O trabalho de Artur Avila

Étienne Ghys

CNRS

Transcrição, tradução e adaptação, por Eduardo Colli, da palestra de Étienne Ghys, no ICM2014, sobre Artur Avila, em vista de sua premiação com a medalha Fields.

Artur Avila é um dinamicista fantástico. Se eu tivesse que resumir quatro séculos de pesquisa em dinâmica, em dois minutos, eu diria que há três etapas principais nessa história. A primeira foi iniciada por [Isaac] Newton: *é dada* uma equação diferencial ordinária e sua tarefa é *achar* suas soluções. Foi um sucesso notável, o sucesso do cálculo diferencial. O segundo estágio começou quando Poincaré, na virada do século XX, entendeu que, em muitos casos, é simplesmente impossível achar uma fórmula para as soluções. Este é, por exemplo, o início da teoria do caos: *é dada* uma equação diferencial ordinária e sua tarefa é *dizer alguma coisa* sobre suas soluções. Se possível algo interessante, como descrever o comportamento qualitativo das soluções quando o tempo vai para infinito. O terceiro estágio começou quando os matemáticos entenderam que, na prática, os físicos nunca sabem a equação que eles querem resolver. Sempre há quantidades desconhecidas que podem ser pequenas mas que podem ter alguma influência no movimento. Esse período começou, digamos, nos anos 1960, com [Steven] Smale e [René] Thom. *Não é dada* uma equação diferencial e sua tarefa é *dizer alguma coisa* sobre suas soluções. Essa é a principal área de pesquisa de Artur Avila. A maioria de seus artigos gira em torno da questão "como é um sistema dinâmico típico?".

Mas antes de eu entrar em alguns detalhes, deixe-me introduzi-los rapidamente a esse jovem. Artur nasceu em 1979, na bonita cidade do Rio de Janeiro. Ele obteve seu PhD com a idade de 21 anos, sob a supervisão de Welington de Melo, no IMPA, o Instituto de Matemática Pura e Aplicada, no Rio. Todos nós deveríamos saber que uma Medalha Fields nunca floresce no meio do nada. A abordagem de Smale e Thom, em dinâmica, tem sido uma das forças principais do IMPA nos últimos 50 anos. O IMPA pode ficar orgulhoso dessa medalha. Mais tarde, mas ainda muito jovem, Artur foi a Paris, onde conseguiu sua posição pelo CNRS. Talvez ele pudesse captar ali um pouco do espírito de Poincaré. Hoje, ele tem uma dupla posição acadêmica, no Rio e em Paris, e a dupla nacionalidade, brasileira e francesa. Esta é uma maravilhosa e exitosa colaboração internacional.

Artur tem uma mente muito aberta. Ele gosta de partilhar ideias com outros. Ele tem um enorme número de colaboradores. E o melhor que eu posso fazer para vocês hoje é apresentar esse "slideshow" com as fotos de seus colaboradores[1]. Esta é uma boa ilustração da maneira moderna de se fazer matemática. Tirando total proveito da internet e do Skype.

Artur é um resolvedor de problemas. Ele escreveu vários artigos resolvendo várias conjecturas. Estou certo de que é uma tarefa assustadora para mim, talvez até uma tarefa impossível, dar uma visão geral de sua contribuição matemática. Ainda mais porque minha intenção não é a de falar com especialistas, e meu sonho é o de ser entendido por todos vocês. Eu tenho que ser "impressionista" e fazer algumas escolhas dentre várias outras possibilidades.

Dinâmica unimodal

Artur é um analista. Deixe-me dar um exemplo. Comece com o que chamamos uma *aplicação unimodal* (Fig.

[1] Em ordem alfabética de sobrenome: Flavio Abdenur, Jairo Bochi, Alexander I. Bufetov, Xavier Buff, Arnaud Chéritat, Sylvain Crovisier, David Damanik, Welington de Melo, Bassam R. Fayad, Giovanni Forni, Sébastien Gouëzel, Svetlana Ya. Jitomirskaya, Jeremy A. Kahn, Alejandro Kocsard, Raphaël Krikorian, Yoram Last, Mikhail Lyubich, Marco Martens, Carlos Matheus, Carlos Gustavo Moreira, Maria João Resende, Thomas Roblin, Christian Sadel, Weixiao Shen, Barry Simon, Masato Tsujii, Corinna Ulcigrai, Marcelo Viana, Amie Wilkinson, Jean-Christophe Yoccoz, Zhenghe Zhang.

1). É simplesmente uma aplicação do intervalo em si mesmo com um único máximo, e só. Vou assumir, por simplicidade, que a segunda derivada nesse máximo é negativa. Escolha um ponto x, tome sua imagem $f(x)$ e itere o processo (Fig. 2). Você obtém uma sequência de pontos $\{f^n(x)\}$ e sua tarefa é dizer alguma coisa sobre essa sequência: para onde ela vai? Onde ela acumula quando n vai a infinito? Mas não se esqueça da mensagem de Smale e Thom, não tente fazer isso para toda f, tente fazê-lo para uma f típica.

Aqui está um dos primeiríssimos resultados importantes de Artur, imediatamente após seu PhD, junto com Misha Lyubich e Welington de Melo, que depois ele melhorou um pouco mais com Carlos Gustavo Moreira. Você tem uma *família analítica real* não trivial f_λ de aplicações unimodais como acima e o ponto é que há uma dicotomia dizendo que para quase todo λ a aplicação f_λ é ou *regular* ou *estocástica*. É claro que eu deveria contar para vocês o que significa regular e o que significa estocástico. Uma aplicação regular é o caso fácil: significa que se você escolhe um ponto x aleatoriamente, então a órbita $\{f^n(x)\}$ converge para uma órbita periódica. Este é o caso fácil, não caótico, muito simples de se entender. Tipicamente, o conjunto de valores para os quais isso acontece é aberto e denso no espaço de parâmetros λ. E o segundo caso, estocástico, é o caso complicado. É o caso caótico. No entanto, a palavra "caótico" nunca deveria ser entendida como uma palavra negativa. Ela não quer dizer que você não pode predizer a dinâmica da aplicação f. Há uma medida μ, que é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, e tal que [Lebesgue] quase toda órbita em $[0,1]$ está distribuída de acordo com essa medida. Neste caso ficamos muito felizes porque a dinâmica fica completamente entendida por meio dessa bonita medida μ. O conjunto de valores de parâmetros λ para os quais isso acontece tem medida de Lebesgue positiva. E o teorema que eu mencionei antes diz que a união desses dois casos, o regular e o estocástico, tem medida de Lebesgue total.

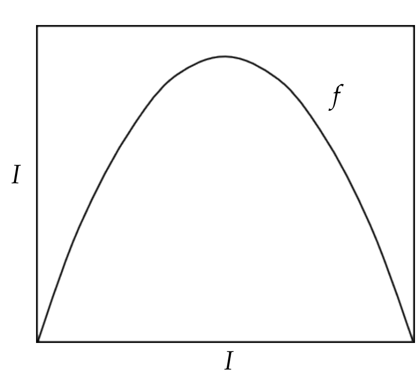

Figura 1: Gráfico de uma aplicação unimodal f de um intervalo I nele mesmo.

Esse teorema tem uma longa história. Infelizmente eu não tenho tempo para explicar os detalhes, mas gostaria de dizer que essa é uma das primeiras situações em que um caso especial de uma conjectura de Palis foi conferido, descrevendo o comportamento típico de uma trajetória típica de um difeomorfismo típico. De acordo com Mikhail Lyubich, poderíamos dizer que alcançamos uma compreensão probabilística total da dinâmica unimodal analítica real, e Artur Avila foi o jogador-chave na etapa final da teoria. É claro que não me é possível, agora, dar mesmo uma vaga ideia da prova de tão difíceis teoremas. A única coisa que eu posso fazer é dizer alguma coisa sobre a ferramenta principal da demonstração.

Artur certamente não é o inventor do *operador de renormalização*. No entanto, muito rapidamente, ele começou a ser seu melhor usuário. A maioria de seus trabalhos usa o operador de renormalização. Ele virou sua varinha mágica. Foi o assunto de sua palestra plenária no congresso anterior. Então deixem-me explicar do que se trata.

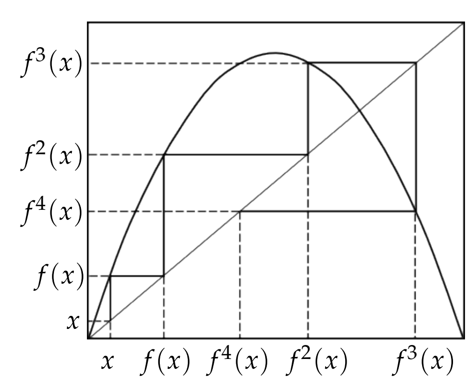

Figura 2: Iterados de uma aplicação unimodal. Com a ajuda da diagonal, o esquema permite esboçar os primei-

ros iterados a partir de um ponto inicial x.

Suponha que você tenha um sistema dinâmico como uma aplicação f de um conjunto X em si mesmo. E suponha que, em X, haja um subconjunto próprio X_1 tal que todo ponto em X_1 tenha uma órbita que retorna a X_1, talvez depois de muitos iterados. Isto define uma aplicação f_1 de X_1 em si mesmo enviando cada ponto em seu primeiro retorno a X_1. Em muitos casos, o pequeno X_1 é de alguma maneira similar ao grande X, podendo-se, usualmente, fazer uma espécie de "zoom" de X_1 para X, de forma que agora você pode ver a aplicação f_1 não de X_1 em X_1, mas de X em X, e assim você terá uma aplicação Rf de X em X. Esse operador R leva um sistema dinâmico definido em X em outro sistema dinâmico definido em X. Esse é o operador de renormalização. E o milagre é que a dinâmica de R atuando no espaço de sistemas dinâmicos está muito relacionada com a dinâmica de uma aplicação f típica atuando em X. Como costumava dizer Adrien Douady: "Primeiro aramos no plano dinâmico e então colhemos no plano de parâmetros".

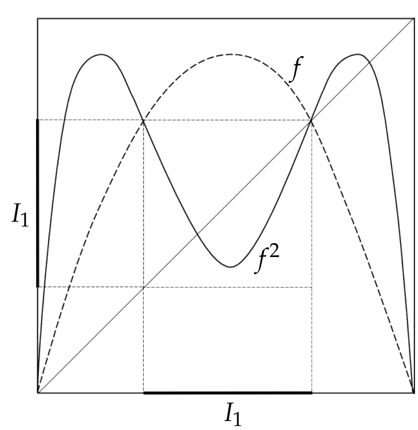

Figura 3: Exemplo de renormalização. O gráfico da aplicação unimodal f é mostrado em linha tracejada e sobrepõe-se a ele o gráfico de $f^2 = f \circ f$. O subintervalo próprio I_1 indicado é invariante por f^2. Em particular, todos os pontos desse subintervalo retornam em exatamente dois iterados. Após reescalonamento desse subintervalo para o intervalo original por uma transformação afim (que reverta orientação, para que o gráfico fique com um máximo em vez de um mínimo), o que se vê é uma outra aplicação unimodal $\mathcal{R}f$ do intervalo original, que é uma renormalização *da f.*

Vejamos o primeiro exemplo histórico. Na Fig. 3 vemos uma aplicação unimodal f do intervalo em si mesmo (linha tracejada); vou quadrá-la, fazendo f composta com f, obtendo a aplicação com dois máximos e um mínimo, em linha contínua. Nós vemos que f^2 preserva um certo subintervalo. Agora você pode ampliar f^2 desse pequeno intervalo para o intervalo original e depois invertê-lo, e você obtém uma outra aplicação unimodal. O que eu acabei de descrever para vocês é um sistema dinâmico atuando no espaço de aplicações unimodais.

A Fig. 4 mostra o quadro geral. No final dos anos 1970, Coullet, Tresser e Feigenbaum tinham a intuição, baseada em evidência numérica, que o operador de renormalização $\mathcal{R}$ atuando no espaço de aplicações unimodais deveria ter um ponto fixo. Esse ponto fixo é chamado de *aplicação de Feigenbaum*, e a dinâmica na vizinhança desse ponto fixo deveria ser assim: haveria uma *direção expansiva de dimensão um* e uma *direção atrativa de codimensão um*. Foi um longo e fascinante empreendimento conjunto de vários matemáticos transformar essa intuição em um teorema. Muitos matemáticos, incluindo, em particular, [Oscar] Lanford, [Dennis] Sullivan e [Curtis] McMullen. Lyubich e Avila puderam alcançar o sonho de Sullivan de transformar uma prova que era basicamente assistida-por-computador em uma

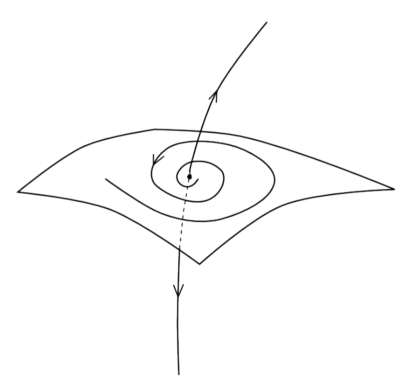

Figura 4: No espaço de aplicações unimodais, a renormalização descrita na Fig. 3 é um operador que tem um ponto fixo, a aplicação de Feigenbaum, e a dinâmica desse operador na vizinhança do ponto fixo apresenta uma direção repulsora de dimensão 1 e uma direção atratora de codimensão 1.

prova assistida-pelo-cérebro. Após um certo tipo de preparação técnica, a prova se reduz ao simples uso do Lemma de Schwarz. Uma prova d'O Livro, como teria dito Erdös!

Bilhares racionais

Deixem-me trocar de marcha e ir para outro tipo de sistema dinâmico: *bilhares*. Imagine que você tenha uma caixa contendo um gás de partículas ricocheteantes. Imagine, mesmo que isso não seja fisicamente realista, que o gás é tão rarefeito que as partículas não colidem entre elas e apenas ricocheteiam nas paredes da caixa. Então cada partícula, basicamente, está seguindo um jogo de bolas de bilhar. Qual é o sistema dinâmico correspondente? Suponhamos, por simplicidade, que a caixa é bidimensional e é, de fato, um polígono. Se você escolher um ponto x na fronteira e um vetor v, digamos, de tamanho um, se você bate na bola em x na direção de v, a bola irá ricochetear no ponto x' em uma nova direção dada por v'. É claro que o sistema dinâmico que você deseja compreender é a aplicação T que envia (x, v) em (x', v') (ver Fig. 5).

Agora façamos uma hipótese adicional: que os ângulos do polígono sejam múltiplos racionais de π. Nesta situação, a velocidade, após ricochetear nas paredes, só pode assumir um número finito de valores.

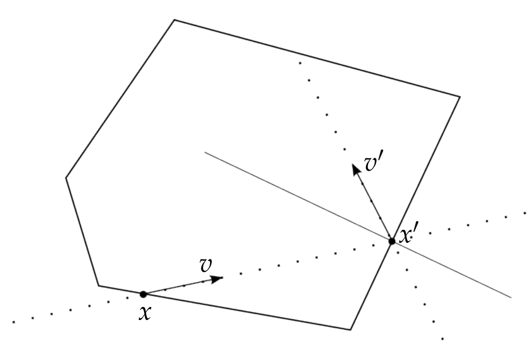

Figura 5: Bilhar do ponto de vista de sistemas dinâmicos. O espaço de configurações é descrito pela posição x na parede do bilhar e por um vetor unitário v que indica a direção de saída. A menos que a reta $\{x + tv\}$ aponte para um canto, o par (x, v) define o próximo par (x', v') pela lei de reflexão usual.

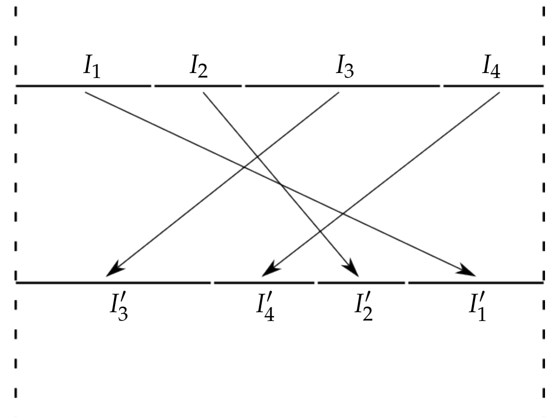

Figura 6: Uma transformação de troca de intervalos definida num intervalo da reta real. Para defini-la, divide-se o domínio em subintervalos de tamanhos arbitrários e define-se uma permutação desses subintervalos. Em cada subintervalo I_j a transformação é uma translação, que leva I_j em I'_j. A transformação fica indefinida nos extremos dos intervalos.

Por exemplo, se você puser uma bola de bilhar em movimento em uma mesa retangular a velocidade só pode assumir 4 possíveis direções. Isso reduz a dinâmica de dimensão 2 para dimensão 1: para cada segmento da fronteira do polígono existe apenas um número finito de direções possíveis. Portanto, o que se tem, de fato, é um sistema dinâmico atuando na união de um número finito de intervalos. Esse tipo de dinâmica é chamado de *troca de intervalos*. Tecnicamente falando, é muito fácil: você começa com um intervalo, você o decompõe em subintervalos, você permuta os subintervalos, e você reorganiza (Fig. 6). Não me faça perguntas sobre os pontos extremais. Esqueça-os. O que interessa é que a dinâmica de um bilhar poligonal racional no plano é basicamente reduzida a entender a dinâmica de aplicações de troca de intervalos.

Agora deixem-me enunciar o teorema de Avila e Forni, de 2007:

> Quase todas as transformações de troca de intervalos são fracamente misturadoras[2] (se irredutíveis e diferentes de rotações).

Mas eu tenho que explicar essas palavras.

[2] Mesmo em português, é mais comum utilizar-se a expressão em inglês, "mixing".

"Quase todas" deveria ser fácil, porque o espaço de aplicações de troca de intervalos tem dimensão finita. Se você quer descrever uma troca de intervalos você tem que escolher alguma permutação e também os tamanhos dos subintervalos, que sempre somam 1. Ou seja, uma troca de intervalos pertence a uma união finita de simplexos de dimensão finita. Portanto você tem a medida de Lebesgue ao seu dispor e a expressão "quase todas as transformações de troca de intervalos" se refere a essa medida.

Antes de explicar "fracamente misturadora" deixe-me explicar "misturadora". Suponha que você tenha uma aplicação f de X para X, que preserva uma medida de probabilidade μ. Diz-se que f é misturadora se o limite, quando n vai a infinito, da medida $\mu(A \cap f^{-n}(B))$ é o produto das medidas de A e B, isto é, $\mu(A)\mu(B)$. A e B são subconjuntos de X. De alguma forma isto significa que, quando o tempo passa, a dinâmica esquece o passado. Os eventos "estar em A" e "estar em B após n iterados" têm uma tendência de se tornar independentes no sentido probabilístico. Então essa é uma boa aproximação de aleatoriedade.

"Fracamente misturadora", como vocês podem adivinhar, é somente um enfraquecimento de "misturadora". É apenas o seguinte: você tem a mesma definição, exceto que você permite ao inteiro n de ir a infinito ficando restrito a um subconjunto dos inteiros de densidade total[3]. De fato, "misturadora" e "fracamente misturadora" são essencialmente o mesmo conceito.

Agora voltamos ao teorema: quase toda transformação de troca de intervalos, com respeito à medida de Lebesgue, é fracamente mixing. Foi um progresso de grande relevância na compreensão da dinâmica de bilhares.

E a prova? Qual é a principal ferramenta da prova? Adivinha? Renormalização! A aplicação de renormalização age no espaço de sistemas dinâmicos, que neste caso é um espaço de dimensão finita, e o milagre é que ela é caótica, mesmo que aplicações de troca de intervalos não sejam caóticas. Essa caoticidade do operador de renormalização agindo no espaço de aplicações de troca de intervalos é a chave para se entender a dinâmica de uma aplicação de troca de intervalos típica. Este é um *tour de force*.

[3] Diz-se que $S \subset \mathbb{N}$ tem densidade total se $\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp S\cap\{1,\ldots,n\}}{n} = 1$.

Operadores de Schrödinger quase periódicos

Deixem-me de novo mudar de marcha e ir para outro assunto onde a intuição dinâmica de Artur radicalmente mudou a paisagem: *operadores de Schrödinger quase periódicos*. Imagine que você tem um certo tipo de partícula quântica discreta unidimensional. O espaço de fases dessa partícula quântica é o espaço de Hilbert das funções Ψ de quadrado integrável indo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{C}$ e você pensa na probabilidade de uma partícula estar no ponto n como proporcional a $|\Psi(n)|^2$. Como é usual em dinâmica quântica, o movimento da partícula é regido pela equação de Schrödinger

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi\,,$$

em que H é o operador

$$H\Psi(n) = \Psi(n+1) + \Psi(n-1) + V(n)\Psi(n)\,.$$

Os dois primeiros termos são apenas uma versão discreta do operador de Laplace; $V(n)$ é uma função limitada, um potencial limitado, que descreve o ambiente da partícula. E o que você quer entender é a dinâmica dessa partícula se movendo na reta. Note que H é um operador autoadjunto limitado agindo em um espaço de Hilbert, e como todos nós sabemos, tudo depende do espectro desse operador e das medidas espectrais. Lembrando que o espectro Σ é o conjunto de energias E tais que $H - E \cdot \mathrm{Id}$ não é invertível. E a medida espectral associada ao estado Ψ é a medida μ_Ψ tal que a integral de uma função g com respeito a essa medida é dada por esta fórmula:

$$\langle \Psi, g(H)\Psi\rangle = \int g\,d\mu_\Psi\,.$$

Isto é canônico em análise funcional.

O espectro e a medida espectral são relevantes para o entender como é a dinâmica da partícula quântica. Basicamente, pode-se dizer o seguinte: se a medida μ é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, isto quer dizer que você está no regime condutor. A partícula viaja livremente na reta. Se a medida é singularmente contínua, a partícula viaja, mas não tão bem. E, se a medida é pontual significa que a partícula fica aprisionada pelo potencial. Portanto, entender a natureza das medidas espectrais e do espectro é exatamente a mesma coisa que entender a dinâmica da partícula. O exemplo mais fácil de olhar é quando o potencial V é quase periódico. Se quiser, pode pensar num quase cristal. E, entre os exemplos mais fáceis, o mais fácil deles é o chamado Operador Quase Mathieu, que é quando existe apenas uma frequência: $V(n) = 2\lambda \cos(2\pi n\alpha)$. Esse é o exemplo canônico que você quer entender.

Foi conjecturado que, quando α é irracional, o espectro é um conjunto de Cantor. Em 1981, Martin Katz ofereceu dez martinis para a prova dessa conjectura. Barry Simon cunhou o termo "conjectura dos dez martinis". A Fig. 7 mostra a chamada Borboleta de Hofstadter[4]. Se você corta a figura por uma reta vertical cuja primeira coordenada é α você verá o espectro do operador para o valor λ igual a 1; o chamado valor crítico $\lambda = 1$. Então você vê esse bonito conjunto fractal.

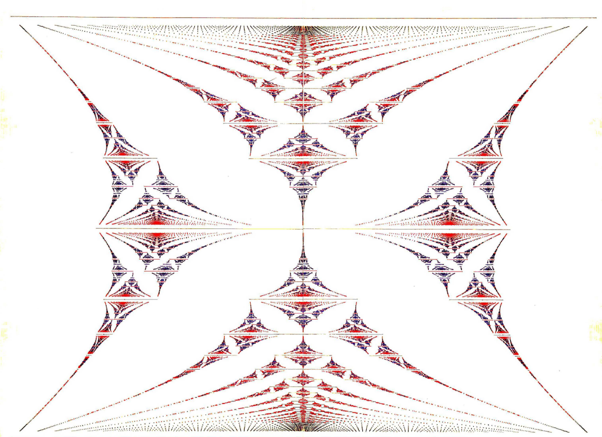

Figura 7: Borboleta de Hofstadter (imagem original de Douglas Hofstadter). Fixa-se $\lambda = 1$ no potencial V e varia-se, na abscissa, o valor da frequência α. Em cada linha vertical de coordenada α, plota-se o espectro do Operador Quase Mathieu.

De fato, Artur e colaboradores vieram com novas ideias mudando a área completamente. Artur basicamente tinha a ideia de incorporar ideias de sistemas dinâmicos no mundo da teoria espectral. É justo dizer que os teóricos espectrais haviam exaurido suas ferramentas e não sabiam mais como prosseguir. Artur veio com ideias de sistemas dinâmicos e pôde resolver a maior parte das conjecturas que estavam abertas nessa área. Vou mencionar três delas: primeiro, Avila e Jitomirskaya, in 2009, resolvendo a conjectura dos 10 martinis:

> Para todo $\lambda \neq 0$ e todo irracional α, o espectro $\sigma_{\lambda,\alpha}$ é, de fato, um conjunto de Cantor.

Infelizmente eles não ganharam os dez martinis porque M. Katz faleceu em 2009. Segundo, em 2006, Avila e Krikorian, a conjectura de Aubry Andre: a medida de Lebesgue do espectro é dada pela fórmula

$$\mathrm{Leb}(\sigma_{\lambda,\alpha}) = 4|1 - |\lambda||\,.$$

Na verdade o caso não crítico, em que λ não é igual a 1, já era conhecido por Jitomirskaya e Krasovsky. E o último teorema que eu quero mencionar, que resulta de Avila e Jitomirskaya (2009), Avila e Damanik (2008) e Avila (2009):

> Para todo α irracional e $|\lambda| < 1$, o espectro é puramente absolutamente contínuo.

Então, se $|\lambda| < 1$ você está, de fato, no regime condutor. A partícula quântica viaja pela reta.

Dinâmica conservativa

Para terminar, quero mencionar um teorema que, estritamente falando, não está muito relacionado a dinâmica. É um teorema puramente de equações diferenciais parciais. Eu gosto muito dele porque ele é fácil de enunciar e difícil de provar. Artur me contou que quase todo matemático que ouve esse enunciado pela primeira vez fica imediatamente convencido que ele é trivial, e apresenta uma prova trivial, que está invariavelmente errada. Esse é um teorema duro. Pode ser que alguém na audiência consiga achar uma prova de duas linhas, não sei. Então deixem-me enunciá-lo para vocês.

Deixe-me começar por algo muito fácil e bem conhecido. Tome uma variedade compacta C^∞ e um difeomorfismo C^1 dessa variedade. É bem conhecido e fácil de provar que você pode aproximar esse difeomorfismo, na topologia C^1, por um difeomorfismo C^∞. Fácil. Agora o teorema é o mesmo, exceto que você tem um volume. Comece com uma variedade compacta de classe C^∞, munida de uma forma de volume C^∞. Tome um difeomorfismo C^1 que preserva volume e o teorema

[4] O descobridor dessa figura, Douglas Hofstadter, é o mesmo que escreveu o livro *Gödel, Escher, Bach*, de 1979. A figura foi descoberta em 1976.

de Artur é que você pode aproximá-lo, na topologia C^1, por um difeomorfismo C^∞ que preserva volume. A prova é maravilhosa. Ela vai por indução sobre o esqueleto de uma triangulação. Ela me lembra a maravilhosa prova de Gromov dos princípios-h.

Artur é um fenômeno na teoria moderna de sistemas dinâmicos. Seus resultados são incríveis e estou convencido de que este é apenas o começo. Parabéns, Artur!

N. do E. A lista de referências abaixo foi tirada do MathSciNet e contém todas os artigos em que Artur consta como autor. A consulta foi feita em 03/02/2015.

Referências

[1] Avila, A.; de Melo, W.; Martens, M. On the dynamics of the renormalization operator. *Global analysis of dynamical systems*, 44.

[2] Avila, A. Bifurcations d'applications unimodales. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, v. 334, n. 6, p. 483?488, 2002.

[3] Avila, A. Infinitesimal perturbations of rational maps. *Nonlinearity*, v. 15, n. 3, p. 695-704, 2002.

[4] Avila, A.; Bochi, J. A formula with some applications to the theory of Lyapunov exponents. *Israel J. Math.*, v. 131, p. 125-137, 2002.

[5] Avila, A.; Lyubich, M.; de Melo, W. Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps. *Invent. Math.*, v. 154, n. 3, p. 451-550, 2003.

[6] Avila, A.; Moreira, C. G. Statistical properties of unimodal maps: smooth families with negative Schwarzian derivative. Geometric methods in dynamics. I. *Astérisque*, v. 286, p. 81-118, 2003.

[7] Avila, A.; Gustavo Moreira, Carlos Bifurcations of unimodal maps. Dynamical systems. Part II, 1?22, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2003.

[8] Abdenur, F.; Avila, A.; Bochi, J. Robust transitivity and topological mixing for C^1-flows. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 132, n. 3, p. 699-705, 2004. (eletrônico).

[9] Avila, A.; Gustavo Moreira, Carlos Quasisymmetric robustness of the Collet-Eckmann condition in the quadratic family. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, v. 35, n. 2, p. 291-331, 2004.

[10] Avila, A.. Convergence of an exact quantization scheme. *Comm. Math. Phys.*, v. 249, n. 2, p. 305-318, 2004.

[11] Avila, A.; Buff, X.; Chéritat, A. Siegel disks with smooth boundaries. *Acta Math.*, v. 193, n; 1, p. 1-30, 2004.

[12] Avila, A.; Moreira, C. G. Statistical properties of unimodal maps: the quadratic family. *Ann. of Math. (2)*, v. 161, n. 2, p. 831-881, 2005.

[13] Avila, A.; Damanik, D. Generic singular spectrum for ergodic Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, v. 130, n. 2, p. 393-400, 2005.

[14] Avila, A.; Moreira, C. G. Phase-parameter relation and sharp statistical properties for general families of unimodal maps. Geometry and dynamics, 1?42, Contemp. Math., 389, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[15] Avila, A.; Viana, M. Dynamics in the moduli space of abelian differentials. *Port. Math. (N.S.)*, v. 62, n. 4, p. 531-547, 2005.

[16] Avila, A.; Moreira, C. G. Statistical properties of unimodal maps: physical measures, periodic orbits and pathological laminations. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, n. 101, p. 1-67, 2005.

[17] Avila, A.; Gouëzel, S.; Tsujii, M. Smoothness of solenoidal attractors. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, v. 15, n. 1, p. 21-35, 2006.

[18] Avila, A.; Jitomirskaya, S. Solving the ten martini problem. Mathematical physics of quantum mechanics, 5?16, Lecture Notes in Phys., 690, Springer, Berlin, 2006.

[19] Avila, A.; Krikorian, R. Reducibility or nonuniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles. *Ann. of Math. (2)*, v. 164, n. 3, p. 911-940, 2006.

[20] Avila, A.; Bochi, J. A generic C^1 map has no absolutely continuous invariant probability measure. *Nonlinearity*, v. 19, n. 11, 2717-2725, 2006.

[21] Avila, A.; Gouëzel, S.; Yoccoz, J.-C. Exponential mixing for the Teichmüller flow. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, n. 104, p. 143-211, 2006.

[22] Avila, A.; Lyubich, M. Examples of Feigenbaum Julia sets with small Hausdorff dimension. Dynamics on the Riemann sphere, 71?87, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[23] Avila, A.; Forni, G. Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows. *Ann. of Math. (2)*, v. 165, n. 2, p. 637-664, 2007.

[24] Avila, A.; Viana, M. Simplicity of Lyapunov spectra: proof of the Zorich-Kontsevich conjecture. *Acta Math.*, v. 198, n. 1, p. 1-56, 2007.

[25] Avila, A.; Viana, M. Simplicity of Lyapunov spectra: a sufficient criterion. *Port. Math. (N.S.)*, v. 64, n. 3, p. 311-376, 2007.

[26] Avila, A.; Bochi, J. Generic expanding maps without absolutely continuous invariant ?-finite measure. *Math. Res. Lett.*, v. 14, n. 5, p. 721-730, 2007.

[27] Avila, A.; Bufetov, A. Exponential decay of correlations for the Rauzy-Veech-Zorich induction map. Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow, 203?211, Fields Inst. Commun., 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[28] Avila, A.; Bochi, J. A uniform dichotomy for generic $SL(2,\mathbb{R})$ cocycles over a minimal base. *Bull. Soc. Math. France*, v. 135, n. 3, p. 407-417, 2007.

[29] Avila, A.; Lyubich, M. Hausdorff dimension and conformal measures of Feigenbaum Julia sets. *J. Amer. Math. Soc.*, v. 21, n. 2, p. 305-363, 2008.

[30] Avila, A.; Damanik, D. Absolute continuity of the integrated density of states for the almost Mathieu operator with non-critical coupling. *Invent. Math.*, v. 172, n. 2, 2008.

[31] Avila, A.; Bochi, J.; Damanik, D. Cantor spectrum for Schrödinger operators with potentials arising from generalized skew-shifts. *Duke Math. J.*, v. 146, n. 2, p. 253-280, 2009.

[32] Avila, A. On the spectrum and Lyapunov exponent of limit periodic Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, v. 288, n. 3, p. 907-918, 2009.

[33] Avila, A.; Jitomirskaya, S. The Ten Martini Problem. *Ann. of Math. (2)*, v. 170, n. 1, p. 303-342, 2009.

[34] Avila, A.; Kahn, J.; Lyubich, M.; S., Weixiao Combinatorial rigidity for unicritical polynomials. *Ann. of Math. (2)*, v. 170, n. 2, p. 783-797, 2009.

[35] Avila, A.; Bochi, J.; Wilkinson, A. Nonuniform center bunching and the genericity of ergodicity among C1 partially hyperbolic symplectomorphisms. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, v. 42, n. 6, p. 931-979, 2009.

[36] Avila, A.; Roblin, T. Uniform exponential growth for some $SL(2,\mathbb{R})$ matrix products. *J. Mod. Dyn.*, v. 3, n. 4, p. 549-554, 2009.

[37] Avila, A. Density of positive Lyapunov exponents for quasiperiodic $SL(2,\mathbb{R})$-cocycles in arbitrary dimension. *J. Mod. Dyn.*, v. 3, n. 4, p. 631-636, 2009.

[38] Avila, A.; Jitomirskaya, S. Almost localization and almost reducibility. *J. Eur. Math. Soc.*, v. 12, n. 1, p. 93-131, 2010.

[39] Avila, A.; Viana, M. Extremal Lyapunov exponents: an invariance principle and applications. *Invent. Math.*, v. 181, n. 1, p. 115-189, 2010.

[40] Avila, A.; Last, Y.; Simon, B. Bulk universality and clock spacing of zeros for ergodic Jacobi matrices with absolutely continuous spectrum. *Anal. PDE*, v. 3, n. 1, p. 81-108, 2010.

[41] Avila, A. Chaoticity of the Teichmüller flow. Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic, 321?338, Clay Math. Proc., 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[42] Avila, A.; Bochi, J.; Yoccoz, J.-C. Uniformly hyperbolic finite-valued $SL(2,\mathbb{R})$-cocycles. *Comment. Math. Helv.*, v. 85, n. 4, p. 813-884, 2010.

[43] Avila, A. On the regularization of conservative maps. *Acta Math.*, v. 205, n. 1, p. 5-18, 2010.

[44] Avila, A. Dynamics of renormalization operators. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I, 154?175, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[45] Avila, A.; Lyubich, M.; S., Weixiao Parapuzzle of the Multibrot set and typical dynamics of unimodal maps. *J. Eur. Math. Soc.*, v. 13, n. 1, p. 27-56, 2011.

[46] Avila, A.; Jitomirskaya, S. Hölder continuity of absolutely continuous spectral measures for one-frequency Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, v. 301, n. 2, p. 563-581, 2011.

[47] Avila, A. Density of positive Lyapunov exponents for $SL(2,\mathbb{R})$-cocycles. *J. Amer. Math. Soc.*, v. 24, n. 4, p. 999-1014, 2011.

[48] Avila, A.; Kocsard, A. Cohomological equations and invariant distributions for minimal circle diffeomorphisms. *Duke Math. J.*, v. 158, n. 3, p. 501-536, 2011.

[49] Avila, A.; Fayad, B.; Krikorian, R. A KAM scheme for $SL(2,\mathbb{R})$ cocycles with Liouvillean frequencies. *Geom. Funct. Anal.*, v. 21, n. 5, p. 1001-1019, 2011.

[50] Avila, A.; Lyubich, M. The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: exponential contraction along hybrid classes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, n. 114, p. 171-223, 2011.

[51] Avila, A.; Forni, G.; Ulcigrai, C. Mixing for time-changes of Heisenberg nilflows. *J. Differential Geom.*, v. 89, n. 3, p. 369-410, 2011.

[52] Avila, A.; Bochi, J.; Damanik, D. Opening gaps in the spectrum of strictly ergodic Schrödinger operators. *J. Eur. Math. Soc.*, v. 14, n. 1, p. 61-106, 2012.

[53] Avila, A.; Bochi, J. Nonuniform hyperbolicity, global dominated splittings and generic properties of volume-preserving diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 364, n. 6, p. 2883-2907, 2012.

[54] Avila, A.; Resende, M. J. Exponential mixing for the Teichmüller flow in the space of quadratic differentials. *Comment. Math. Helv.*, v. 87, n. 3, p. 589-638, 2012.

[55] Avila, A.; Gouëzel, S. Small eigenvalues of the Laplacian for algebraic measures in moduli space, and mixing properties of the Teichmüller flow. *Ann. of Math. (2)*, v. 178, n. 2, p. 385-442, 2013.

[56] Avila, A.; Matheus, C.; Yoccoz, J.-C. $SL(2,\mathbb{R})$-invariant probability measures on the moduli spaces of translation surfaces are regular. *Geom. Funct. Anal.*, v. 23, n. 6, p. 1705-1729, 2013.

[57] Avila, A. On rigidity of critical circle maps. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, v. 44, n. 4, p. 611-619, 2013.

[58] Avila, A.; Santamaria, Jimmy; Viana, M.; Wilkinson, A. Cocycles over partially hyperbolic maps. *Astérisque*, v. 358, p. 1-12, 2013.

[59] Avila, A.; Santamaria, Jimmy; Viana, M. Holonomy invariance: rough regularity and applications to Lyapunov exponents. *Astérisque*, v. 358, p. 13-74, 2013.

[60] Avila, A.; Damanik, D.; Zhang, Z. Singular density of states measure for subshift and quasi-periodic Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, v. 330, n. 2, p. 469-498, 2014.

[61] Avila, A.; Jitomirskaya, S.; Sadel, C. Complex one-frequency cocycles. *J. Eur. Math. Soc.*, v. 16, n. 9, p. 1915-1935, 2014.

Étienne Ghys
UMPA, CNRS ENS Lyon
`etienne.ghys@ens-lyon.fr`