La beauté des Mathématiques

Étienne Ghys

Paul Erdős est un mathématicien hongrois célèbre, décédé il y a une quinzaine d'années. On dit qu'aucun autre mathématicien n'a publié autant d'articles que lui, avec des centaines de collaborateurs. Il a donné son nom au « nombre d'Erdős », qui est la longueur de la plus petite chaîne de coauteurs qui mène un mathématicien à Erdős. Le mien est 3 : j'ai publié avec quelqu'un qui a publié avec quelqu'un qui a publié avec Erdős. Même s'il était athée, il aimait à dire que Dieu possède un livre dans lequel Il a écrit les plus belles démonstrations mathématiques et que, de temps à autre, Il en montre une page à un être humain. Erdős disait : « Il n'est pas nécessaire de croire en Dieu, mais il faut croire dans le Livre » !

Il est difficile de transmettre ce sentiment de beauté qui envahit le mathématicien face à certaines démonstrations et je ne vais pas m'y risquer ici. Je me contenterai de donner un exemple, extrêmement banal, connu de tous les mathématiciens, et unanimement reconnu comme « beau ». Il s'agit de la preuve par Euclide, il y a donc plus de 2 000 ans, qu'il existe une infinité de nombres premiers – un nombre entier est *premier* s'il n'est divisible que par lui-même et par 1. Par exemple, 6 *n'est pas* premier car il est égal à 2 fois 3 ; alors que 5 ne peut se décomposer que comme 5 fois 1 ou 1 fois 5, si bien que 5 *est* premier. Si un entier n'est pas premier, il peut se décomposer en un produit de deux nombres plus petits, qui peuvent à leur tour se décomposer s'ils ne sont pas premiers, etc. Au bout du compte, tout nombre entier se décompose en un produit de nombres premiers. Par exemple, 2013 est égal à $3 \times 11 \times 61$. Euclide affirme qu'il existe une *infinité* de nombres premiers et la preuve qu'il en donne est considérée unanimement comme de toute beauté. Prenez quelques nombres premiers : 3, 11 et 61, par exemple. Multipliez-les, vous obtenez 2013.

Ajoutez 1. Vous obtenez un nombre entier N, 2014 dans notre exemple. Évidemment, N n'est divisible par aucun des nombres premiers dont on est parti puisque le reste de la division est égal à 1. Tous les diviseurs premiers de N sont donc différents de ceux dont on est parti. Pour toute collection *finie* de nombres premiers, on peut donc trouver un nombre premier *différent* de ceux-là. Il y a donc une infinité de nombres premiers. CQFD.

J'ai choisi cet exemple dans le domaine vénérable de la théorie des nombres qui évoque immédiatement le *Tout est Nombre* de Pythagore, le *Monde des Idées* de Platon et le *Livre* d'Erdős : une espèce de réceptacle abstrait, un paradis merveilleux réservé à quelques initiés, dans lequel tout n'est qu'ordre et beauté... luxe, calme et volupté ! La plupart des mathématiciens professionnels se considèrent comme de simples explorateurs qui découvrent un territoire inconnu, qui défrichent de grandes forêts et aboutissent parfois dans de bien jolies clairières. La question philosophique « découverte ou création ? » ne se pose presque jamais dans le quotidien du chercheur au travail. Je n'entrerai pas ici dans ce débat. Je voudrais essayer en revanche de localiser ce « je-ne-sais-quoi » qui fait que les mathématiciens trouvent belle une démonstration qui peut pourtant sembler inaccessible, et surtout ennuyeuse, à l'homme de la rue.

La majorité des mathématiciens ne doutent pas que ce monde abstrait et merveilleux est universel. Dans son roman *De la Terre à la Lune*, Jules Verne imagine que des hommes représentent le théorème de Pythagore dans de vastes plaines, avec un triangle rectangle si grand que l'on peut l'observer depuis la Lune. « Tout être intelligent, disait le géomètre, doit comprendre la destination scientifique de cette figure. Les Sélénites, s'ils existent, répondront par une figure semblable, et la communication une fois établie, il sera facile de créer un alphabet qui permettra de s'entretenir avec les habitants de la Lune ». Lichnerowicz, lui, écrivait en 1988 dans *L'universalité des mathématiques et la compréhension du réel* : « Le plus grand enjeu politique de notre science est sans doute l'unification de l'humanité à travers une aventure commune [...] ; elle a imposé dans de larges champs une manière commune de penser, une méthode dont la mise en œuvre a fait prendre conscience de l'unité de l'esprit humain ».

Faudrait-il voir les mathématiciens comme des espèces de conquistadors, partis à la recherche de l'eldorado, prêchant la « vraie croix », seule et unique religion ? Je voudrais proposer une vision un peu moins... impérialiste, et un peu plus respectueuse de la diversité.

Dans son ouvrage *Science et Méthode*, Henri Poincaré s'interroge sur ce qui guide le mathématicien dans son exploration. Selon lui, la boussole qu'il utilise n'est autre que la beauté, qu'il définit de manière assez classique, comme l'harmonie des parties : « Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. [...]. Je ne parle pas ici, bien entendu, de cette beauté qui frappe les sens, de la beauté des qualités et des apparences ; non que j'en fasse fi, loin de là, mais elle n'a rien à faire avec la science ; je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir. »

À vrai dire, lorsqu'il poursuit l'analyse de la beauté mathématique, Poincaré ne manque pas de la rapprocher de l'utilité. Mais bien entendu, il ne s'agit pas ici de l'utilité immédiate, l'utilité dont il parle est celle qui permet une économie de pensée : « Et l'on voit que le souci du beau nous conduit aux mêmes choix que celui de l'utile. Et c'est ainsi également que cette économie de pensée, cette économie d'effort [...] est une source de beauté en même temps qu'un avantage pratique. »

Le beau, l'utile, c'est ce qui peut être utilisé dans de nombreuses occasions, c'est une idée qui est à la fois simple et multiusage, qui nous donne d'un coup la possibilité de comprendre beaucoup de choses. C'est en direction de ce genre de concepts que le mathématicien doit diriger ses efforts. Prenons l'exemple de la décomposition en nombres premiers. Pourquoi mérite-t-elle qu'on s'y attarde ? Il n'est pas nécessaire d'être mathématicien pour comprendre que les situations où l'on veut décomposer un objet en entités élémentaires abondent autour de nous. Il peut s'agir d'une phrase décomposée en mots, d'un produit chimique en molécules. Il peut s'agir d'un être vivant qu'on décompose en organes. En mathématique, il est important par exemple de décomposer des « idéaux », (admirez le mot), en « idéaux premiers », et je pourrais donner des dizaines de situations analogues. La méthode d'Euclide s'exporte en quelque sorte un peu partout et c'est pour cela qu'elle est considérée comme belle.

Pour expliquer mon point de vue, je voudrais partir de l'analogie avec les grands réseaux, qu'il s'agisse de celui de la SNCF, de

Facebook, d'Internet, des neurones dans mon cerveau, des réseaux de citations entre les articles scientifiques, du réseau d'Erdős, celui qui décrit les collaborations entre mathématiciens, ou encore de ce que l'on peut appeler l'univers des mathématiques, cet ensemble gigantesque d'énoncés, de propositions, de théorèmes reliés entre eux de manière subtile. Certains nœuds du réseau sont connectés à beaucoup d'autres, et d'autres n'ont que peu de connexions, voire pas du tout. Quand on voit des représentations graphiques de ces réseaux, il apparaît clairement que d'énormes bouquets semblent jaillir de certains endroits. C'est le cas de Paris pour la SNCF par exemple. Ce sont des endroits qui sont pertinents et qui méritent qu'on s'y attarde, ce sont ces endroits qui sont « beaux » car ils permettent d'accéder à beaucoup d'autres. Il s'agit plus précisément d'une définition récursive : la pertinence d'un nœud d'un réseau est d'autant plus grande qu'il mène à beaucoup d'autres nœuds pertinents. Mais comment localiser ces nœuds particulièrement importants ?

Imaginez par exemple que vous ne disposiez que d'un petit nombre *n* de vaccins pour endiguer la propagation d'un virus dans une population. Comment faut-il s'y prendre pour les distribuer aux personnes qui ont le plus de chances de transmettre la maladie par contagion, ces nœuds d'où le réseau de contagion semble jaillir ? Si vous choisissez les personnes vaccinées au hasard dans la population, vous gaspillerez vos vaccins. Mais si vous choisissez au hasard *n* personnes et si vous leur demandez de citer le nom d'une personne qu'elles connaissent, les *n* personnes citées seront probablement mieux connectées et il serait judicieux de vacciner celles-là plutôt que les *n* choisies initialement au hasard. Le hasard *dirigé* fait bien les choses... C'est en quelque sorte de cette façon que Google choisit son chemin et trouve les pages internet les plus significatives.

Le hasard dirigé évoque bien entendu l'évolution darwinienne avec la *diversité* qu'elle implique, tant dans l'espace que dans le temps. Il y a bien longtemps que les biologistes ont compris que l'évolution ne choisit pas la solution qui est « universellement » « la meilleure ». Le chemin suivi par une espèce cherche un optimum local, étant donné son environnement présent et son histoire.

Les mathématiciens ne sont-ils pas tombés dans ce péché d'orgueil qui les ferait croire que l'évolution de leur science se fait en permanence vers un optimum universel, vers une beauté intrinsèque, indépendamment des lieux, des cultures et de l'histoire ? Pourquoi la beauté mathématique serait-elle universelle, dans l'espace et dans le temps ? Vous connaissez probablement la citation de Voltaire : « Demandez à un crapaud ce que c'est que la beauté, le grand beau, [...]. Il vous répondra que c'est sa crapaude avec deux gros yeux ronds sortant de sa petite tête, une gueule large et plate, un ventre jaune, un dos brun. »

La notion de beauté en mathématique évolue dans le temps. Si j'ouvre au hasard une revue mathématique, par exemple du début du XIXe siècle, il est bien rare que j'y voie des choses que j'estime belles. Les mathématiques de cette époque n'étaient pas « câblées » comme aujourd'hui. Ce qui est simple et multi-usage ne l'est plus et, au contraire, de nouvelles connexions sont apparues. De même, si vous interrogez un théoricien des nombres et un spécialiste des équations aux dérivées partielles, il y a fort à parier qu'ils ne voient pas la beauté aux mêmes endroits. Appartiendraient-ils à deux espèces différentes ? Un mathématicien du passé avait peut-être envie de travailler sur la Nomographie, cette science, morte aujourd'hui, qui permettait de résoudre les équations les plus variées avec du papier et une règle. Sa pertinence était liée au fait que l'ingénieur en avait besoin sur le chantier. Cette branche de l'arbre de l'évolution mathématique n'est pas montée jusqu'à nous et s'est éteinte, comme les dinosaures, mais je n'y vois aucun problème, aucune dévalorisation du travail de ces collègues du passé, qui ont conduit des mathématiques belles, dans un sens qui était le leur à cette époque.

Stephen Jay Gould n'hésite pas à discuter de l'évolution technologique pour expliquer l'évolution biologique. Il prend l'exemple éclairant de l'évolution des claviers de machines à écrire. Après deux siècles d'évolution et d'innovations, nous avons abouti à un clavier azerty en France, qwerty aux États-Unis, bien d'autres ailleurs. Ces solutions ne sont ni universelles ni optimales, en aucun sens raisonnable. À chaque modification de clavier, il s'agissait de régler tel ou tel problème local, technologique ou économique qui n'avait plus cours quelques années plus tard. Le qwerty est-il meilleur que l'azerty ? On peut penser à des pierres déposées dans un paysage montagneux ; elles ont tendance à dévaler la pente et à s'immobiliser au fond d'une vallée, sans « savoir » qu'il existe des vallées encore plus basses mais situées plus loin. Lorsque le temps passe, le paysage s'érode, certains cols s'abaissent, certaines pierres passent d'une vallée à une vallée voisine, mais en aucun cas une pierre ne peut affirmer qu'elle a atteint la plus belle vallée, la plus profonde !

Les espèces vivantes évoluent, la technologie évolue, et la culture aussi bien sûr. Vous connaissez probablement le point de vue de Richard Dawkin, de la *mémétique*, cette théorie darwinienne de l'évolution des cultures.

Je vois pour le développement des mathématiques une structure analogue. Il n'y a rien de pertinent ou de beau au niveau en mathématique, pas de finalité ; il n'y a que des pertinences contingentes, locales, dans le temps et dans l'espace. Il n'y a pas de notion de profondeur mathématique sur laquelle tout le monde serait d'accord, sur tous les continents, dans toutes les cultures et à toutes les époques. Comme dans l'évolution biologique, le réseau mathématique évolue et il me semble que le mathématicien au travail essaye de trouver le chemin qui a la meilleure pertinence *locale* dans un contexte donné.

Qu'est-ce que la pertinence locale ? Je pense que c'est l'adéquation au monde dans lequel nous vivons, à condition de prendre ce mot dans un sens large, pas forcément économique.

L'autre jour, je feuilletais un livre célèbre d'algèbre de Serret, datant de la fin du XIXe. On y parle du fameux « théorème de Sturm » (qui permet de déterminer le nombre de racines d'un polynôme réel dans un intervalle donné) comme de « l'une des plus brillantes découvertes dont se soit enrichie l'Analyse mathématique ». Ah bon ? Moi, de mon petit promontoire de 2013, je n'aurais vraiment pas fait ce commentaire. Mais le problème de trouver numériquement les racines d'un polynôme était alors pertinent et ne l'est plus (ou plus précisément, le problème est résolu en pratique par nos calculatrices).

On ne peut qu'être émerveillé par la puissance créatrice de l'évolution des espèces, qui travaillent pourtant à l'aveugle. Je dirais la même chose pour les mathématiques...

Il ne faudrait cependant pas pousser l'analogie biologique trop loin ! Le développement des mathématiques a des possibilités que l'évolution n'a pas... D'abord, les mathématiciens ont une mémoire (et des bibliothèques) : une branche morte il y a longtemps peut parfois renaître en acquérant une nouvelle pertinence.

Et puis, et surtout, l'une des plus grandes forces des mathématiques est de permettre de fusionner plusieurs branches pour en faire une seule. Un arbre étonnant !