L'irrationnel mathématique

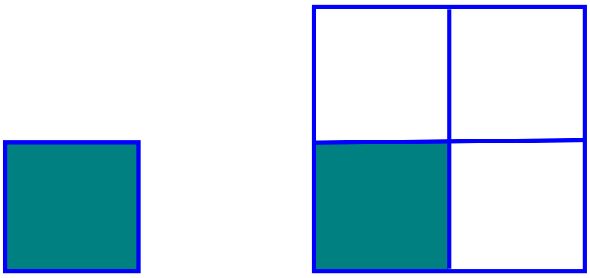
Étienne Ghys

Selon une légende tenace, Hippase de Métaponte fut mis à mort par ses confrères, par noyade. C'était il y a 2 600 ans, dans le sud de l'Italie. Il était coupable de sacrilège. Il avait osé défier le grand Maître de la secte, un personnage mystique, dont on disait qu'il pouvait parler aux animaux et prévoir les tremblements de terre. Mais ce maître était avant tout l'un des premiers à tenir un discours rationnel sur la Nature. Il s'appelait Pythagore. Toute sa philosophie et tout son Cosmos étaient fondés sur un dogme, «Tout est nombre», tout s'exprime en termes des nombres entiers et de leurs rapports, les nombres rationnels. Dans la gamme pythagoricienne par exemple, deux notes de musique forment une quinte si leurs fréquences sont dans un rapport de 2 à 3. Et voilà que son disciple Hippase vient démontrer — et rendre public — que le côté d'un carré et sa diagonale ne peuvent pas s'exprimer en nombres entiers. Il établissait l'existence de grandeurs irrationnelles, incommensurables, innommables. Il reniait le dogme. Il méritait la mort.

Un jour, alors que j'étais en CM2, mon maître d'école demanda à ses élèves.

— Que devient la surface d'un carré si on double la longueur de son côté ?

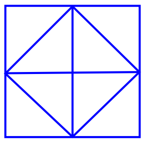
Tous, nous répondîmes en cœur que la surface double également. Avec un sourire bienveillant, le maître envoya un élève au tableau et lui suggéra de dessiner.



Il nous apparut clairement qu'un carré de côté double peut se décomposer en quatre copies du carré initial, et non pas deux. Notre professeur posa alors une nouvelle question,

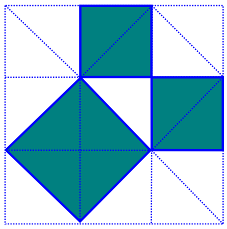
— Pouvez-vous dessiner un carré dont la surface est le double de celle du carré initial ?

Nous nous mîmes alors à griffonner fébrilement sur notre cahier de brouillon jusqu'à ce que l'un d'entre nous ait l'idée de décomposer chacun des quatre carrés en deux triangles, comme ceci :



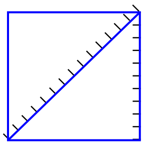
Alors, cela saute aux yeux.

Le petit carré initial contient deux triangles, et le carré du milieu, formé par les diagonales, en contient quatre : deux fois plus. Nous venions de démontrer notre premier théorème : le carré dont le côté est la diagonale a une surface double.

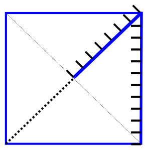


C'était lumineux. Je savais que c'était vrai, non pas parce que mon instituteur me l'avait dit, mais parce que *je* l'avais démontré. C'était rationnel, au sens du dictionnaire de l'Académie : «ce qui se conçoit par l'entendement». Bien plus tard, j'ai compris que mon instituteur avait probablement lu Platon. Dans le célèbre dialogue du Ménon, Socrate appelle un jeune esclave et lui fait jouer exactement le même jeu du carré. À grand renfort de questions, il lui fait découvrir que le carré de la diagonale vaut deux fois le carré du côté. La fameuse maïeutique socratique : le pédagogue fait naître des idées qui étaient déjà présentes chez l'élève. C'est l'occasion de rendre hommage à mon instituteur, à nos instituteurs et institutrices : nous leur devons tant.

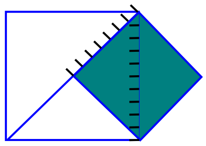
Revenons à Hippase. Les historiens se disputent à propos de sa contribution exacte, mais beaucoup pensent qu'il a démontré que la diagonale d'un carré et son côté sont en rapport irrationnel. Essayons de raisonner comme il aurait pu le faire. Selon Pythagore, tout s'exprime en nombres entiers. En particulier, cela signifie que le côté d'un carré et sa diagonale représentent un nombre entier d'unités. Peut-être un nombre entier de centimètres, ou de pouces, ou de microns, peu importe.



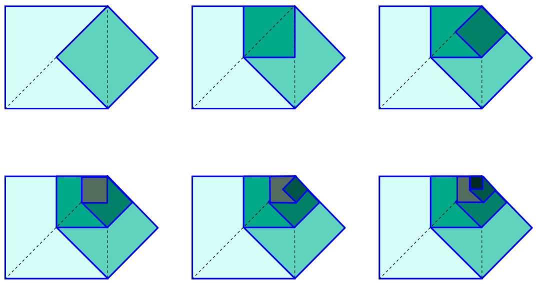
Le carré de la diagonale vaut deux fois celui du côté, nous le savons. Comme le côté est un entier, le carré de la diagonale est un entier pair. Cette diagonale ne peut donc pas être de longueur impaire puisque le carré d'un entier impair est impair.



Elle est donc de longueur paire, c'est-à-dire que la longueur de la demi-diagonale est un nombre entier. Voyez ce que nous venons de démontrer.



Si la diagonale d'un carré et son côté sont entiers, alors il en est de même pour le carré penché, dont le côté est la demi-diagonale initiale. Ainsi chaque carré dont la diagonale et le côté sont des entiers permet de construire un autre, plus petit, qui a les mêmes propriétés. On peut alors continuer ainsi autant de fois qu'on le voudra.



On trouvera des carrés de plus en plus petits, qui finiront par devenir si petits qu'ils seront plus petits que l'unité initiale. C'est une contradiction puisqu'un nombre entier ne peut pas être plus petit que l'unité sans être nul. Cette contradiction montre que notre hypothèse initiale était fausse, c'est-à-dire que le maître Pythagore avait tort. La diagonale et le côté sont donc en rapport irrationnel. C'est ce qu'il fallait démontrer. *Quod erat demonstrandum* !

Il s'agit de l'une des premières démonstrations par l'absurde, dont le principe sera formalisé un siècle plus tard par Aristote. Peut-être Hippase a-t-il trouvé ce qu'il ne cherchait pas. Il essayait d'exprimer le côté et la diagonale avec des entiers. C'était possible car Pythagore l'avait dit. En cherchant ces entiers, il a fini par trouver... une contradiction... qui aurait entraîné sa mort.

Je n'oublierai pas ma première rencontre avec cette démonstration. J'étais en troisième, je fréquentais une bibliothèque municipale, et une bibliothécaire dévouée, connaissant mon goût naissant pour les mathématiques, guidait mes lectures. Merci à elle ! Elle me conseilla un livre de mathématiques supérieures, bien trop difficile pour moi, auquel je ne comprenais pas grand-chose. Mais je me souviens très bien que la figure que nous venons de dessiner était en bas à gauche d'une page de droite... J'ai toujours préféré les images aux nombres et aux équations : je les mémorise mieux. Socrate dit à l'esclave inculte : «Si tu ne peux pas dire le nombre, dessine-le !». Ainsi, cette figure reste gravée dans ma mémoire comme le symbole du raisonnement déductif, celui de la vérité incontestable et universelle, de ce qui se conçoit par l'entendement.

Curieusement, l'entrée en force des irrationnels dans les mathématiques coïncide avec l'apparition de la méthode rationnelle. Les multiples sens du mot rationnel me réjouissent. L'ambiguïté était semble-t-il déjà présente dans le grec ancien. Le rationnel, le λόγος, pouvait être aussi bien la parole, le verbe, la démonstration, le discours, le nombre entier, le rapport entre deux entiers. L'irrationnel, l'ἄλογος, pouvait être l'incommensurable, ce qu'on ne peut pas nommer, ce qu'on ne peut pas calculer, ce qui arrive contre toute attente. Aujourd'hui, les mathématiciens appellent rationnel le quotient de deux entiers. Quotient, rapport, ratio, raison. Mais cela ne les empêche pas d'appeler mécanique rationnelle la partie de la mécanique qui se construit «rationnellement» à partir de quelques axiomes de base, un peu comme Euclide élabore toute sa géométrie sur des axiomes. En quelque sorte, la mécanique sans son aspect expérimental.

Certains opposent en effet les méthodes rationnelles et expérimentales, le rationalisme et l'empirisme, les deux portes d'accès à la connaissance. Je n'irais certainement pas jusqu'à qualifier d'irrationnelle la méthode expérimentale — pas ici — mais elle repose sur un principe différent. Si je mesure les périodes d'oscillations de dix pendules de longueurs différentes, si je constate que ces périodes sont proportionnelle à la racine carrée de la longueur, si je propose qu'il s'agit d'une loi générale, je raisonne par induction et non pas par déduction, du particulier au général et pas du général vers le particulier. Allez donc expliquer aux enfants qui passent du cours de physique au cours de maths que ce n'est pas parce qu'un théorème est vrai sur dix exemples qu'il est toujours vrai ! Je me souviens que cela me perturbait beaucoup quand j'étais lycéen.

La méthode expérimentale est bien sûr cruciale dans les sciences de la Nature, au moins depuis Aristote. Qu'en est-il des mathématiques ? Faut-il se contenter de leur aspect rationnel ? Ont-elles un côté expérimental ? Se limitent-elles à de longues suites de déductions logiques à partir d'axiomes supposés vrais ? S'il ne s'agit que d'écrire des syllogismes du genre «Tous les hommes sont mortels, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel», n'allons-nous pas transformer cette science en une immense tautologie froide et stérile ?

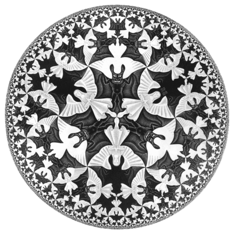
Les mathématiques, comme toutes les autres sciences, sont passées par un certain nombre de crises profondes. J'ai évoqué la crise des nombres irrationnels, au cinquième siècle avant notre ère, mais je pourrais parler de celle des nombres imaginaires, au seizième siècle, ou de celle des géométries non euclidiennes au dix-neuvième, ou encore de la crise des fondements, au vingtième. À chaque fois, il a fallu laisser entrer dans la maison de nouveaux venus «irrationnels» qu'on refusait d'accepter auparavant.

Dans les années 30, Kurt Gödel, qu'on décrit souvent comme le plus grand logicien depuis Aristote, mais que je préfère penser comme le Hippase des temps modernes, nous a forcés à repenser le sens des mots «vrais» et «faux». Le grand maître de la secte mathématique de l'époque, David Hilbert, avait affirmé avec énergie que pour toute assertion, on peut déterminer par un raisonnement, si elle est vraie ou fausse. Sa maxime, «Wir müssen wissen, wir werden wissen», «nous devons savoir, nous saurons», fut mise à mal par Gödel. Nous avons dû laisser la place à des énoncés qu'on appelle aujourd'hui «indécidables» : il est impossible de décider s'ils sont vrais ou faux. Ces énoncés, j'aimerais les appeler «irrationnels», car ils sont inaccessibles à la raison, à la démonstration.

Je ne peux évidemment pas expliquer en détail ce dont il s'agit mais je rappelle que les êtres humains sont des entités finies. Nous avons certes beaucoup de neurones dans nos cerveaux, peut-être une centaine de milliards, mais même si c'est beaucoup, ce n'est guère qu'un nombre fini. Par quelle arrogance avons-nous pu croire que les capacités rationnelles d'un cerveau, qui est fini de par sa nature, pourraient permettre d'accéder à toutes les vérités ? Les logiciens et les informaticiens appellent cela une machine de Turing : un programme qui fonctionne suivant un nombre fini de règles, comme nous.

Le théorème de Gödel affirme qu'aucune machine finie n'est capable de déterminer pour toute affirmation si elle est démontrable ou pas. Le grand maître Hilbert avait tort : nous ne saurons jamais tout.

Comment ces énoncés indécidables peuvent-ils quand même être vrais alors qu'on ne peut pas en décider ? Peut-on croire ce qui n'est pas démontrable, ce qui est inaccessible à la raison ? Il me suffit de dire que Gödel lui-même était un néo-platonicien, convaincu de l'existence, presque physique, d'un monde des Idées.



Le royaume métaphysique de Gödel était peuplé d'anges, de démons terrifiants, et d'êtres mathématiques, tantôt angéliques et tantôt démoniaques. Dans ce monde, il y a du vrai et du faux, mais nous n'avons accès qu'à certaines de ces vérités, celles qui sont démontrables par notre cerveau-machine de Turing. Ce monde des Idées, c'est la Nature mathématique, où tout n'est pas rationnel, le terrain de jeu, le laboratoire, dans lequel le mathématicien peut conjecturer, faire des essais, *expérimenter*, presque comme ses collègues des autres sciences.

Au fil des siècles, les mathématiques ont accepté de nombreux nouveaux venus «irrationnels», qui allaient à l'encontre des paradigmes dominants. Nous avons été contraints d'affiner l'idée de Vérité en accueillant l'indécidable, mais aussi le complexe ou le vraisemblable.

Cette Vérité est bien chahutée aujourd'hui, qu'il s'agisse de mathématiques, de sciences, de philosophie, d'histoire, ou de journalisme. Nous sommes abreuvés d'abominables «fake news» déversés sur les réseaux sociaux. Nous devons rappeler sans cesse, et enseigner à nos enfants, l'importance de la raison, cette «capacité qu'a l'Homme», comme dit le dictionnaire de l'Académie, «d'ordonner ses pensées de façon universelle et nécessaire, d'associer des notions ou des faits de manière à en tirer des concepts, des démonstrations, des preuves».

Le lanceur d'alertes Hippase ne méritait vraiment pas son sort !