\in C(G)$ par

$$f_P(g)=\int_{U\cap\Gamma\backslash U} f(ug)du.$$

L'intégrale a un sens d'après la discussion ci-dessus.

Définition 3.1. On note $\mathscr{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\Gamma)$ le sous-espace des **formes cuspidales** $f\in\mathscr{A}(G,\Gamma)$, i.e. telles que $f_P=0$ pour tout $\mathbf{Q}$-parabolique **propre** $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$.

Exercice 3.1. Montrer que $\mathscr{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\Gamma)$ est un sous $(\mathfrak{g},K)$-module de $\mathscr{A}(G,\Gamma)$.

La preuve du résultat suivant est repoussée à un paragraphe ultérieur, car elle est fort technique et fastidieuse...

Théorème 3.2. *Toute forme automorphe cuspidale est bornée, donc dans* $L^2(\Gamma\backslash G)$.

En utilisant le résultat ci-dessus, nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental ci-dessous:

Théorème 3.3. *(Harish-Chandra) Soit* J *un idéal de codimension finie dans* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. *Le* $(\mathfrak{g},K)$*-module* $\mathscr{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\Gamma)[J]=\{f\in\mathscr{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\Gamma)|\,D.f=0,\,D\in J\}$ *est admissible.*

Proof. Fixons $\tau\in\hat{K}$ et notons simplement $X=\mathscr{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\Gamma)[J](\tau)$. On veut montrer que X est de dimension finie. Nous savons déjà (théorème ci-dessus) que X est un sous-espace de $L^2(\Gamma\backslash G)$ formé de fonctions bornées. Par le lemme de Godement (cf. cours 4), il suffit de voir que X est fermé dans $L^2(\Gamma\backslash G)$. C'est assez délicat. Soit f_n une suite dans X qui converge en norme L^2 vers $f\in L^2(\Gamma\backslash G)$. Il faut voir que $f\in X$.

Etape 1 Montrons d'abord que $f\in L^2(\Gamma\backslash G)(\tau)$. Soit $e_\tau\in C(K)$ l'idempotent associé à τ. Il suffit de voir que $F\to e_\tau.F$ est continu sur $L^2(\Gamma\backslash G)$, car alors on aura $f=e_\tau.f$ en passant à la limite dans $f_n=e_\tau.f_n$. La continuité découle des estimées suivantes:

$$\int_{\Gamma\backslash G}|e_\tau.F(g)|^2dg=\int_{\Gamma\backslash G}|\int_K e_\tau(k)F(gk)dk|^2\le\int_{\Gamma\backslash G}(\int_K|e_\tau(k)|^2dk)(\int_K|F(gk)|^2dk)dg$$

$$\le c_\tau\int_{\Gamma\backslash G}\int_K|F(gk)|^2dgdk=c_\tau\int_{\Gamma\backslash G}|F(g)|^2\to 0.$$

Etape 2 Montrons que f est lisse (plutôt: f possède un représentant lisse...) et $J.f = 0$. Pour toute fonction localement intégrable F sur G on introduit la distribution D_F

$$D_F(\varphi) = \int_G \varphi(g)F(g)dg, \quad \varphi \in C_c^\infty(G).$$

Il existe un unique anti-automorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres $U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}), D \to \check{D}$, tel que $\check{D} = -D$ pour $D \in \mathfrak{g}$. De plus, si $F \in C^\infty(G)$ et $\varphi \in C_c^\infty(G)$, alors $\int_G (D.F)(g)\varphi(g)dg = \int_G \check{D}\varphi(g)F(g)dg$, autrement dit $D_{D.F}(\varphi) = D_F(\check{D}\varphi)$. En effet, il suffit de le faire quand $D \in \mathfrak{g}(\mathbf{R})$, et alors c'est un calcul immédiat.

Montrons que $J.D_f = 0$ au sens des distributions, i.e. $D_f(\check{D}.\varphi) = 0$ pour $D \in J$ et $\varphi \in C_c^\infty(G)$. Mais $D.f_n = 0$ pour tout n, donc d'après ce qui précède $D_{f_n}(\check{D}.\varphi) = 0$. D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $\lim_{n\to\infty} D_{f_n}(\check{D}.\varphi) = D_f(\check{D}.\varphi)$, donc $D_f(\check{D}.\varphi) = 0$.

Ainsi la distribution D_f est K-finie et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$-finie (tuée par J). Par le théorème de régularité elliptique il existe F analytique réelle sur G telle que $D_f = D_F$. Alors f et F coincident presque partout, donc quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle on peut supposer que f est analytique réelle. Alors $J.f = 0$ puisque $J.D_f = 0$.

Etape 3 Montrons que f est à croissance modérée. Comme f est lisse et $K, \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$-finie, le théorème d'harmonicité fournit $\alpha \in C_c^\infty(G)$ telle que $f = f * \alpha$. Le théorème 2.2 combiné au fait que $f \in L^1(\Gamma\backslash G)$ (car Γ est un réseau dans G) fournit N et c tels que $|f * \alpha(x)| \leq c||x||^N \cdot ||f||_{L^1}$ pour tout x. Comme $f = f * \alpha$, on voit que f est à croissance modérée.

Etape 4 Enfin, il reste à voir que f est cuspidale. C'est assez subtil... Fixons un $\mathbf{Q}$-parabolique propre $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ (s'il n'y en a pas, tant mieux!), de radical unipotent $\mathbf{U}$. On veut montrer que la fonction U-invariante $f_P : g \to \int_{U\cap\Gamma\backslash U} f(ug)du$ est nulle. Il suffit de voir que pour toute fonction test $\varphi \in C_c(U\backslash G)$ on a $\int_{U\backslash G} \varphi(g)f_P(g)dg = 0$. Puisque φ est invariante à gauche par U et que f est invariante à gauche par Γ

$$\int_{U\backslash G} \varphi(g)f_P(g)dg = \int_{U\backslash G} \varphi(g) \int_{U\cap\Gamma\backslash U} f(ug)du$$

$$= \int_{U\cap\Gamma\backslash G} \varphi(g)f(g)dg = \int_{\Gamma\backslash G} f(g)(\sum_{\gamma\in U\cap\Gamma\backslash\Gamma} \varphi(\gamma g))dg.$$

On a les mêmes identités avec f_n à la place de f pour tout n, et on sait que pour tout n les quantités en question sont nulles par cuspidalité de f_n. Il suffit donc de voir que la fonction $H(g) = \sum_{\gamma\in U\cap\Gamma\backslash\Gamma} \varphi(\gamma g)$ est bornée sur $\Gamma\backslash G$, car alors $\int_{\Gamma\backslash G} f(g)H(g)dg$ est la limite des $\int_{\Gamma\backslash G} f_n(g)H(g)dg = 0$.

Pour montrer que H est bornée, il suffit de montrer qu'il existe N tel que pour tout $g \in G$ il y a au plus N éléments $\gamma \in U \cap \Gamma\backslash\Gamma$ avec $\varphi(\gamma g) \neq 0$. On peut écrire $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset UK_1$ pour un compact K_1 et $U \subset (U \cap \Gamma)K_2$ pour un compact K_2, donc $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset (U \cap \Gamma)C$ pour un compact C. Le nombre des $\gamma \in U \cap \Gamma\backslash\Gamma$ tels que $\gamma g \in (U \cap \Gamma)C$ est majoré par le nombre des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma g \in C$. Ensuite, si $\gamma_1 g \in C$ et $\gamma_2 g \in C$, alors $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in CC^{-1} \cap \Gamma$. On peut donc prendre $N = |\Gamma \cap CC^{-1}|$, en notant que $N < \infty$ car Γ est discret et CC^{-1} est compact. $\square$

Le reste de ce cours est consacré à la preuve du théorème 3.2. Cela demande un certain nombre de préliminaires...

4 Un théorème fort technique...

On veut montrer que toute forme cuspidale est bornée sur G. Dans une première étape on utilise un théorème fort délicat de Borel pour se ramener à un problème de croissance sur des ensembles de Siegel. Dans un deuxième temps on étudie ce problème via l'analyse de Fourier. Tout ceci est malheureusement horriblement technique...

4.1 Théorie de la réduction

On fixe une fois pour toutes un tore $\mathbf{S}$ déployé sur $\mathbf{Q}$ maximal de $\mathbf{G}$, ainsi qu'un $\mathbf{Q}$-parabolique minimal $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$, ayant pour décomposition de Levi $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$, avec $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{Z_G}(\mathbf{S})$ (un groupe réductif connexe sur $\mathbf{Q}$).

Comme nous avons vu dans le cours 7, on a une décomposition

$$L = A \times M, \quad A := \mathbf{S}(\mathbf{R})^0, \, \mathbf{M} := \cap_{\chi \in X(\mathbf{L})_\mathbf{Q}} \ker(\chi^2).$$

De plus, on peut écrire

$$\mathrm{Lie}(U) = \sum_{\alpha \in \Phi_\mathbf{Q}^+} \mathfrak{g}_\alpha^\mathbf{Q}(\mathbf{R})$$

pour un système de racines positives $\Phi_\mathbf{Q}^+$ dans le système de racines relatif $\Phi_\mathbf{Q} \subset X(\mathbf{S})$ associé à $\mathbf{S}$. On a posé

$$\mathfrak{g}_\alpha^\mathbf{Q}(\mathbf{R}) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathbf{R}) |\, sXs^{-1} = \alpha(s)X, \, \forall\, s \in \mathbf{S}\}.$$

La décomposition de Levi de $\mathbf{P}$ fournit $P = UL$ (produit semi-direct), qui combinée à $L = A \times M$ induit la **décomposition de Langlands**[8]

$$P = UAM = UMA.$$

Noter que A et M commutent car A est dans le centre de L.

Le théorème principal de la "théorie de la réduction" s'énonce alors:

Théorème 4.1. *(Borel) Il existe un voisinage compact ω de 1 dans UM, un nombre $t > 0$ et un ensemble fini $\Sigma \subset G(\mathbf{Q})$ tels qu'en posant*

$$\mathscr{S} = \omega A_t K, \quad A_t = \{a \in A| \;\; \alpha(a) \geq t, \;\forall\; \alpha \in \Phi_\mathbf{Q}^+\}$$

on ait $G = \Gamma \cdot \Sigma \cdot \mathscr{S}$.

Proof. Th. 13.1 dans le livre de Borel. La preuve est franchement technique... □

Remarque 4.2. a) Le théorème précédent est valable pour tout groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{Q}$, pas forcément semi-simple. Il n'est pas très difficile de montrer que $\mathscr{S}$ est de volume fini quand $X(G)_\mathbf{Q} = 1$ (la preuve est très semblable à celle pour $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$), ce qui permet de déduire le théorème de Borel et Harish-Chandra énoncé dans le cours 7.

[8] Plus précisément, l'application produit $U \times M \times A \to P$ est bijective.

b) L'ensemble $\mathscr{S}$ dans le théorème ci-dessus est appelé **l'ensemble de Siegel de paramètres t, ω (relativement à K)**. C'est une généralisation des ensembles de Siegel vus pour $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$ dans le cours 7. Leur propriété cruciale est la suivante:

Si $\Omega \subset UM$ est compact, alors $\cup_{a\in A_t} a^{-1}\Omega a$ est relativement compact.[9]. En effet, comme A et M commutent, on peut supposer que $\Omega \subset U$. On utilise ensuite l'homéomorphisme $\mathrm{Lie}(U) \simeq U$ induit par l'exponentielle. Il suffit donc de démontrer que $\cup_{a\in A_t}\mathrm{Ad}(a^{-1})(C)$ est relativement compact quand $C \subset \mathrm{Lie}(U)$ l'est. Cela est immédiat: si $X \in C$, on écrit $X = \sum_{\alpha\in\Phi^+_{\mathbf{Q}}} X_\alpha$, alors les X_α restent dans un compact et $a^{-1}Xa = \sum_\alpha \alpha^{-1}(a)X_\alpha$, et les $\alpha^{-1}(a)$ restent bornés quand $a \in A_t$, par définition.

Exercice 4.3. Décrire explicitement tous ces objets pour $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$, $\mathbf{S} = \mathbf{G} \cap D_n(\mathbf{C})$ et $\mathbf{P}$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dans $\mathbf{G}$. Démontrer le théorème ci-dessus dans ce cas.

On choisit une fois pour toutes $\mathscr{S}$ et Σ comme dans le théorème 4.1 et on pose

$$\Gamma_\infty = U \cap \cap_{\xi\in\Sigma}\xi^{-1}\Gamma\xi,$$

un sous-groupe arithmétique de $\mathbf{U}(\mathbf{Q})$, donc co-compact dans U. Ainsi, en prenant ω suffisamment grand, **on peut et on va supposer que $\Gamma_\infty\mathscr{S} = U\mathscr{S}$**. Cela sera utile pour contrôler les termes constants dans les estimées à venir.

4.2 Croissance sur l'ensemble de Siegel $\mathscr{S}$

Revenons un peu au groupe $A = \mathbf{S}(\mathbf{R})^0$. Il est isomorphe à $\mathbf{R}^d_{>0}$ pour un certain d, car $\mathbf{S}$ est déployé sur $\mathbf{Q}$ (donc sur $\mathbf{R}$). Son algèbre de Lie

$$\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$$

s'identifie à $\mathbf{R}^d$ et l'exponentielle $\mathfrak{a} \to A$ est un isomorphisme, dont on note $\log : A \to \mathfrak{a}$ l'inverse. Soit

$$X(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.Lie}}(A, \mathbf{R}_{>0}).$$

On a une identification naturelle

$$X(A) \simeq \mathfrak{a}^*, \chi \in X(A) \to d\chi(1) \in \mathfrak{a}^*,$$

l'inverse envoyant $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ sur l'élément encore noté λ de $X(A)$, défini par $\lambda : a \to e^{\lambda(\log a)}$.

Chaque $\lambda \in X(A)$ s'étend en une application (pas un morphisme de groupes!) $\lambda : G \to \mathbf{R}_{>0}$ comme suit. On a $G = PK = UMAK$, et dans la décomposition $g = umak$ l'élément $a \in A$ est unique, ce qui permet de poser $\lambda(g) = \lambda(a)$. On a $\lambda(umxk) = \lambda(x)$ pour $u \in U, k \in K, m \in M$ et $x \in G$. Cela donne un sens à la définition suivante:

Définition 4.1. Si $\lambda \in X(A)$, $D \in U(\mathfrak{g})$ et $f \in C^\infty(G)$ on note

$$||f||_\lambda = \sup_{x\in\mathscr{S}} |f(x)|\lambda(x), ||f||_{D,\lambda} = ||D.f||_\lambda$$

et

$$C^\infty(\lambda) = \{f \in C^\infty(\Gamma_\infty\backslash G) |\ ||f||_{D,\lambda} < \infty\ \forall\, D \in U(\mathfrak{g})\},$$

muni des semi-normes $||\cdot||_{D,\lambda}$ pour $D \in U(\mathfrak{g})$.

[9] i.e. d'adhérence compacte

Soit $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ la base associé au système de racines positives $\Phi^+_{\mathbf{Q}}$, i.e. Δ est l'ensemble des $\alpha \in \Phi^+_{\mathbf{Q}}$ qui ne peuvent pas s'écrire comme la somme de deux éléments de $\Phi^+_{\mathbf{Q}}$. La théorie générale des systèmes de racines (cf. cours 6 pour des rappels) montre que Δ est une famille libre dans $X(\mathbf{S}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \simeq \mathfrak{a}^*$ et que

$$\Phi^+_{\mathbf{Q}} = \Phi_{\mathbf{Q}} \cap (\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{Z}_{\geq 0}\alpha).$$

Puisque $\mathbf{G}$ est semi-simple, $\alpha_1, ..., \alpha_l$ forment une base de $\mathfrak{a}^*$. Ainsi, tout $\lambda \in X(A)$ s'écrit de manière unique $\lambda(a) = \prod_{i=1}^l \alpha_i(a)^{r_i}$, avec $r_i \in \mathbf{R}$. Le résultat suivant fait le lien entre les espaces introduits ci-dessus et les formes automorphes:

Proposition 4.1. *Soit $f \in \mathscr{A}(G, \Gamma)$. Il existe $\lambda \in X(A)$ tel que pour tout $\xi \in \Sigma$ la fonction $f_\xi : x \to f(\xi x)$ soit dans $C^\infty(\lambda)$.*

Proof. Prenons N tel que pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$ il existe $c_D > 0$ tel que $|D.f(g)| \leq c_D ||g||^N$ pour tout g (cf. cor. 1.2). Si $\xi \in \Sigma$ et $x \in \mathscr{S}$ on a

$$|D.f_\xi(x)| \cdot \lambda(x) = |(D.f)(\xi x)| \cdot \lambda(x) \leq c_D ||\xi||^N \cdot ||x||^N \cdot \lambda(x).$$

Il suffit donc de montrer l'existence d'un $\lambda \in X(A)$ tel que $\sup_{x \in \mathscr{S}} \lambda(x)||x||^N < \infty$. Pour cela, on peut supposer que $N = 1$ (si λ_1 marche pour $N = 1$, alors λ_1^N marche en général). Si $x = \Omega ak \in \mathscr{S} = \omega A_t K$, on a $\lambda(x)||x|| \leq c||a||e^{\lambda(\log a)}$ pour une constante c dépendant de K et ω. On veut donc trouver $\lambda \in X(A)$ et $C > 0$ tels que $||a|| \leq C\lambda(a)$ pour $a \in A_t$. Notons $\chi_1(a), ..., \chi_n(a)$ les valeurs propres de $a \in A$. En diagonalisant $\mathbf{S}$ (ce qui diagonalise $A = \mathbf{S}(\mathbf{R})^0$) on voit que $\chi_i \in X(A)$ et que $||a|| \leq C_1 \max(\chi_1(a), ..., \chi_n(a))$ pour une certaine constante C_1 et tout $a \in A$. Il suffit donc de montrer l'existence d'un $\lambda \in X(A)$ et d'une constante C_2 telle que

$$\max(\chi_1(a), ..., \chi_n(a)) \leq C_2 \lambda(a)$$

pour $a \in A_t$. Ecrivons $\chi_i(a) = \prod_{j=1}^l \alpha_j(a)^{b_{ij}}$ pour certains $b_{ij} \in \mathbf{R}$ et tout $a \in A$. Notons $b_j = \max_i b_{ij}$. Si $a \in A_t$, on a $\alpha_j(a)/t \geq 1$, donc $(\alpha_j(a)/t)^{b_{ij}} \leq (\alpha_j(a)/t)^{b_j}$ et $\chi_i(a) \leq t^{\sum_j b_{ij} - \sum_j b_j} \prod_j \alpha_j(a)^{b_j}$. Il suffit donc de prendre $\lambda = \prod_j \alpha_j^{b_j}$ et C_2 une puissance convenable de t. $\square$

4.3 L'estimée fondamentale

Rappelons que $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ est la base associée à $\Phi^+_{\mathbf{Q}}$. Chaque $\alpha \in \Delta$ donne naissance à un $\mathbf{Q}$-parabolique maximal $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ contenant $\mathbf{P}$, tel que

$$\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \sum_{\beta \in \Phi^+_{\mathbf{Q}} \setminus \mathrm{Vect}(\Delta - \{\alpha\})} \mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_\beta(\mathbf{R}).$$

On voit facilement que U_α est un sous-groupe distingué de U. On écrit simplement

$$\pi_\alpha f := f_{P_\alpha} : g \to \int_{U_\alpha \cap \Gamma_\infty \setminus U_\alpha} f(ug) du$$

le terme constant de $f \in C^\infty(\Gamma_\infty \setminus G)$ le long de P_α (en prenant la mesure de Haar donnant une masse totale 1 à l'espace compact $U_\alpha \cap \Gamma_\infty \setminus U_\alpha$).

Exercice 4.4. Montrer que $\pi_\alpha f \in C^\infty(\Gamma_\infty \backslash G)$ et que pour tous $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et $D \in U(\mathfrak{g})$ on a $||\pi_\alpha f||_{D,\lambda} \leq ||f||_{D,\lambda}$. Indication: utiliser l'égalité $\Gamma_\infty \mathscr{S} = U\mathscr{S}$.

La preuve du théorème fondamental suivant est repoussée à un paragraphe ultérieur, car elle est très technique (bien que l'idée soit finalement assez simple).

Théorème 4.5. *Soient $\alpha \in \Delta$, $\lambda \in X(A) \simeq \mathfrak{a}^*$ et $\lambda' \in \lambda + \mathbf{R}\alpha$. Si $f \in C^\infty(\lambda)$, alors $f - \pi_\alpha f \in C^\infty(\lambda')$ l'opérateur ainsi obtenu $1 - \pi_\alpha : C^\infty(\lambda) \to C^\infty(\lambda')$ est continu, i.e. pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$ il existe un nombre fini $D_1, ..., D_N$ d'éléments de $U(\mathfrak{g})$ tels que*

$$||(1-\pi_\alpha)f||_{D,\lambda'} \leq \sum_{i=1}^{N} ||f||_{D_i,\lambda}, \ \forall f \in C^\infty(\lambda).$$

Soit

$$C^\infty(\lambda)_{\text{cusp}} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} C^\infty(\lambda)^{\pi_\alpha = 0}.$$

Corollaire 4.1. *Soit $\lambda \in X(A)$. On a une inclusion continue $C^\infty(\lambda)_{\text{cusp}} \subset C^\infty(\lambda')$ pour tout $\lambda' \in X(A)$.*

Proof. Si $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, on obtient par récurrence que $(1-\pi_{\alpha_1}) \circ ... \circ (1-\pi_{\alpha_j}) : C^\infty(\lambda) \to C^\infty(\lambda')$ est un opérateur continu pour tout $\lambda' \in \lambda + \sum_{i=1}^{j} \mathbf{R}\alpha_i$. Pour $j = l$ on a $\lambda + \sum_{i=1}^{j} \mathbf{R}\alpha_i = \mathfrak{a}^* = X(A)$, donc $\prod_{i=1}^{l}(1-\pi_{\alpha_i}) : C^\infty(\lambda) \to C^\infty(\lambda')$ est continu pour tout $\lambda' \in \mathfrak{a}^* = X(A)$. Mais cet opérateur est simplement l'identité sur $C^\infty(\lambda)_{\text{cusp}}$, ce qui permet de conclure. □

Nous sommes **enfin** en mesure de démontrer le théorème 3.2:

Corollaire 4.2. *Toute forme cuspidale $f \in \mathscr{A}_{\text{cusp}}(G, \Gamma)$ est bornée, donc dans $L^2(\Gamma \backslash G)$.*

Proof. Comme f est invariante à gauche par Γ et $G = \Gamma\Sigma\mathscr{S}$, il suffit de voir que chacune des fonctions $f_\xi : x \to f(\xi x)$ est bornée sur $\mathscr{S}$ (rappelons que Σ est fini!). On laisse au lecteur de se convaincre que f_ξ est tuée par tous les π_α (utiliser l'annulation du terme constant de f le long d'un conjugué convenable de $\mathbf{P}_\alpha$). Fixons $\xi \in \Sigma$. La proposition 4.1 montre qu'il existe $\lambda \in X(A)$ tel que $f_\xi \in C^\infty(\lambda)$, et le corollaire 4.1 donne $f_\xi \in C^\infty(0)$, donc f_ξ est bornée sur $\mathscr{S}$. □

4.4 Preuve de la majoration fondamentale

La preuve du théorème 4.5 n'est pas très difficile, mais fort fastidieuse. L'idée est essentiellement de se ramener à de l'analyse de Fourier sur un groupe compact abélien, et d'exploiter le fait que les coefficients de Fourier d'une fonction lisse tendent vers 0 très rapidement. C'est plus facile à dire qu'à faire...

Fixons $\alpha \in \Delta$ et $\lambda' \in \lambda + \mathbf{R}\alpha$. On veut montrer que pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$ il existe un nombre fini de $D_i \in U(\mathfrak{g})$ tels que

$$||D.(f - \pi_\alpha f)||_{\lambda'} \leq \sum_i ||f||_{D_i,\lambda}, \ \forall f \in C^\infty(\lambda).$$

Etape 1 On se ramène à $D = 1$. En effet, il suffit de remarquer que $D \circ \pi_\alpha = \pi_\alpha \circ D$, ce qui se montre par un calcul immédiat pour $D \in \mathfrak{g}(\mathbf{R})$, le cas général s'en déduisant. Si on sait faire le cas $D=1$, le cas général s'en déduit.

Etape 2 On se ramène à un problème d'analyse de Fourier abélienne. Pour cela nous allons filtrer U_α par des sous-groupes distingués

$$1 = U_0 \subset U_1 \subset ... \subset U_d = U_\alpha$$

tels que
• $U_{i-1}\backslash U_i \simeq \mathbf{R}$ et $\Gamma_\infty \cap U_i\backslash U_i$ est compact.
• Chaque U_i est normalisé par A.
• A agit sur $U_{i-1}\backslash U_i$ par un caractère β_i tel que $\beta_i(a) \geq c_i\alpha(a)$ pour une constante $c_i > 0$ et tout $a \in A_t$.

Prenons $l \in X(\mathbf{S})^*_{\mathbf{R}}$ telle que $l(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in \Phi_{\mathbf{Q}}$ et $\Phi^+_{\mathbf{Q}} = \{\alpha \in \Phi_{\mathbf{Q}} |\, l(\alpha) > 0\}$. Cela nous permet d'ordonner $\Phi_{\mathbf{Q}}$. Notons

$$\Phi^+_{\mathbf{Q}} \cap \mathrm{Vect}(\Delta \setminus \{\alpha\}) = \{\beta_1 > ... > \beta_s\}$$

les racines apparaissant dans $\mathrm{Lie}(U_\alpha)$. Chaque β_i s'écrit $\beta_i = \alpha + \sum_{\beta\in\Delta} n_\beta \beta$, avec $n_\beta \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, donc pour $a \in A_t$ on a

$$\beta_i(a) = \alpha(a) \prod_{\beta\in\Delta} \beta(a)^{n_\beta} \geq t^{\sum n_\beta}\alpha(a) = c_i\alpha(a).$$

Considérons

$$\mathfrak{u}_i = \mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_1} + ... + \mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_i}.$$

Je dis que $[\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_i] \subset \mathfrak{u}_{i-1}$, avec $\mathfrak{u}_\alpha = \mathrm{Lie}(\mathbf{U}_\alpha) = \sum_{i=1}^s \mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_i}$. Cela est immédiat en utilisant l'inclusion $[\mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_u}, \mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_v}] \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_u+\beta_v}$ et le fait que $\beta_u + \beta_v > \beta_v$ (si $\beta_u + \beta_v \in \Phi_{\mathbf{Q}}$, sinon on n'a rien à faire). Puisque $\mathfrak{u}_i$ est formée de matrices nilpotentes (car $\mathfrak{u}$ l'est) et les $\mathfrak{g}^{\mathbf{Q}}_{\beta_u}$ sont définis sur $\mathbf{Q}$, on en déduit que $\mathbf{U}_i = e^{\mathfrak{u}_i}$ est un sous-groupe algébrique défini sur $\mathbf{Q}$, distingué dans $\mathbf{U}_\alpha$, normalisé par A. De plus, les quotients $\mathbf{U}_{i-1}\backslash\mathbf{U}_i$ sont des groupes algébriques commutatifs définis sur $\mathbf{Q}$, dont les éléments sont des matrices unipotentes, et A y agit par β_i. Si $\mathbf{V}$ est un groupe algébrique commutatif défini sur $\mathbf{Q}$ et formé de matrices unipotentes, l'exponentielle et le logarithme fournissent des isomorphismes de $\mathbf{Q}$-groupes algébriques $\mathbf{V} \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{V})$, donc $\mathbf{V}$ se filtre par des sous-groupes algébriques définis sur $\mathbf{Q}$, distingués $\mathbf{V}_0 \subset ... \subset \mathbf{V}_r$ et tels que $\mathbf{V}_{i-1}\backslash\mathbf{V}_i \simeq \mathbf{C}$. En filtrant ainsi chaque $\mathbf{U}_{i-1}\backslash\mathbf{U}_i$, on obtient au bout du compte une filtration par des sous-groupes distingués définis sur $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{U}'_0 \subset ... \subset \mathbf{U}'_r = \mathbf{U}_\alpha$$

avec $\mathbf{U}'_{i-1}\backslash\mathbf{U}'_i \simeq \mathbf{C}$ et chaque $\mathbf{U}'_i$ est normalisé par A, qui agit sur $\mathbf{U}'_{i-1}\backslash\mathbf{U}'_i$ par un des caractères $\beta_1, ..., \beta_s$. Il suffit alors de poser $U_i = \mathbf{U}'_i(\mathbf{R})$ (noter que $\Gamma_\infty \cap U_i\backslash U_i$ est bien compact d'après le cours 7).

Etape 3 En posant

$$\pi_{U_i} f(g) = \int_{\Gamma_\infty\cap U_i\backslash U_i} f(ug)du,$$

avec $\mathrm{vol}(\Gamma_\infty \cap U_i\backslash U_i) = 1$, on obtient

$$||f - \pi_\alpha f||_{\lambda'} \leq \sum_{i=1}^{d} ||\pi_{U_{i-1}} f - \pi_{U_i} f||_{\lambda'}.$$

On va estimer chaque terme dans la somme.

Fixons $i \in \{1, ..., d\}$ et notons simplement

$$F = \pi_{U_{i-1}} f, \;\; V_i = U_{i-1} \backslash U_i \simeq \mathbf{R}, \, \Gamma_i = \Gamma_\infty \cap U_i.$$

Soit $\bar{\Gamma}_i$ l'image de $\Gamma_i \subset U_i$ dans V_i, un réseau dans $V_i \simeq \mathbf{R}$. La projection canonique $U_i \to V_i$ induit une identification

$$U_{i-1}\Gamma_i \backslash U_i \simeq \bar{\Gamma}_i \backslash V_i.$$

La restriction de F à U_i est invariante à gauche par $U_{i-1}\Gamma_i$ et

$$\int_{U_{i-1}\Gamma_i \backslash U_i} F(ug) du = \int_{\Gamma_i \backslash U_i} f(ug) du = \pi_{U_i} f(g),$$

comme on le constate aisement par intégration fibre à fibre. Enfin, nous avons $||F||_{D,\lambda} \leq ||f||_{D,\lambda}$ pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$ (cela découle immédiatement de l'égalité $\Gamma_\infty \mathscr{S} = U\mathscr{S}$). Il suffit donc de vérifier qu'il existe un nombre fini de $D_j \in U(\mathfrak{g})$ tels que pour $x \in \mathscr{S}$ on ait (uniformément en F)

$$|F(x) - \int_{U_{i-1}\Gamma_i \backslash U_i} F(ux) du| \cdot \lambda'(x) \leq \sum_j ||F||_{D_j,\lambda}.$$

Puisque $\lambda' \in \lambda + \mathbf{R}\alpha$ et α est minorée sur A_t, il suffit de voir que pour tout $M \geq 2$ il existe un nombre fini de $D_j \in U(\mathfrak{g})$ tels que pour tout $x \in \mathscr{S}$ de composante $a \in A_t$ on ait (avec des estimées uniformes en F, bien sûr!)

$$|F(x) - \int_{U_{i-1}\Gamma_i \backslash U_i} F(ux) du| \leq \alpha(a)^{-M} \sum_j \int_{U_{i-1}\Gamma_i \backslash U_i} |(D_j.F)(ux)| du.$$

Etape 4 Notons $H_x(v) = F(vx)$, et regardons H_x comme fonction sur le groupe abélien compact (quotient de $\mathbf{R}$ par un groupe cyclique) $C_i := \bar{\Gamma}_i \backslash V_i$. Notons $\widehat{C_i}$ le groupe des caractères de C_i. Par analyse de Fourier on a

$$|F(x) - \int_{U_{i-1}\Gamma_i \backslash U_i} F(ux) du| = |H_x(1) - \int_{C_i} H_x(u) du| \leq$$

$$\sum_{\chi \in \widehat{C_i} - \{1\}} |\int_{C_i} H_x(u)\chi(u) du| = \sum_\chi |\int_{C_i} F(ux)\chi(u) du|.$$

Notons que $\mathrm{Lie}(C_i) \simeq \mathrm{Lie}(V_i) \simeq \mathrm{Lie}(U_{i-1}) \backslash \mathrm{Lie}(U_i)$. Prenons $X \in \mathrm{Lie}(U_i)$ dont l'image dans $\mathrm{Lie}(C_i)$ est une $\mathbf{R}$-base et notons $z_\chi = (d\chi)(X)$. Notons que $z_\chi \neq 0$ car χ n'est pas trivial et C_i est connexe. De plus, quand χ varie dans $\widehat{C_i} - \{1\}$, les z_χ varient dans un espace de la forme $\mathbf{Z} \cdot u$, donc

$$A_M := \sum_{\chi \in \widehat{C_i} - \{1\}} \frac{1}{|z_\chi|^M} < \infty.$$

Quitte à re-normaliser X, on peut supposer que $e^X \in \bar{\Gamma}_i$, donc $\varphi_x(t) = F(e^{tX}x)$ est 1-périodique pour tout choix de x. On veut estimer $\int_{C_i} F(ux)\chi(u) du$, i.e. on veut estimer $\int_0^1 \varphi_x(t) e^{tz_\chi} dt$. Mais

$$|\int_0^1 \varphi_x(t) e^{tz_\chi} dt| \leq \frac{1}{|z_\chi|^M} \int_0^1 |e^{tz_\chi} \varphi_x^{(M)}(t)| dt = \frac{1}{|z_\chi|^M} \int_0^1 |\varphi_x^{(M)}(t)| dt.$$

Il reste à estimer $\varphi_x^{(M)}(t)$. Un calcul immédiat montre qu'en posant $Y_x := \mathrm{Ad}(x^{-1})X = x^{-1}Xx$ on a

$$\varphi_x^{(M)}(t) = (Y_x^M.F)(e^{tX}x).$$

Ensuite, puisque $\mathscr{S} = \omega A_t K$ et les $a^{-1}ua$ avec $a \in A_t$ et $u \in \omega$ restent dans un compact, on peut écrire $x = ay$ avec $a \in A_t$ et y restant dans un compact. Donc $Y_x = y^{-1}a^{-1}Xay = \beta_i(a)^{-1}y^{-1}Xy$. Ecrivons

$$(y^{-1}Xy)^M = \sum_{i \in I} c_i(y)D_i,$$

les D_i étant une base de $U_M(\mathfrak{g})$ (espace engendré par les produits d'au plus M éléments de $\mathfrak{g}$) et c_i étant des fonctions continues de y, donc bornées quand y varie dans un compact. Soit $C = \sup_{i,x\in\mathscr{S}} |c_i(y)|$ (avec $x = ay$). On obtient donc (pour $x = ay \in \mathscr{S}$, c_i étant tel que $\beta_i(a) \geq c_i\alpha(a)$ pour $a \in A_t$)

$$|\varphi_x^{(M)}(t)| \leq \frac{C}{c_i^M \alpha(a)^M} \sum_{i\in I} |(D_i.F)(e^{tX}x)|.$$

En combinant ce qui précède, on obtient

$$|\int_0^1 \varphi_x(t)e^{tz_\chi}dt| \leq \frac{C}{|z_\chi|^M c_i^M \alpha(a)^M} \sum_{i\in I} \int_0^1 |D_i.F(e^{tX}x)|dt.$$

En sommant sur χ on obtient le résultat désiré. Ouf!

5 Formes cuspidales et opérateurs compacts

Nous finissons avec une autre application du théorème 4.5. Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 5.1. *(Gelfand-Graev-Piatetski Shapiro) Soit $\alpha \in C_c^\infty(G)$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash G)$*

$$||f * \alpha||_\infty \leq c||f||_2.$$

Proof. Posons $\varphi = f * \alpha \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$. Notons que si F est une fonction invariante à gauche par Γ, alors pour tout $\xi \in \Sigma$ la fonction $F_\xi : x \to F(\xi x)$ est invariante à gauche par Γ_∞, car $\xi\Gamma_\infty\xi^{-1} \subset \Gamma$.

Le caractère cuspidal de f permet de montrer (exercice) que $\pi_\alpha(\varphi_\xi) = 0$ pour $\alpha \in \Delta$ et $\xi \in \Sigma$.

Montrons qu'il existe $\lambda \in X(A)$ tel que que $\varphi_\xi \in C^\infty(\lambda)$ pour $\xi \in \Sigma$. Prenons $N > 0$ comme dans le théorème 2.2 et λ tel que $A = \sup_{x\in\mathscr{S}} \lambda(x)||x||^N < \infty$ (un tel λ existe, cf. la preuve du théorème 4.2). On a donc pour $\xi \in \Sigma$ et $x \in \mathscr{S}$

$$|D.\varphi_\xi(x)| \cdot \lambda(x) = |(f * D.\alpha)(\xi x)| \cdot \lambda(x) \leq c_{D.\alpha} \cdot ||\xi x||^N \cdot ||f||_{L^1} \cdot \lambda(x),$$

$$\leq C_{D,\alpha}||\xi||^N A\sqrt{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)}||f||_{L^2},$$

ce qui fait (compte tenu du fait que Σ est fini) que $||\varphi_\xi||_{D,\lambda} \leq C_D \cdot ||f||_{L^2}$ pour une constante C_D (qui dépend aussi de α et Σ, mais ceux-ci sont fixés).

Ainsi $\varphi_\xi \in C^\infty(\lambda)_{\text{cusp}}$. L'inclusion $C^\infty(\lambda)_{\text{cusp}} \subset C^\infty(0)$ étant continue, il existe un nombre fini de $D_i \in U(\mathfrak{g})$ tels que pour tout $\Psi \in C^\infty(\lambda)_{\text{cusp}}$ on ait $||\Psi||_0 \leq \sum_i ||\Psi||_{D_i,\lambda}$. Mais alors

$$\sup_{x \in \mathscr{S}} |\varphi(x\xi)| = ||\varphi_\xi||_0 \leq \sum_i ||\varphi_\xi||_{D_i,\lambda} \leq \sum C_{D_i} ||f||_2,$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 5.1. *Pour tout $\alpha \in C_c^\infty(G)$ l'opérateur $f \to f * \alpha$ est Hilbert-Schmidt, donc compact sur $L^2_{\text{cusp}}(\Gamma \backslash G)$.*

Proof. Le théorème précédent combiné au théorème de Riesz fournit pour chaque $x \in G$ une fonction $K_x \in L^2_{\text{cusp}}(\Gamma \backslash G)$ telle que $f * \alpha(x) = (K_x, f)$ pour $f \in L^2_{\text{cusp}}(\Gamma \backslash G)$, $(.,.)$ étant le produit hermitien standard sur $L^2_{\text{cusp}}(\Gamma \backslash G)$. On a $|(K_x, f)| \leq c||f||_2$ pour tout x et tout f, donc $||K_x||_{L^2} \leq c$. En posant $K(x,y) = K_x(y)$, on obtient

$$\int |K(x,y)|^2 dx dy \leq \int ||K_x||^2_{L^2} dx < \infty,$$

et on a

$$f * \alpha(x) = (K_x, f) = \int K(x,y) f(y) dy.$$

Ainsi l'opérateur $f \to f * \alpha$ est Hilbert-Schmidt, donc compact. □