

Six leçons autour des surfaces de RIEMANN

ÉTIENNE GHYS & DJAMEL SMAÏ

9 décembre 2007



Ces notes reprennent six leçons très élémentaires sur les surfaces de RIEMANN, délivrées en mars 2005 par É. GHYS, à l’occasion d’une école d’été du CIMPA à El Oued, Algérie. On n’y trouvera très peu de démonstrations, et le but est surtout d’encourager le lecteur à étudier des ouvrages plus avancés. Les notes, rédigées par D. SMAÏ et revues par É. GHYS, suivent d’assez près les leçons orales. Les auteurs remercient les organisateurs de cette école d’été qui fut un moment exceptionnel d’échanges. Ils remercient également JOS LEYS qui a bien voulu réaliser les figures.

Leçon 1 : Cartographie

Dans son étymologie grecque, “géométrie” signifie “mesure de la Terre” (géo = Terre, métrie = mesure). Pour les besoins de la navigation notamment, la nécessité d’avoir une représentation plane de la Terre qui soit la plus exacte possible s’est faite sentir dès l’Antiquité ; ce fut la naissance de la *cartographie scientifique*. Les préoccupations du cartographe étaient, et le sont toujours, de construire des planisphères, c’est-à-dire de dessiner une (partie d’une) sphère sur un plan. La sphère est une représentation simplifiée (mais très intéressante !) de la Terre. Il existe d’autres modèles plus réalistes. Des études récentes ont montré que la forme de la Terre est très irrégulière. Devant sa géométrie très irrégulière, et pour des raisons de calcul, un ellipsoïde de révolution en est une bonne approximation. Dans ce qui suit, on considérera cependant que la Terre est une sphère parfaite. Un point de la sphère est

repéré par ses coordonnées géographiques : la *latitude*, mesurée vers le nord à partir de l'équateur, et la *longitude*, mesurée vers l'est à partir d'un méridien de référence, le méridien de Greenwich.

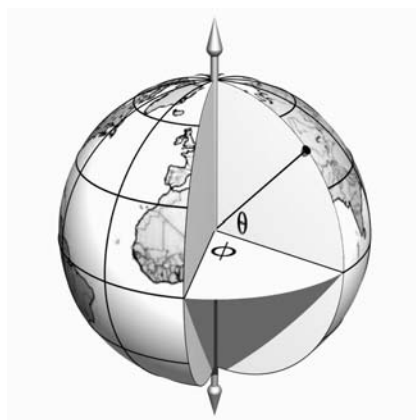


FIG. 1 – Latitude et longitude

Une première représentation plane de la Terre, très éloignée de la réalité, et que l'on pourrait qualifier de triviale, consiste en une plaque rectangulaire sur laquelle on porte en abscisse la longitude, et en ordonnée la latitude. Cette projection s'appelle parfois la “plate carrée”.

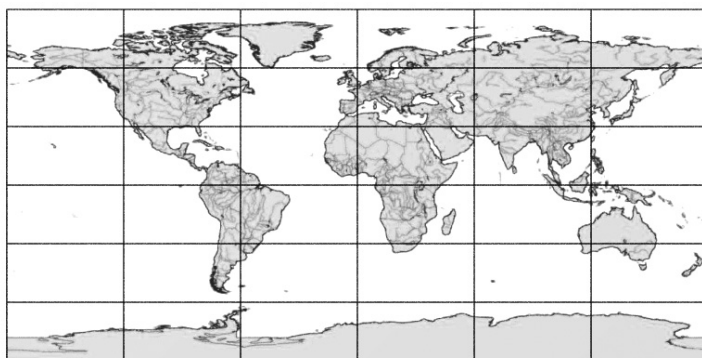


FIG. 2 – La carte plate carrée

Si l'on considère deux méridiens, tous les couples de points situés à la même latitude et sur ces deux méridiens sont représentés par deux points

à la même distance sur la carte, qu'ils soient proches du pôle nord ou de l'équateur, ce qui nous éloigne très grossièrement de la réalité.

Tirant profit de son expérience de la géométrie du plan, J.H. LAMBERT (1728-1777) a proposé de nombreuses méthodes de projection. Par exemple, si l'on veut cartographier la région du pôle nord, on peut projeter orthogonalement les points de l'hémisphère nord sur le plan $\mathcal{P}_N$ tangent au pôle nord N de la sphère. Les points d'un parallèle de latitude θ sont envoyés sur un cercle centré en N et de rayon $\varrho = \cos \theta$ (on suppose que la sphère est de rayon unité). Les points d'un méridien de longitude φ sont envoyés sur un segment radial d'origine N faisant un angle φ avec la projection du méridien de référence. Cette projection s'appelle parfois *orthographique*. Elle se comporte bien sûr très mal au voisinage de l'équateur.

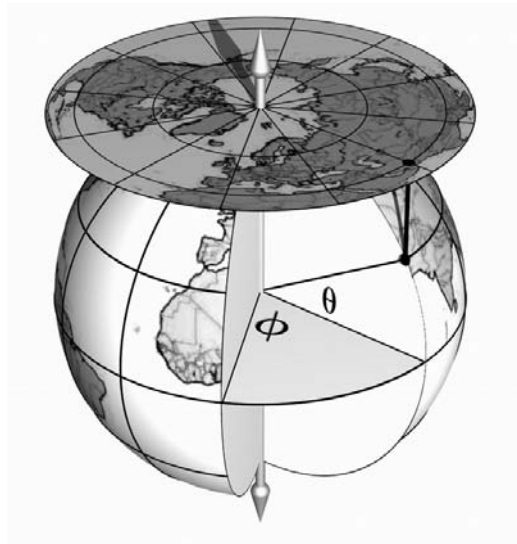


FIG. 3 – La projection orthographique

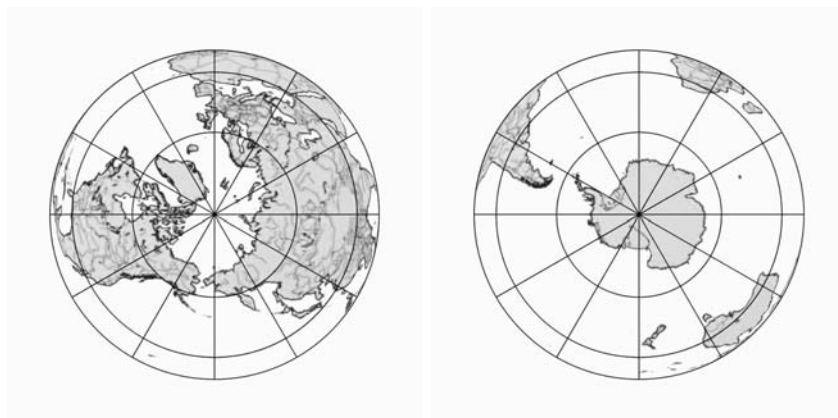


FIG. 4 – La projection orthographique, hémisphères nord et sud

Ainsi, pour un point de la sphère de coordonnées géographiques φ et θ , les coordonnées *polaires* de la projection orthographique seront $\varrho = \cos \theta$ et φ . Bien que cette projection orthographique respecte la perpendicularité des parallèles et des méridiens, elle n'est cependant pas *conforme* : les angles ne sont pas conservés en général, et donc les formes ne le sont pas non plus. Sur une telle carte, il sera difficile de reconnaître les continents, et on ne pourra pas l'utiliser pour déterminer un cap pour la navigation. Cette projection n'est pas *équivalente* non plus, c'est-à-dire qu'elle ne respecte pas les aires, qualité essentielle pour une carte géostratégique et économique (visibilité de l'importance respective des différentes régions). Il faut reconnaître une petite qualité à la projection orthographique : elle conserve les distances mesurées le long des parallèles. Pour illustrer tous ces aspects, signalons que dans ce type de cartes, le nord de l'Afrique apparaît très étalé devant une Europe qui apparaît plutôt "ramassée".

Ces cartes sont donc très peu précises. Une carte idéale serait une carte *isométrique*, c'est-à-dire une carte qui conserve les distances. Malheureusement, il est facile de se convaincre qu'une telle carte n'existe pas.

On pourra montrer, à titre d'exercice, qu'étant donnés quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de la sphère $\mathbb{S}^2$, il n'est pas possible de trouver quatre points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $distance_{\mathbb{R}^2}(A'_i, A'_j) = distance_{\mathbb{S}^2}(A_i, A_j)$, sauf dans les deux cas suivants :

1. au moins deux des quatre points sont confondus,

2. les quatre points sont sur un même demi-grand cercle.

Ici $distance_{\mathbb{R}^2}$ désigne la distance euclidienne dans le plan et $distance_{\mathbb{S}^2}$ la distance entre deux points sur la sphère : la longueur d'un arc de grand cercle de longueur minimale qui les joint.

Parmi les mathématiciens à s'être intéressés à la cartographie, il faut citer HIPPARQUE, PTOLÉMÉE et ARCHIMÈDE.

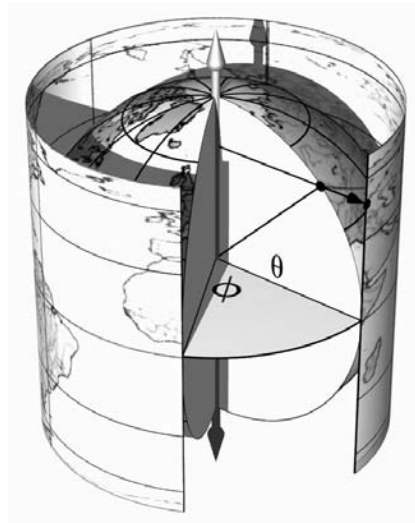


FIG. 5 – Projection d'ARCHIMÈDE

ARCHIMÈDE (287-212 av J.-C.) proposa de cartographier la Terre en projetant radialement les points de la sphère sur l'intérieur d'un cylindre de la manière que nous allons décrire. ARCHIMÈDE place la sphère, disons de rayon 1, dans un cylindre droit dont la section a un diamètre égal à celui de la sphère ; la sphère est ainsi tangente au cylindre le long de l'équateur. Il projette alors un point de la sphère sur le cylindre, horizontalement et radialement. Une fois la sphère projetée sur le cylindre, on peut découper le cylindre sur une génératrice et le dérouler sur un plan.

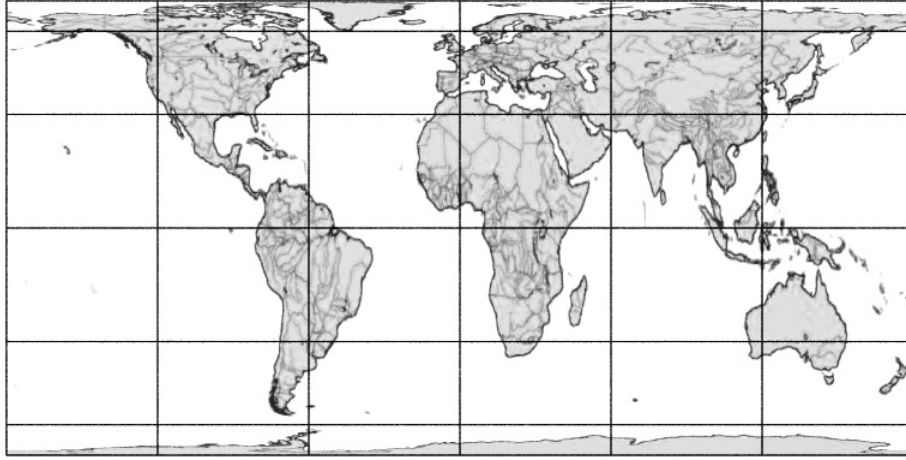


FIG. 6 – Projection d'ARCHIMÈDE

Citons maintenant le

Théorème (ARCHIMÈDE) : *La projection d'ARCHIMÈDE est équivalente, c'est-à-dire conserve les aires.*

Exercice :

1. Vérifiez que la projection d'ARCHIMÈDE n'est pas conforme.
2. Démontrez le théorème !

Bien sûr, le lecteur n'aura pas de difficulté à résoudre l'exercice précédent car il dispose de l'outil du calcul différentiel et intégral, mais ARCHIMÈDE n'en disposait pas, et on peut même dire que ce théorème est l'une des premières apparitions de l'intégrale dans l'histoire des mathématiques. Pour admirer le génie d'ARCHIMÈDE, on pourra se plonger dans ses œuvres complètes :

[http : //www.archive.org/details/worksofarchimede029517mbp](http://www.archive.org/details/worksofarchimede029517mbp).

Cette projection d'ARCHIMÈDE s'appelle parfois la *projection azimutale équivalente de Lambert* : ironie de l'histoire.

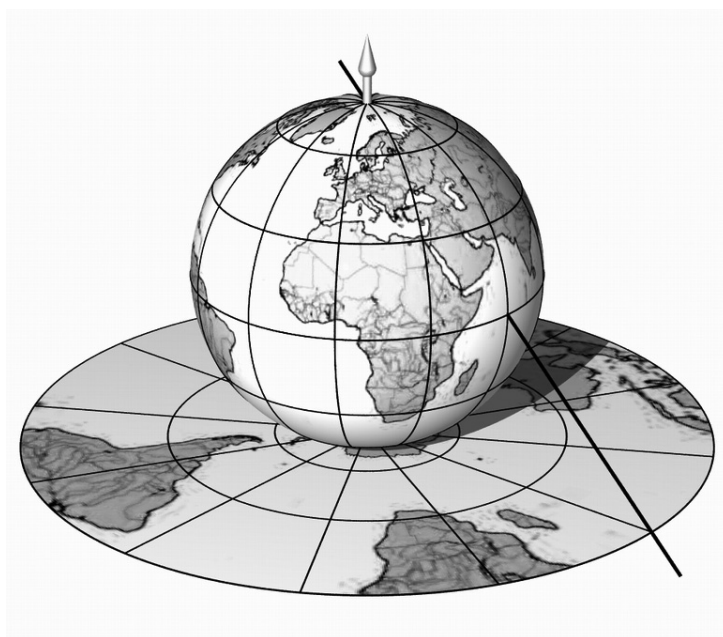


FIG. 7 – Projection stéréographique

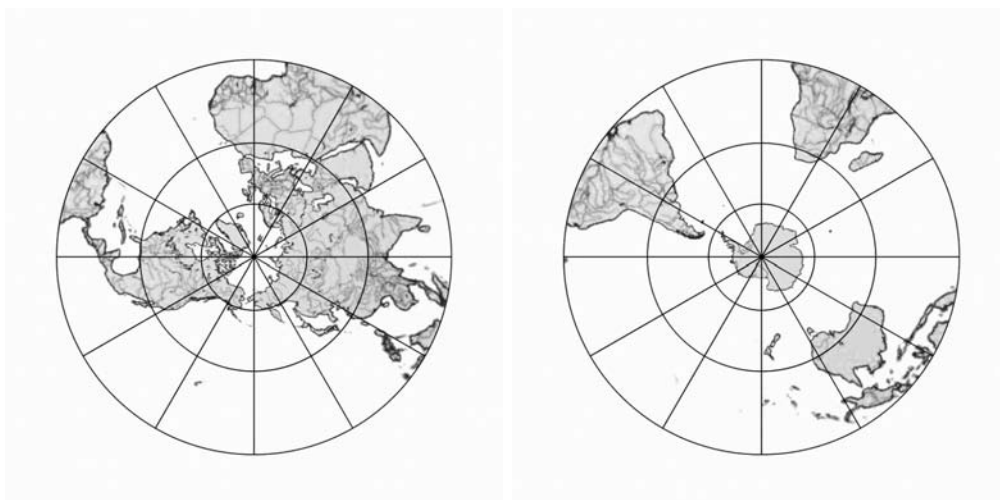


FIG. 8 – Projections stéréographiques, centrées aux pôles nord et sud

Avec HIPPARQUE (190–120 av. J.-C.), on commence à s'intéresser à la position des étoiles dans le but de les cataloguer. C'est PTOLÉMÉE (90–170 ap. J.-C.), intéressé lui aussi par ce problème, qui est amené à introduire la célèbre *projection stéréographique*.

On désigne par N le pôle nord et par $\mathcal{E}$ le plan de l'équateur ; le projeté d'un point Q de la sphère, différent de N , est le point Q' intersection de la droite NQ avec le plan $\mathcal{E}$. Les méridiens sont envoyés sur des demi-droites radiales d'origine O , centre de la sphère, et les parallèles sur des cercles de centre O . Citons deux théorèmes (connus de HIPPARQUE ?) :

Théorème (HALLEY, 1656-1743) : *La projection stéréographique envoie un cercle tracé sur la sphère sur un cercle ou une droite du plan de projection.*

Théorème : *La projection stéréographique est conforme : deux courbes tracées sur la sphère qui se coupent en un point différent du pôle nord sont projetées sur deux courbes du plan se coupant suivant le même angle.*

Démonstration : La preuve présentée ici est tirée du merveilleux livre de HILBERT et COHN-VOSSEN, intitulé *The Geometry and the Imagination*, dont la lecture est hautement recommandée...

Commençons par la démonstration du second théorème : *la projection est conforme.*

Notons D la droite contenant N, Q, Q' , et $\mathcal{P}_N, \mathcal{P}_Q$ les plans tangents à la sphère respectivement aux points N et Q . Ces plans, pour des raisons de symétrie, forment des angles égaux avec la droite D . Les plans $\mathcal{P}_N$ et $\mathcal{E}$, étant parallèles, forment des angles égaux avec D .

Soit maintenant Δ une droite tangente en Q à la sphère. Notons $\mathcal{P}$ le plan contenant Δ et N . Notons enfin Δ' l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{E}$.

On déduit des observations précédentes que Δ et Δ' forment des angles égaux avec D . Autrement dit, la symétrie par rapport au plan médiateur du segment QQ' transforme Δ en Δ' .

PS est tangente en P à la sphère, et $P'S'$ est le projeté sur $\mathcal{E}$ du segment PS . Comme conséquence on a l'égalité des angles $\widehat{P'PS}$ et $\widehat{PP'S'}$ (voir la démonstration précédente). Attention la figure est bien sûr vue en perspective si bien que cette égalité ne saute pas aux yeux !

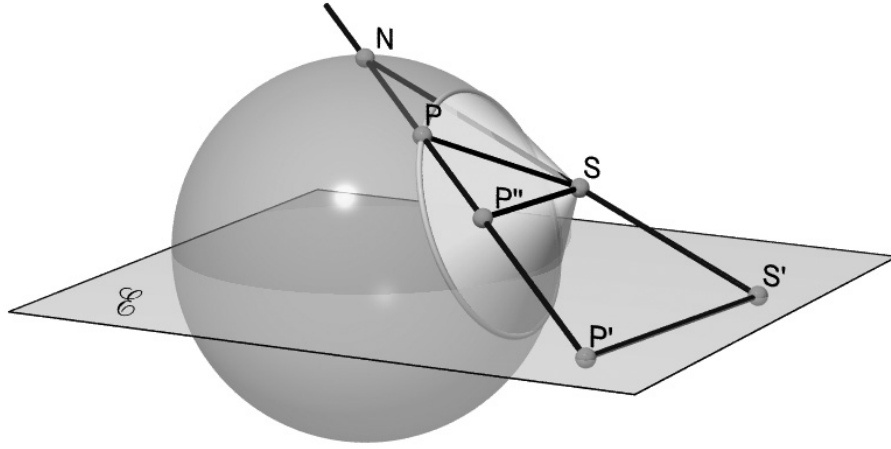


FIG. 10 – La projection stéréographique

À partir de S traçons la droite parallèle à $P'S'$ et notons P'' le point où elle coupe NP' . Le triangle $PP''S$ a des angles en P et P'' égaux. On a donc $SP = SP''$. Observons maintenant que l'on a $P'S'/PS = P'S'/P''S = S'N/SN$ car les triangles $NS'P'$ et NSP'' sont semblables. On en tire la relation $P'S' = PS \cdot S'N/SN$. On voit ainsi que lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, la longueur du segment PS restant constante, les points P' projetés des points P de $\mathcal{C}$ restent équidistants de S' . Le projeté de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$ est donc un cercle de centre S' .

Bien sûr, si le cercle $\mathcal{C}$ passe par N , la droite intersection du plan du cercle et de $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{C}$.

Ceci termine la démonstration.

MERCATOR naît en 1512 et meurt en 1594, époque où la navigation maritime connaît un grand essor. Il publie le premier livre où sont collectées des cartes géographiques utiles aux navigateurs, livre auquel il donne le nom d'*Atlas*. C'est en 1569 qu'il publie les 18 feuilles de *La projection de MERCATOR*. La préoccupation majeure des cartographes de cette époque était de concevoir une carte qui transforme les courbes suivies par un marin dont le cap est constant, celles qui font un angle constant avec les méridiens, appelées *loxodromes*, en des droites sur la carte. Pour corriger l'effet de distorsion exagérée des régions polaires, notamment celui que donne la projection plate carrée, MERCATOR eut l'idée de changer de graduation pour repérer les latitudes. Pour cela il procéda à un changement d'échelles de la forme

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi, F(\theta)).$$

Et pour résoudre le problème de la navigation à cap constant il va exiger que ce changement d'échelle soit conforme, ce qui contraint F à vérifier l'équation différentielle

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

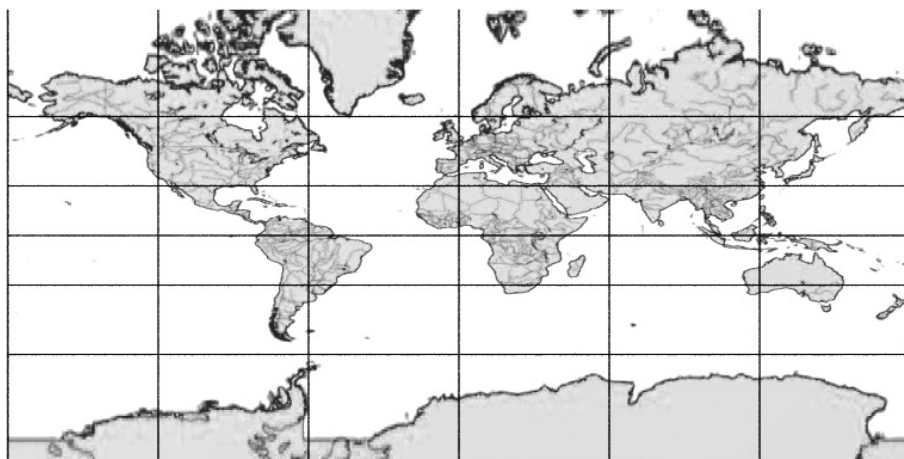


FIG. 11 – La projection de MERCATOR

Bien entendu, MERCATOR ne s'exprime pas de cette manière et il était à son époque impossible de calculer la primitive de la fonction $1/\cos \theta$! Le

calcul différentiel n’existait pas encore et même la fonction logarithme n’avait pas encore été définie... Ce que faisait MERCATOR, c’était en quelque sorte une intégration numérique. En traçant sa carte de l’équateur vers le nord, il espaçait les parallèles de plus en plus, pour compenser le fait que ceux-ci sont tous représentés par des lignes horizontales qui ont toutes la même longueur sur la carte alors que sur la sphère, ils sont de plus en plus courts. Cette compensation est faite pour que la dilatation soit la même dans la direction des méridiens et des parallèles.

Il est à noter que la projection de MERCATOR fausse nos images mentales de la sphère. Dans ces cartes l’Europe occupe par exemple une place plus importante que le nord de l’Afrique. On notera aussi que le pôle nord est rejeté à l’infini (car $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \infty$).



Leçon 2 : Cartes optimales

Dans ce qui suit, on va s’intéresser à la “qualité” des cartes. Un théorème dû à TCHEBYCHEV affirme que parmi toutes les cartes conformes d’une région donnée, il en existe une et une seule qui est meilleure que toutes les autres. Mais avant d’en préciser l’énoncé, donnons d’abord des réponses aux questions suivantes :

1. Qu’est-ce qu’une carte de géographie ?
2. Qu’appelle-t-on échelle d’une carte ?
3. Comment mesurer la qualité d’une carte ?

Une *carte* est une application injective f d’un domaine (i.e. un ouvert connexe) $\mathcal{D}$ de la sphère dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le domaine $\mathcal{D}$ est censé représenter un pays ou une région de la Terre. Étant donnée une carte $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, l’échelle de cette carte aux points $x, y \in \mathcal{D}$ est le rapport

$$\sigma_{x,y} = \frac{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(f(x), f(y))}{\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(x, y)}.$$

On notera $\sigma_2 = \sup \sigma_{x,y}$ l’échelle maximale, $\sigma_1 = \inf \sigma_{x,y}$ l’échelle minimale, et on adoptera comme critère de qualité d’une carte le rapport σ_2/σ_1 .

Le *défaut* de la carte sera mesuré par la quantité positive $\delta = \log(\sigma_2/\sigma_1)$. La qualité de la carte sera d'autant meilleure que δ est petit, et l'idéal serait que le défaut δ soit nul, ce qui correspondrait à une carte à échelle constante. Un théorème de MILNOR affirme que *pour tout pays $\mathcal{D}$, il existe une carte optimale*, c'est-à-dire une carte $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui minimise le défaut $\delta(f)$. Avant de donner une esquisse de la preuve de cette affirmation signalons une conjecture due également à MILNOR (voir : A problem in cartography. *Amer. Math. Monthly* 76, 1969.) :

Conjecture (MILNOR, 1960) : *Si $\mathcal{D}$ est un domaine convexe à l'intérieur de l'hémisphère sud (par exemple), alors la carte optimale est unique (à une similitude du plan près), et c'est un difféomorphisme sur son image.*

On pourrait commencer par s'intéresser au cas où $\mathcal{D}$ est un rectangle curviligne délimité par deux méridiens et deux parallèles pour lequel la carte optimale est inconnue.

Passons maintenant à une esquisse de la preuve de l'affirmation de MILNOR concernant l'existence des cartes optimales.

L'idée est de considérer une suite de cartes $f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont la suite des défauts $\delta(f_n)$ tend vers la borne inférieure des défauts. On montre ensuite que f_n converge vers une carte f_∞ dont le défaut est le plus petit possible.

Dans une première étape, on centre les cartes en un point $p \in \mathcal{D}$ en imposant la condition $f_n(p) = 0$. On suppose que $\sigma_2(f_n) = 1$, quitte à composer les cartes f_n avec des similitudes convenables. Dans une seconde étape, à l'aide du théorème d'ASCOLI-ARZÉLA, on extrait une sous-suite (f_{n_k}) qui converge. On laisse au lecteur le soin de compléter les détails.

MILNOR considère une calotte sphérique $\mathcal{D}_\alpha$ dont l'aire est $2\pi(1 - \cos \alpha)$ (rappelez-vous le théorème d'Archimède). Il montre que pour un tel domaine, il existe une unique carte qui minimise le défaut (à similitude près bien sûr). Il s'agit de la *projection azimutale équidistante*. Elle envoie le point de latitude θ et de longitude φ sur le point de coordonnées polaires $\pi/2 - \theta, \varphi$. Les méridiens sont représentés par des rayons issus de l'origine et les longueurs sont respectées le long des méridiens.

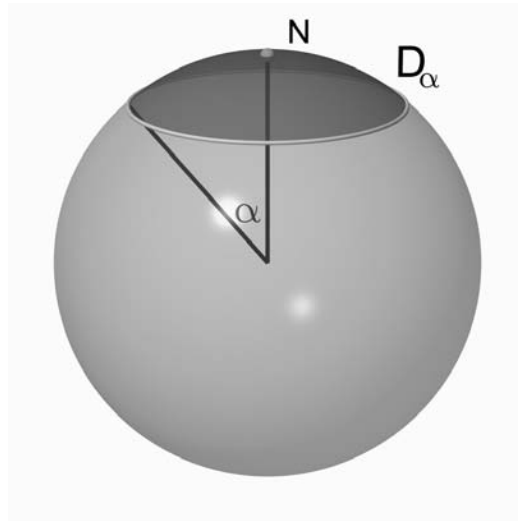


FIG. 12 – Une calotte sphérique

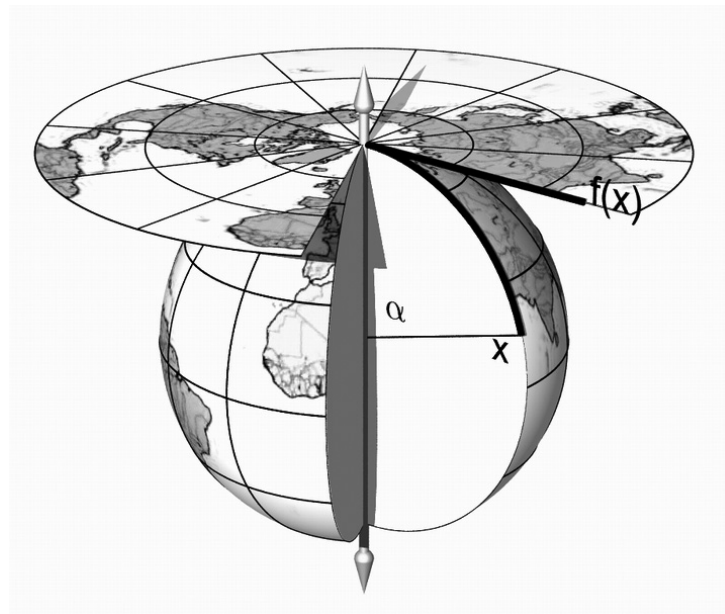


FIG. 13 – Projection azimutale équidistante

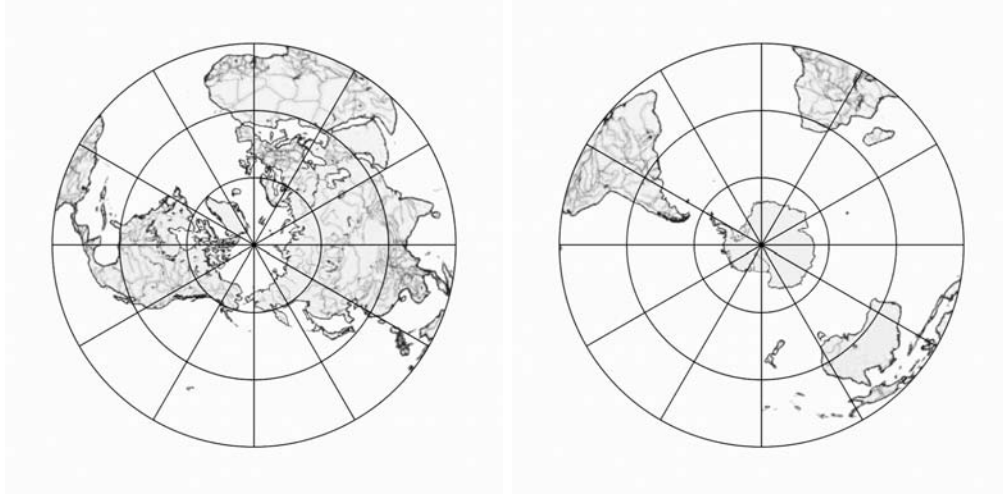


FIG. 14 – Projections azimutales équidistantes, centrées aux pôles nord et sud

Le calcul explicite des défauts comparés des projections stéréographiques et azimutales équidistantes donne :

$$\delta_{azim} = \log(\alpha/\sin \alpha)$$

$$\delta_{stereo} = 2 \log(1/\cos(\alpha/2)).$$

On constate que, pour α petit, le défaut de la carte azimutale est environ trois fois meilleur que celui de la carte stéréographique. Ceci amène MILNOR à énoncer une conjecture proposant une estimation du défaut à partir de l'aire du pays.

Conjecture (MILNOR) : *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^2$ un pays convexe, situé dans un hémisphère. On choisit α tel que $\mathcal{D}$ et la calotte $\mathcal{D}_\alpha$ aient la même aire : $\text{aire}(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{D}_\alpha)$. Il existe alors une carte $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\delta(f) \leq \log(\alpha/\sin \alpha)$.*

L'aire de $\mathcal{D}_\alpha$ est égale à $2\pi(1 - \cos \alpha)$ par le théorème d'ARCHIMÈDE. Par ailleurs, on vérifie facilement que $\log(\alpha/\sin \alpha) \leq 2\pi(1 - \cos \alpha)/(4\pi)$ pour tout $\alpha \in [0, \pi/2]$. L'énoncé suivant est donc une conjecture plus faible.

Sous-conjecture : *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^2$ un pays convexe. Il existe une carte $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\delta(f) \leq \text{aire}(\mathcal{D})/\text{aire}(\mathbb{S}^2)$.*

MILNOR fait remarquer que les meilleures cartes actuellement disponibles des États-Unis d'Amérique sont précises à 2,2 %, alors qu'ils ne recouvrent que 1,5 % de la surface du globe. Le défi est de trouver une carte des États-Unis d'Amérique précise à 1,5 % (même si ce pays n'est pas convexe, ni même connexe).

Dans toute la discussion que nous venons d'avoir, les cartes ne sont pas nécessairement conformes. On peut se poser des questions analogues pour des cartes conformes, et la réponse est alors donnée par un théorème dû à TCHEBYCHEV.

Théorème (TCHEBYCHEV) : *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^2$ un pays convexe situé dans une hémisphère. Alors, parmi toutes les cartes conformes de $\mathcal{D}$, il en existe une et une seule, à une similitude près, qui minimise le défaut. Cette carte optimale est caractérisée par le fait que la “dilatation” est constante le long de la frontière de $\mathcal{D}$.*

Précisons ce que l'on entend par *conforme*. Pour une application $\mathbb{R}$ –linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\det L > 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L respecte les angles : pour tout couple de vecteurs v_1, v_2 , l'angle formé par ces vecteurs est égal à celui formé par leurs images.
2. Il existe un réel λ positif tel que pour tout vecteur v , on a $\|Lv\| = \lambda\|v\|$.
3. La matrice de L , dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
4. Dans l'identification naturelle de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'application L est $\mathbb{C}$ –linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: elle s'écrit $L(v) = \mu v$ pour un certain μ de $\mathbb{C}^*$.

Une application L qui vérifie l'une de ces propriétés est une *similitude*. Cette notion se généralise sans difficulté aux applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension 2 orientés, munis d'une forme quadratique définie positive.

Considérons maintenant deux surfaces orientées S_1 et S_2 , munies des métriques riemanniennes g_1 et g_2 , si bien que leurs espaces tangents sont munis de formes quadratiques définies positives. Une application $f : S_1 \rightarrow S_2$ est dite conforme si pour tout x dans S_1 , la différentielle $d_x f$ est une similitude.

Si f est conforme, il existe donc une application $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que l'on ait pour tout $x \in S_1$, $\|d_x f(v)\|_{g_2} = \lambda(x)\|v\|_{g_1}$.

Remarque : Pour ce qui nous concerne, S_1 sera la sphère ronde c'est-à-dire la sphère munie de la métrique induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

On appellera *dilatation* de la carte f au point x le nombre $\lambda(x)$.

Posons-nous maintenant la question de savoir si une carte conforme est unique au sens où la donnée d'une carte permet de déterminer toutes les autres cartes conformes.

Considérons donc deux cartes conformes f et g d'un même pays $\mathcal{D}$. L'application $\varphi = g \circ f^{-1}$ est un difféomorphisme conforme de l'ouvert $f(\mathcal{D})$ sur l'ouvert $g(\mathcal{D})$, et si l'on regarde ces deux ouverts dans $\mathbb{C}$, dire que φ est conforme revient à dire que φ vérifie les équations de CAUCHY-RIEMANN, c'est-à-dire que φ est holomorphe (après tout, conforme et holomorphe ne sont que deux versions du même mot, en latin et en grec).

Résumons : étant donnée une carte conforme f sur $\mathcal{D}$, toute autre carte conforme est obtenue en composant f avec φ difféomorphisme *holomorphe* entre l'ouvert $f(\mathcal{D})$ et son image.

On peut maintenant donner les grandes lignes de la preuve du théorème de TCHEBYCHEV.

Pour des raisons de commodité, on inverse le sens des flèches et des applications : une carte ira d'un ouvert de $\mathbb{C}$ vers un pays. Supposons que l'on ait une carte conforme f d'un pays $\mathcal{D}$ dont la dilatation soit constante sur la frontière. Quitte à composer la carte avec une similitude, on pourra supposer que la dilatation est égale à 1. Toute autre carte g de $\mathcal{D}$ s'écrira sous la forme $g = f \circ \varphi$, avec φ holomorphe. On se propose alors de montrer que pour tout point x on a l'inégalité :

$$\sup_x \log \lambda_g(x) - \inf_x \log \lambda_g(x) \geq \sup_x \log \lambda_f(x) - \inf_x \log \lambda_f(x),$$

car ceci entraîne évidemment que le défaut $\delta(f)$ de la carte g est supérieur à celui de la carte f .

On observe pour cela que :

1. $\log \lambda_g(x) = \log \lambda_f(x) + \log |\varphi'(f(x))|$.
2. $\log |\varphi'(x)|$ est une fonction harmonique ; son maximum et son minimum sont donc atteints sur le bord.

3. $\log \lambda_f$ et $\log \lambda_g$ atteignent leur minimum sur le bord.
4. $\log \lambda_f \geq 0$ car son minimum est atteint sur le bord et vaut donc 0.

Il reste à montrer qu'il existe effectivement une carte conforme dont la dilatation est égale à 1 sur la frontière. On considère une carte conforme f dont on suppose la dilatation non constante sur le bord (par exemple, la projection stéréographique), et on la modifie par une fonction holomorphe pour la rendre optimale. La dilatation de la nouvelle carte est :

$$\lambda_f(x)|\varphi'(f(x))|.$$

Sur $f(\mathcal{D}) \subset \mathbb{C}$, la fonction $\log |\varphi'(z)| = \Re \log \varphi'(z)$ est harmonique (noter qu'une détermination du logarithme existe car on est sur un convexe), et $\log \lambda_f(x)$ est donné sur le bord. La dilatation de la nouvelle carte devant être constante sur la frontière, on est alors amené à trouver une fonction u holomorphe sur $f(\mathcal{D})$ de partie réelle $\Re(u)$ donnée sur le bord ; c'est le problème de DIRICHLET pour les fonctions harmoniques. On sait qu'il admet une solution. On obtient φ en prenant une primitive de $\varphi'(z) = \exp(u(z))$. L'unicité de la solution du problème de DIRICHLET montre alors que la carte conforme optimale est unique. Le théorème est donc établi.



Leçon 3 : Surfaces de Riemann

Et si la Terre n'était pas parfaitement ronde ? En fait, nous savons maintenant que la Terre est presque un ellipsoïde. Existe-t-il encore des cartes conformes ?

C'est GAUSS qui nous répond : *il existe toujours une carte conforme sur la Terre, quelle qu'en soit la forme.*

Avant de donner un énoncé précis du théorème de GAUSS, nous avons besoin de la notion de surface de RIEMANN, notion qui généralise la surface ronde de la Terre que nous avons déjà considérée.

Définition : Une surface de RIEMANN est une surface (variété de dimension 2) munie d'un atlas (U_i, f_i) , les f_i étant des homéomorphismes de U_i vers un ouvert $f_i(U_i)$ de $\mathbb{C}$, tel que les changements de cartes

$$\varphi_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$$

soient holomorphes.

Remarquons le joyeux anachronisme ! Nous utilisons le nom de RIEMANN dans la démonstration d'un théorème de GAUSS... Remarquons également l'emploi du mot "atlas" qui remonte, nous l'avons vu, à MERCATOR.

Commençons par un exemple très simple. La sphère unité peut-être recouverte par deux ouverts : les complémentaires des pôles nord et du pôle sud, respectivement. Chacun de ces ouverts peut être représenté dans le plan $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ par projection stéréographique (à partir des pôles nord et sud respectivement). Il n'est pas difficile d'expliciter le "changement de cartes" : c'est la transformation $z \mapsto 1/z$ qui est une fonction holomorphe. D'ailleurs, il n'est pas nécessaire de faire ce calcul pour savoir que le changement de cartes est holomorphe puisque nous savons déjà qu'il est conforme. Ainsi, la projection stéréographique permet de munir la sphère d'une structure de surface de Riemann ; on parle alors de *sphère de RIEMANN* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Exercice : MERCATOR "invente" le logarithme complexe. Montrer que si on envisage la sphère comme la sphère de RIEMANN, la carte de MERCATOR n'est rien d'autre que l'application $z \mapsto \log z$. Bien sûr, il faut découper le long d'un méridien pour que le logarithme puisse être défini sans problème.

On peut définir la notion de fonction holomorphe entre deux surfaces de Riemann : ce sont simplement les fonctions qui sont holomorphes quand on les considère dans les cartes locales. Par exemple, une fonction holomorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeurs dans la sphère de RIEMANN $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une fonction qui est holomorphe sur l'ouvert où elle prend des valeurs finies et dont l'inverse est une fonction holomorphe sur l'ouvert où elle prend des valeurs non nulles. On retrouve ainsi le concept de fonctions méromorphes. Retenons donc qu'une fonction holomorphe à valeurs dans la sphère de RIEMANN n'est rien d'autre qu'une fonction méromorphe.

Signalons qu'une surface de RIEMANN est toujours orientable. Toute surface riemannienne orientée, autrement dit, toute surface orientée munie d'une

métrique riemannienne définit naturellement une surface de RIEMANN grâce au théorème fondamental suivant :

Théorème (GAUSS 1822) : *Soit g une métrique riemannienne sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine. Alors il existe un ouvert V contenant l'origine, et une carte conforme $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.*

Rappelons que conforme veut dire qu'il existe une application $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout v tangent en x on a $g_x(v) = \lambda(x)\|v\|^2$.

GAUSS a montré ce théorème sous l'hypothèse que g est analytique réelle. Ce théorème fut ensuite démontré dans les cas C^∞ , C^1 (1920), C^0 (1960) et même mesurable.

Une manière d'exprimer la même chose consiste à dire qu'une classe conforme de métrique riemannienne sur une surface définit canoniquement une structure de surface de RIEMANN. Réciproquement, pour toute surface de RIEMANN, on peut trouver une classe conforme de métriques riemanniennes qui la définit.

Nous allons donner les grandes lignes de la magnifique démonstration de GAUSS ; on suppose donc g analytique réelle.

Pour cela, en nous inspirant de la méthode de GAUSS, nous allons commencer par démontrer un théorème exactement analogue mais dans le cas où l'ouvert U est muni d'une métrique *lorentzienne* g . On se donne donc en chaque point de U une forme quadratique de signature $(+, -)$ et il s'agit de montrer que cette métrique lorentzienne est conforme à la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$ de $\mathbb{R}^2$ (pour une généralisation évidente du concept de conformité dans le cadre lorentzien). Voici comment on procède.

En chaque point de U , la métrique g définit deux droites sur lesquelles elle s'annule : les deux directions isotropes. Localement, on peut trouver deux champs de vecteurs non singuliers qui paramètrent ces directions. Lorsqu'on les intègre, on définit ainsi deux réseaux de courbes isotropes, qui s'intersectent transversalement.

Pour la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$, ces courbes ne sont bien entendu que les droites parallèles de pente ± 1 .

On fixe maintenant un point base p_0 dans U et on choisit arbitrairement un point P_0 de $\mathbb{R}^2$.

Par le point p_0 passent deux courbes isotropes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Par P_0 passent deux droites isotropes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de la métrique lorentzienne standard de $\mathbb{R}^2$. On envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{D}_1$ par un difféomorphisme f_1 arbitraire, et $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{D}_2$ par un autre difféomorphisme f_2 . Soit maintenant un point m de U suffisamment proche de l'origine. Par m passent deux courbes isotropes $\tilde{\mathcal{C}}_1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_2$. Quitte à restreindre l'ouvert U en un ouvert plus petit V , on peut supposer que $\tilde{\mathcal{C}}_1$ intersecte $\mathcal{C}_2$ en un seul point p_2 , et l'autre, $\tilde{\mathcal{C}}_2$, intersecte $\mathcal{C}_1$ en un seul point p_1 .

La carte ψ que l'on cherche à construire est celle qui envoie le point m de V sur le point $M = \psi(m)$ de $\mathbb{R}^2$, intersection des droites isotropes de $\mathbb{R}^2$ passant par les points $P_1 = f_1(p_1)$ et $P_2 = f_2(p_2)$. La transformation ψ ainsi définie envoie courbes isotropes de V sur droites isotropes de $\mathbb{R}^2$ et donc directions isotropes de la métrique lorentzienne g sur V sur directions isotropes de la métrique lorentzienne standard de $\mathbb{R}^2$.

Remarquons — c'est un point important — que deux formes quadratiques de signature $(+, -)$ sur un espace vectoriel réel de dimension 2 sont proportionnelles si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes.

On peut donc écrire $\psi_*g = \lambda(dx^2 - dy^2)$ où λ est une fonction. Autrement dit ψ est une carte conforme et le théorème de GAUSS est établi dans le cadre lorentzien.

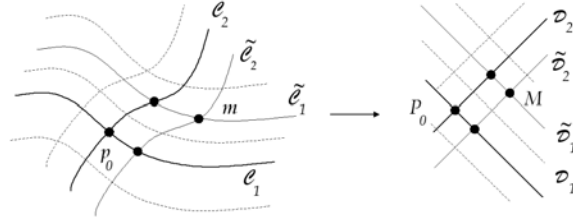


FIG. 15 – Théorème de GAUSS, version lorentzienne

Dans le cas où g est une métrique *riemannienne* analytique réelle, il n'y a bien sûr pas de direction isotrope. Mais c'est la même idée qui est mise en œuvre avec, cependant, plus d'imagination. On commence par complexifier l'ouvert U . Soit donc $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^2$ un complexifié de U ; c'est un voisinage ouvert de U considéré maintenant comme contenu dans $\mathbb{C}^2$. On notera $\tilde{g}_0 = du^2 + dv^2$ la métrique "riemannienne complexe" standard de $\mathbb{C}^2$, u et v étant les fonctions coordonnées usuelles sur $\mathbb{C}^2$ (à strictement parler ce n'est pas une

métrique riemannienne puisque cette forme quadratique prend des valeurs complexes). Les coefficients de la métrique g étant des fonctions analytiques réelles, on peut les prolonger, de manière unique, en une métrique $\tilde{g}$, analytique complexe (i.e. holomorphe) sur l'ouvert $\tilde{U}$, quitte à diminuer $\tilde{U}$. Puisque les coefficients de g sont réels, $\tilde{g}$ est invariant par la conjugaison complexe $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$. Sur $\mathbb{C}^2$ on dispose de deux réseaux transverses de droites complexes isotropes pour la métrique standard $\tilde{g}_0$, d'équations $v = \pm iu + cste$. Sur $\tilde{U}$ on dispose de deux champs de droites complexes holomorphes, isotropes pour la métrique $\tilde{g}$. On intègre ces deux champs pour obtenir deux réseaux de courbes holomorphes se coupant transversalement (ces courbes dans $\mathbb{C}^2$ correspondent à des surfaces dans $\mathbb{R}^4$).

On fixe maintenant un point p_0 dans U et on l'envoie sur un point réel arbitraire P_0 de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Par p_0 passe une courbe complexe isotrope $\tilde{\mathcal{C}}_1$. Par p_0 passe également la courbe complexe $\tilde{\mathcal{C}}_2$ transformée par conjugaison complexe de la courbe $\tilde{\mathcal{C}}_1$. À l'aide de ces courbes on définit, exactement comme dans le cadre lorentzien, une transformation $\tilde{\psi}$ d'un voisinage $\tilde{V}$ de p_0 , inclus dans $\tilde{U}$, à image dans $\mathbb{C}^2$, et qui a la propriété additionnelle d'être invariante par la conjugaison complexe, ce qui permet de conclure en "décomplexifiant" le cadre que nous avons mis en place. Le fait que la complexification d'un difféomorphisme ψ préserve les directions isotropes de la complexification d'une métrique signifie précisément que le difféomorphisme est conforme.

Terminons cette leçon par une conjecture. On suppose que la métrique g n'est ni riemannienne ni lorentzienne, mais qu'elle dégénère de manière générique : le long d'une courbe lisse C , la métrique g a un noyau de dimension 1 qui est transverse à C , et la valeur propre qui s'annule sur C a son gradient qui ne s'y annule pas.

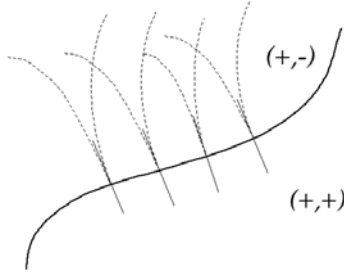


FIG. 16 – “Métrique” dégénérée le long d’une courbe

MIERNOWSKI a montré que dans le cas où la métrique est *analytique*, g est conforme à $dx^2 + xdy^2$. Conjecture : ce résultat est encore vrai dans le cas d'une métrique g de classe C^∞ .



Leçon 4 : mécanique des fluides

C'est la physique qui est à l'origine du problème auquel nous allons nous intéresser, plus précisément, la mécanique des fluides en ses débuts au XIX^e siècle. On s'intéresse à l'écoulement plan stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan. Commençons par préciser ce que signifient ces hypothèses :

1. le champ des vitesses X reste parallèle à un plan fixe, disons de coordonnées x, y , et invariant par les translations dans la direction orthogonale z .
2. l'écoulement est *stationnaire* (ou permanent), ce qui signifie que X est indépendant du temps.
3. le fluide est *incompressible* : un domaine fluide que l'on suit dans son mouvement garde un volume constant ; cette propriété se traduit par $\operatorname{div} X = 0$.
4. l'écoulement est *irrotationnel* (ou sans tourbillon) : une particule fluide se déplace sans rotation instantanée, propriété qui se traduit par la relation $\operatorname{rot} X = 0$.

Pour plus de détails, on pourra consulter le livre de GERMAIN et MULLER : *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, 1995, mais aussi le cours en ligne :

www.diam.unige.it/~irro/elementari_e.html, ou
www.eng.fsu.edu/dommelen/courses/flm/flm00/topics/pot/index.html.

Sur $\mathcal{D}$ on définit deux 1-formes différentielles, ω et ω^* , en posant pour tout $v \in \mathbb{R}^2$

$$\omega(v) = \langle v, X \rangle \quad \text{et} \quad \omega^*(v) = \langle v, X^\perp \rangle,$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire et $X^\perp$ est le vecteur X tourné de 90 degrés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ; si X a pour composantes X_1 et X_2 dans un système de coordonnées orthonormées, $X^\perp$ a pour composantes X_2 et $-X_1$. Les différentielles de ω et ω^* s'écrivent respectivement :

$$d\omega = (\text{rot}X)dx \wedge dy \quad \text{et} \quad d\omega^* = (\text{div}X)dx \wedge dy.$$

Les hypothèses (3) et (4) se traduisent alors par les relations (3') : $d\omega^* = 0$ et (4') : $d\omega = 0$. On regroupe ω et ω^* en une seule forme différentielle complexe Ω en posant $\Omega = \omega - i\omega^*$. En fait Ω est $\mathbb{C}$ -linéaire si bien que Ω est une 1-forme complexe fermée : $d\Omega = 0$. Il existe donc une fonction f , holomorphe sur $\mathcal{D}$, telle que $\Omega = f(z)dz$ avec $z = x + iy$. Cette fonction est appelée, selon une terminologie en usage chez les mécaniciens des fluides, *vitesse complexe* (improprement sans doute car il s'agit en fait de la vitesse complexe conjuguée). On peut donc dire, dans la situation la plus générale “qu'un écoulement est une fonction holomorphe”. En intégrant f (au moins localement) on peut écrire $\Omega = d\Phi$, avec Φ holomorphe. La fonction Φ est le *potentiel (complexe) de l'écoulement*.

La transformation Φ envoie les lignes de courant (orbites du champ X) qui sont également les trajectoires des particules fluides (puisque l'écoulement est stationnaire) sur les droites horizontales $\Re(w) = \text{cste}$. Les lignes de courant sont les lignes de niveau de la partie imaginaire de Φ . La connaissance de Φ détermine entièrement l'écoulement. En notant X_1 et X_2 les composantes du vecteur X , on a les égalités

$$\overline{X} = X_1 - iX_2 = f = \frac{d\Phi}{dz},$$

Voici quelques exemples d'écoulement.

1. **écoulement uniforme** : $f(z) = 1$ et $\Phi(z) = z$.

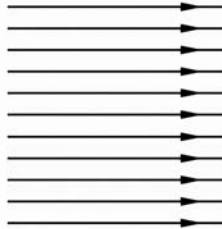


FIG. 17 – Un flot constant

Le champ des vitesses X est constant.

- | | |
|--|--|
| <p>2. Robinet (source)</p> <p>$\Phi(z) = \log z,$
 $f(z) = 1/z,$
 $X = 1/\bar{z},$</p> | <p>Siphon(puits)</p> <p>$\Phi(z) = -\log z,$
 $f(z) = -1/z,$
 $X = -1/\bar{z},.$</p> |
|--|--|



FIG. 18 – Une source

Ces potentiels définissent des écoulements dans tout le plan privé de l'origine.

3. **Vortex ou tourbillon**

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= i \log z, \\ f(z) &= i/z, \\ X(z) &= -i/\bar{z}.\end{aligned}$$

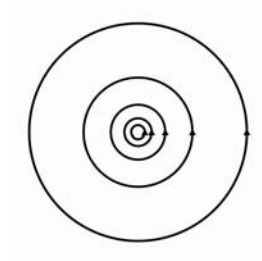


FIG. 19 – Un tourbillon

L'écoulement est défini sur $\mathbb{C}^*$, invariant par rotations.

4. **Écoulement autour d'un disque**

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= z + 1/z, \\ f(z) &= 1 - 1/z^2, \\ X(z) &= 1 - 1/\bar{z}^2.\end{aligned}$$

Cet écoulement est celui qui s'établit autour d'un disque (de rayon unité et centré en 0) placé dans un écoulement uniforme.

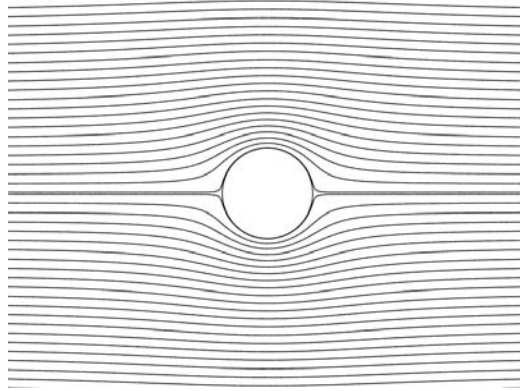


FIG. 20 – Un flot autour d'un cercle

Après avoir fait connaissance avec quelques types d'écoulements, nous allons à présent calculer la résultante des efforts exercés sur un obstacle plongé dans un fluide en écoulement. Considérons un écoulement stationnaire et irrotationnel autour d'un obstacle cylindrique, à section quelconque, qu'on supposera infiniment long, ce qui nous autorisera à supposer l'écoulement plan, de direction orthogonale aux génératrices de l'obstacle. La situation typique est celle d'une aile d'un avion volant à une vitesse constante $-V_\infty$. Pour les vitesses (très) inférieures à la vitesse du son, l'air peut être assimilé à un fluide incompressible et on peut négliger les tourbillons autour de l'aile (pas très réaliste en fait...). Pour des raisons de commodité on supposera que c'est l'obstacle qui est immobile et que les filets de fluide glissent sur l'obstacle avec une vitesse constante V_∞ à l'infini.

Il s'agit de calculer les efforts (par unité de longueur dans la direction orthogonale du plan de l'écoulement). Considérons donc une portion cylindrique Σ comprise entre deux plans parallèles distants l'un de l'autre d'une longueur unité. Appelons C la courbe fermée projection de Σ sur le plan x, y , plan de l'écoulement. Le fluide étant supposé parfait, la résultante $\mathcal{R}$ des efforts exercés sur la paroi Σ est perpendiculaire à Σ ; ces efforts sont des efforts de pression et sont donnés par l'intégrale

$$\mathcal{R} = - \int_{\Sigma} p n d\sigma$$

où p représente la pression par unité de surface, et où n désigne le vecteur unitaire normal à Σ dirigé vers l'extérieur de l'obstacle. Si dans le plan des x, y on paramètre C (orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) par sa longueur d'arc s , alors $(x(s), y(s), \xi)$, $s \in [0, l]$ est une paramétrisation de Σ ($\xi \in [0, 1]$ désigne la troisième composante usuelle de $\mathbb{R}^3$). L'élément d'aire $d\sigma$ sur Σ est $ds d\xi$. On peut alors écrire

$$\mathcal{R} = - \int_0^l p n ds.$$

Pour tirer profit des propriétés des fonctions holomorphes on calculera $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_x - i\mathcal{R}_y$, en notant $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_y$ étant les composantes de $\mathcal{R}$ suivant les axes des x et des y respectivement. Or $n = -i \frac{dz}{ds}$ de sorte que

$$\overline{\mathcal{R}} = - \int_0^l p \overline{n} ds = -i \int_C p d\overline{z}.$$

La pression est donnée par la loi de BERNOULLI, loi selon laquelle, pour un écoulement permanent et irrotationnel, la quantité $\frac{\rho}{2}|X|^2 + p$ reste constante dans tout le fluide et dans le temps (où ρ désigne la masse volumique du fluide). Ce nombre est la somme de l'énergie cinétique et d'une énergie potentielle associée aux forces de pression. On aura donc, après avoir noté A cette constante :

$$\overline{\mathcal{R}} = -i \int_C p d\overline{z} = - \int_C \left(A - \frac{\rho}{2}|X|^2 \right) d\overline{z} = i \frac{\rho}{2} \int_C |X|^2 d\overline{z},$$

soit :

$$\overline{\mathcal{R}} = i \frac{\rho}{2} \int_C f \overline{f} d\overline{z}.$$

Notons $\varphi = \Re \Phi$ et $\psi = \Im \Phi$. Sur C , on a $d\psi = 0$, car C est une ligne de courant et les particules fluides glissent sur le bord de l'obstacle et n'y adhèrent pas (c'est la condition sur le bord pour l'écoulement d'un fluide parfait), et que l'écoulement est permanent. Donc $d\Phi = d\varphi + id\psi$ est réelle sur C . Or $d\Phi = f dz$ de sorte que

$$\overline{\mathcal{R}} = i \frac{\rho}{2} \int_C f^2 dz.$$

Écrivons la vitesse complexe $f(z)$ sous forme d'un développement au voisinage de l'infini (loin de l'obstacle l'écoulement est presque uniforme et parallèle à l'axe des x , de vitesse V_∞) :

$$f(z) = V_\infty + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$

Il vient donc :

$$f^2(z) = V_\infty^2 + 2C_{-1}V_\infty \frac{1}{z} + \dots$$

d'où

$$\overline{\mathcal{R}} = -2\rho\pi C_{-1}V_\infty.$$

Introduisons la circulation du champ des vitesses le long de C définie par $\Gamma = \int_C \overline{f(z)} dz = 2i\pi C_{-1}$. Ce nombre Γ est réel car $f(z)dz$ est réel le long de C ; il peut être non nul, bien que l'écoulement soit irrotationnel, et ceci n'est pas contradictoire car le domaine occupé par l'obstacle est un "trou" de bord C dans le domaine de l'écoulement. En écrivant $\mathcal{R}_x - i\mathcal{R}_y = -2i\Gamma V_\infty$, on en déduit :

$$\mathcal{R} = \rho\Gamma V_\infty i.$$

C'est la formule de BLASIUS ; elle permet de déterminer très simplement les efforts globaux exercés par le fluide sur le profil de l'obstacle.

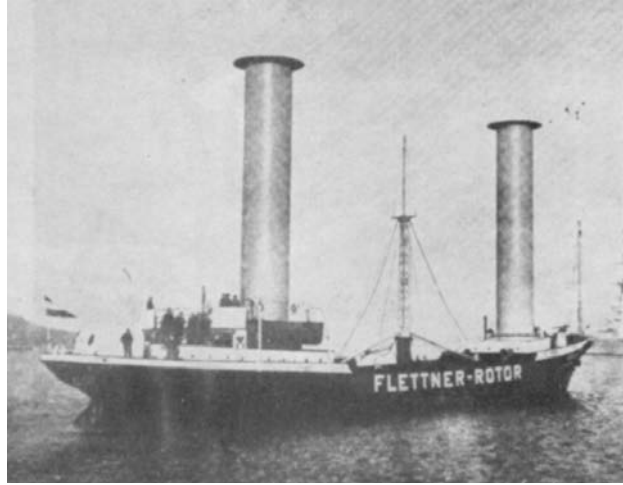


FIG. 21 – Le bateau à rotor de Flettner (1926)

Il est à noter que $\mathcal{R}$ est de direction perpendiculaire à celle de l'écoulement à l'infini. C'est le fameux paradoxe de D'ALEMBERT qui contredit l'expérience la plus commune : le fluide n'exerce aucune force de trainée... Cette force $\mathcal{R}$, lorsqu'elle est non nulle, c'est-à-dire lorsque Γ est non nul, est appelée *force de portance*, et s'exerce vers le haut si $\Gamma > 0$. Lorsque C , à titre

d'exemple, est le profil d'une aile d'avion, la portance s'exerce de "l'intrados" vers "l'extrados" de l'aile et assure la sustentation de l'avion dans l'air. La portance d'un profil dépend directement de la circulation Γ du champ des vitesses global autour de ce profil.

Ce fait a été mis en pratique dans la construction de bateaux au moyen de propulsion étonnant. Un mat de forme cylindrique est mis en rotation par un moteur, ce qui crée une circulation non nulle et donc une force! Ce type de navire a été vite abandonné. La photographie 21 est extraite d'un livre très intéressant : *A history and philosophy of fluid mechanics*, par G.A. TOKATY (Dover, 1971).

On peut créer de la circulation le long d'un profil en superposant deux écoulements. À titre d'exemple, considérons l'écoulement stationnaire qui s'établit autour d'un cercle (centré en 0 et de rayon unité) placé dans un écoulement uniforme suivant la direction de l'axe Ox ; il est défini par le potentiel $\Phi(z) = V_\infty(z + \frac{1}{z^2})$ et c'est un écoulement sans circulation. On peut obtenir un écoulement de circulation donnée Γ autour de ce cercle en lui superposant un tourbillon placé à l'origine, ce qui donne le potentiel

$$\Phi(z) = V_\infty(z + \frac{1}{z^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z.$$

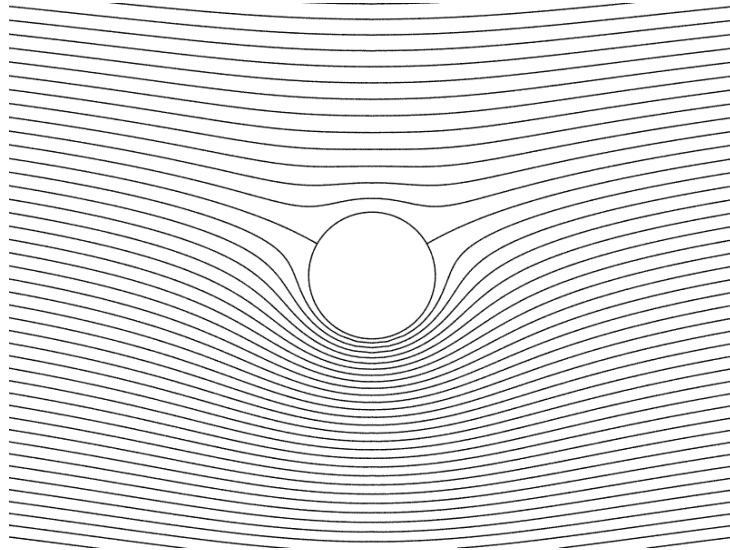


FIG. 22 – Un flot autour d'un cercle, avec circulation non nulle

Pour terminer indiquons comment les transformations conformes du plan complexe permettent de comprendre les écoulements autour d'obstacles dont les profils présentent des géométries qui ne sont pas toujours simples. On considère deux variables complexes $w = u + iv$ et $z = x + iy$ et les plans complexes correspondants. Supposons que w soit l'image de z par une transformation bijective conforme $w = F(z)$. Intéressons-nous à un écoulement défini par son potentiel complexe $\Phi(z)$. On peut écrire $\Phi(z) = \Phi(H(w))$ où $H = F^{-1}$. La fonction holomorphe $\Psi(w) = \Phi(H(w))$ définit dans le plan w un écoulement de potentiel Ψ . Les lignes de courant originales dans le plan des z sont transformées et prennent des formes différentes dans le plan des w . Ainsi un écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel autour d'un profil dans le plan des z équivaut à un écoulement ayant les mêmes propriétés dans le plan des w autour d'un profil de géométrie différente. La vitesse complexe dans le plan w est donnée par

$$g(w) = \frac{d\Psi}{dw} = \frac{d\Phi}{dz} \frac{dH}{dw} = \frac{f(z)}{F'(z)}.$$

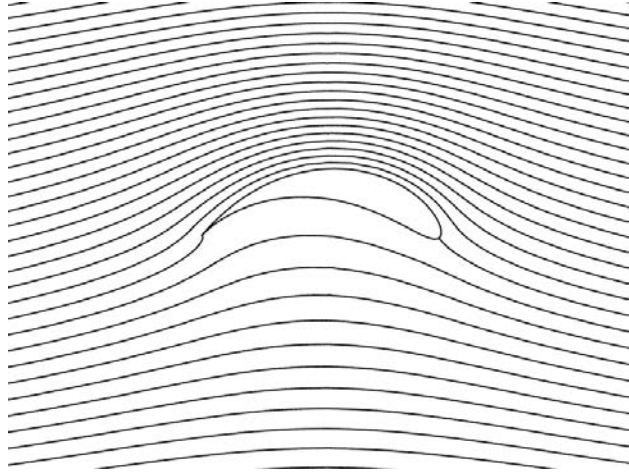


FIG. 23 – Une aile de Joukowski

Notons que la transformation F ne change pas la circulation autour du profil. En effet :

$$\int_{C_w} g(w)dw = \int_{C_z} \frac{f(z)}{F'(z)}dw = \int_{C_z} f(z)dz.$$

Signalons, pour illustrer cette démarche, que JOUKOWSKY a remarqué que la transformation $w = F(z) = z + \frac{1}{z}$ transforme des cercles bien choisis en des contours qui peuvent représenter un profil d’aile d’avion. En comprenant l’écoulement d’un fluide autour d’un cercle on peut donc comprendre l’écoulement autour de certaines ailes d’avion. Bien sûr, tout ceci a surtout un intérêt historique car les hypothèses que nous avons faites sont bien loin de la réalité physique. Pour quelques détails sur l’aérodynamique “appliquée” dans un contexte plus réaliste, on pourra consulter le “digital textbook” www.desktopaero.com/appliedaero/preface/welcome.html.



Leçon 5 : le théorème de Riemann-Roch

Le but de cette leçon est une présentation du théorème de RIEMANN-ROCH. On peut dire que ce théorème apporte une réponse à un problème dont l’origine remonte à la physique du XIXème siècle à travers l’étude du mouvement des fluides.

Dans la leçon précédente nous avons vu comment un écoulement plan sans source (ou puits) ni tourbillon est entièrement caractérisé par une forme différentielle holomorphe Ω , exacte (au moins localement, sans hypothèse sur la topologie globale du domaine de l’écoulement). En écrivant $\Omega = d\Phi = f dz$, avec Φ et f holomorphes, on a le potentiel complexe ainsi que le champ des vitesses $X = \overline{f(z)}$ de l’écoulement. Inversement étant donnée une forme holomorphe $\Omega = f dz$, on peut interpréter f comme la vitesse complexe d’un écoulement plan irrotationnel d’un fluide parfait incompressible. Localement, le potentiel complexe de l’écoulement est donné par une primitive de f . Nous pouvons ainsi dire qu’un écoulement plan irrotationnel d’un fluide parfait incompressible est une 1-forme holomorphe, avec à notre disposition, un dictionnaire physico-mathématique permettant le passage d’une lecture à l’autre.

Signalons avant de clore ces propos, que si le domaine de l’écoulement est multiplement connexe (présence de trous) – et c’est notamment le cas lorsqu’il y a des “robinets ponctuels” (sources et puits) qui correspondent à

des points du plan où $\operatorname{div} X \neq 0$, ou des tourbillons qui correspondent aux points où $\operatorname{rot} X \neq 0$ (au sens des distributions) – il faut exclure ces points du domaine pour que notre construction soit possible. L'intégration de f fait alors apparaître des constantes cycliques (ou périodes) correspondant aux débits des robinets et aux intensités des tourbillons, et le potentiel complexe de l'écoulement sera une fonction *multiforme*.

Intéressons-nous maintenant à l'écoulement d'un fluide idéal incompressible sur une surface de RIEMANN Σ . On voudrait évidemment reconduire sur Σ la construction de la 1-forme Ω qui caractérise un écoulement plan. Or pour écrire la divergence ou le rotationnel d'un champ de vecteurs sur une variété, on a besoin d'une métrique riemannienne. Comment choisir alors une métrique g sur Σ ? Il faudrait que la structure complexe de Σ (structure de surface de RIEMANN) soit compatible avec la structure conforme induite par le choix de g . Précisons cette notion de compatibilité : si g est une métrique sur Σ nous avons appris que (Σ, g) est localement conformément plate c'est-à-dire qu'il existe au voisinage de chaque point de Σ une carte (U, φ) telle que $\varphi_* g = \lambda(dx^2 + dy^2)$ où λ est une fonction régulière sur U . L'atlas $\{(U, \varphi)\}$ définit alors une structure de surface de RIEMANN sur Σ . Nous savons également que deux métriques conformément équivalentes définissent la même structure de surface de RIEMANN sur Σ . Plus précisément on a une correspondance biunivoque :

$$\begin{array}{ccc} \text{structures de surface de RIEMANN sur } \Sigma, & & \text{classes conformes de} \\ \text{compatibles avec sa structure de} & \longleftrightarrow & \text{métriques riemanniennes} \\ \text{surface réelle } \mathcal{C}^\infty & & \text{sur } \Sigma \text{ et orientation de } \Sigma. \end{array}$$

Soit donc g une métrique qui induit la structure de surface de RIEMANN de Σ , et X le champ des vitesses d'un écoulement sur Σ . On vérifie alors immédiatement que si $X^\perp$ est orthogonal à X et de même longueur pour la métrique g , alors $e^{-u}X^\perp$ est orthogonal à X et de même longueur pour la métrique $\tilde{g} = e^u g$. En revanche, la forme Ω ne change pas ; elle ne dépend que de la classe conforme de g . Ainsi, sur une surface de RIEMANN, l'objet qui caractérise l'écoulement et qui possède un statut intrinsèque est la 1-forme holomorphe Ω .

Pour commencer, voyons comment on pourrait faire couler un fluide, de l'eau par exemple, sur la sphère S^2 . La sphère, c'est le plan complexe $\mathbb{C}$ plus un point à l'infini. Il suffit alors de placer un robinet à l'origine, de l'ouvrir,

de régler son débit à 2π et de laisser couler. La 1-forme de cet écoulement est $\Omega = \frac{dz}{z}$ qu'on peut intégrer localement pour avoir le potentiel $\Phi(z) = \log z$.

À l'aide de la projection stéréographique par rapport au pôle nord N , on remonte l'écoulement sur la sphère : on obtient alors un écoulement qui part du pôle sud et qui va vers le pôle nord. Le potentiel de cet écoulement n'est rien d'autre que la projection de MERCATOR qui envoie parallèles sur horizontales et méridiens sur verticales. On uniformise ce potentiel en procédant à une coupure sur la sphère le long d'un méridien par exemple.

Si l'on part d'un écoulement dans le plan complexe obtenu par superposition d'une source et d'un tourbillon à l'origine, les lignes de courant, dans le plan de l'écoulement, sont des spirales logarithmiques. Lorsqu'on remonte cet écoulement sur la sphère à l'aide de la projection stéréographique, les lignes de courant sont des loxodromes. Le potentiel est donné par la 1-forme $\Omega + \Omega^*$ avec $\Omega^* = i \frac{dz}{z}$.

Énonçons maintenant un théorème :

Théorème (RIEMANN) : *Sur toute surface de RIEMANN compacte Σ , il existe une fonction méromorphe non constante $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Il n'est malheureusement pas question de donner une preuve ici. Les preuves complètes sont délicates. F. KLEIN a essayé de reconstruire les intuitions physiques qui ont pu guider RIEMANN dans l'élaboration de ce type de théorème. On consultera avec profit le petit livre de KLEIN : *On RIEMANN's theory of algebraic functions and their integrals. A supplement to the usual treatises*. Dover Publications, Inc., New York, 1963. Nous allons essayer de suivre ce genre d'idées qui ne sont absolument pas des démonstrations mais qui peuvent nourrir l'intuition.

“Preuve”

F. KLEIN propose de construire la différentielle de f au lieu de f elle-même. Pour être plus précis, on cherche une 1-forme *méromorphe* Ω sur Σ qui, sous certaines conditions, admettra une primitive globale f sur Σ . Cette forme sera obtenue comme la 1-forme caractérisant un écoulement sur Σ . En ouvrant des robinets en quelques points de Σ et en laissant couler on provoque un écoulement sur Σ , et on espère arriver ainsi à une solution

physique du problème dont la traduction mathématique nous donnera la fonction f cherchée.

Commençons par examiner s'il est possible de faire couler de l'eau sur une sphère sans ouvrir de robinets ni tourbillons. La sphère étant simplement connexe la forme fermée Ω est exacte : il existe une fonction f sur Σ , holomorphe telle que $\Omega = df$. Mais Σ étant compacte et f étant holomorphe, f est constante (par le principe du maximum). La réponse est donc négative.

Sur le tore $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ par contre, un tel écoulement est possible. Il existe, à une constante complexe multiplicative près, une unique forme différentielle holomorphe dz . Il s'agit de l'écoulement uniforme le long des méridiens ou des parallèles (on passe de l'un à l'autre par la multiplication par i).

Plaçons nous maintenant sur une surface de RIEMANN Σ de genre g supérieur ou égal à 2. Là encore, la réponse est positive.

On dit que deux courbes fermées γ, γ' sur une surface Σ sont *homologues* s'il existe une surface orientée Z dont le bord ∂Z est constitué de deux cercles orientés, et une application $i : Z \rightarrow \Sigma$ dont la restriction aux deux composantes de bord définit γ, γ' . Une application simple de la formule de STOKES montre que le flux du champ des vitesses X d'un écoulement Ω à travers deux courbes homologues γ et γ' ne change pas : $\text{Flux}(X, \gamma') = \text{Flux}(X, \gamma) = \Re(\int_{\gamma} \Omega)$.

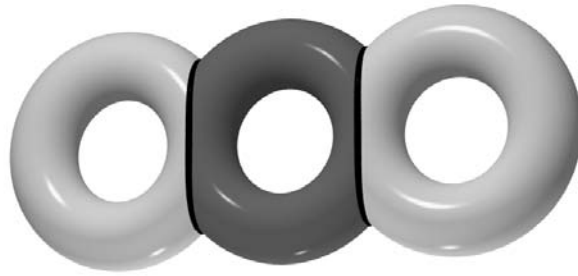


FIG. 24 – Deux courbes homologues sur une surface de genre 3

Il y a $2g$ courbes γ_i qui “captent” l’homologie de Σ , à savoir g “méridiens” et g “parallèles”. Si on se donne $2g$ flux, à travers les courbes γ_i il existe un écoulement unique sur Σ qui réalise ces flux. Ceci n’est que la traduction hydrodynamique du théorème mathématique suivant.

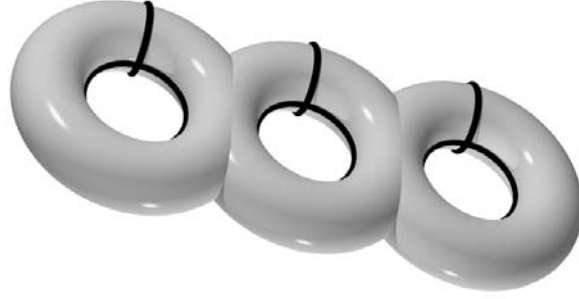


FIG. 25 – Une base de l’homologie

Théorème (ABEL) : *Étant donnés $2g$ nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}$ il existe une unique 1-forme holomorphe Ω sur Σ telle que l’on ait $\Re(\int_{\gamma_i} \Omega) = \alpha_i$.*

Autrement dit, la dimension réelle (resp. complexe) de l’espace des 1-formes holomorphes sur Σ est $2g$ (resp. g). Pour aller vers une solution de notre problème initial, construire des fonctions méromorphes, on va placer k robinets en k points $x_1, x_2, \dots, x_k$ de Σ que l’on affecte respectivement des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$:

- $\Re(\lambda_i) > 0$ si de l’eau sort de x_i ,
- $\Re(\lambda_i) < 0$ si de l’eau est absorbée en x_i ,
- $\Im \lambda_i$ est non nul si l’eau tourbillonne autour de x_i .

La partie réelle de λ_i représente, à un coefficient multiplicatif près, le débit sortant à travers un contour qui entoure le point x_i une fois. La partie imaginaire de λ_i représente la circulation le long d’une courbe qui entoure une fois le point x_i . Pour qu’un tel écoulement existe, la physique nous impose

d'écrire que le bilan est nul ; la quantité d'eau qui sort des robinets est égale à la quantité d'eau absorbée, et la circulation totale autour de tous les x_i est nulle. La condition nécessaire que l'on doit écrire est donc $\Sigma \lambda_i = 0$.

Théorème : *Sous cette dernière condition, il existe sur Σ un unique écoulement ayant les caractéristiques voulues (flux, débits et circulations donnés).*

“Preuve” : On met sur Σ un écoulement qui réalise les flux (c'est assuré par le théorème précédent). Puis on choisit k points sur Σ en lesquels on place des robinets et des tourbillons. On ouvre et on laisse couler... On obtient ainsi l'écoulement recherché (qui est en fait la superposition de $k+1$ écoulements).

Localement, au voisinage de x_i , la forme Ω s'écrit $\Omega = (\lambda_i/z + h(z))dz$ avec h holomorphe. N'oublions pas que, suivant l'idée de RIEMANN, ce que nous voulons, c'est une forme méromorphe dont la primitive est une fonction méromorphe. Il nous faut donc intégrer Ω , et là nous essayons un échec puisque la primitive de $1/z$ n'est pas une fonction uniforme. On y remédie en plaçant des *dipôles* hydrodynamiques à la place des robinets. Un dipôle hydrodynamique est la limite de l'écoulement résultant de la superposition d'un robinet à débit positif (source) et d'un robinet à débit négatif (puits). Voici comment on le fabrique : on place une source de débit D en un point A d'affixe a réel, et un puits de débit $-D$ au point A' d'affixe $-a$; l'écoulement qui résulte de leur superposition a pour potentiel complexe la fonction

$$\Phi(z) = \frac{D}{2\pi} \log \frac{z-a}{z+a}$$

qui est uniforme dans le plan privé du segment $[A, A']$. Les lignes de courant sont des arcs de cercles passant par A et A' . Notons que le bilan pour ce dipôle est nul : ce qui sort est aussitôt rejeté.

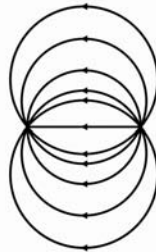


FIG. 26 – Un puits et une source proches

Posons $2aD = K$ et faisant tendre a vers 0 tout en maintenant K fixe (nécessairement D tend vers l'infini). L'écoulement défini par Φ tend alors vers l'écoulement du dipôle hydrodynamique placé en O , d'axe Ox et de moment K , dont le potentiel est $\Phi(z) = -\frac{K}{2\pi z}$. Pour ce dipôle hydrodynamique $\Omega = \lambda \frac{dz}{z^2}$ avec $K = 2\pi\lambda$.

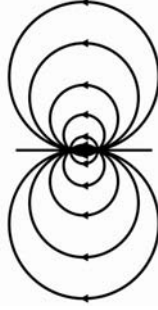


FIG. 27 – Un dipôle

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème : *Étant donnés $2g$ flux α_i à travers les courbes γ_i , et k moments dipolaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il existe un unique flot X avec ces caractéristiques.*

“**Preuve**” : On met sur Σ un flot qui réalise les flux et on lui superpose les flots de k dipôles hydrodynamiques placés en k points $x_1, \dots, x_k$.

Passons maintenant à la “démonstration” du théorème de RIEMANN-ROCH proprement dit. Pour un écoulement donné par le théorème précédent, la forme Ω qui le code s'écrit localement, dans un voisinage d'un dipôle x_i , sous la forme $\Omega = \left(\frac{\lambda_i}{z^2} + h(z)\right)dz$, avec h holomorphe.

On voudrait en prendre une primitive f , par intégration le long d'un chemin joignant un point x_0 fixé sur Σ à un point variable z de Σ . On pose donc $f(z) = \int_{x_0}^z \Omega$. Pour que cette définition soit correcte, il faudrait que $\int_\gamma \Omega = 0$ pour toute courbe fermée γ . Tout cycle γ est homologue à une combinaison linéaire à coefficients entiers des $2g$ cycles basiques γ_i de Σ . La forme Ω est une combinaison linéaire à coefficients complexes $a_1\Omega_1 + \dots + a_k\Omega_k + C_1\omega_1 + \dots + C_g\omega_g$, où les formes ω_i constituent une base sur $\mathbb{C}$ de

l'espace des formes holomorphes sur Σ , et où les formes Ω_i caractérisent les dipôles. En écrivant que l'on doit avoir $\int_{\gamma_i} \Omega = 0$ pour chaque i , pour pouvoir intégrer globalement Ω , on obtient un système linéaire de $2p$ équations à $p + k$ inconnues, les coefficients a_i et C_i . Ce système possède une solution non triviale dès que $p + k > 2p$. On peut donc énoncer ainsi le théorème de Riemann-Roch "comme un mécanicien des fluides".

Théorème : *Si on place plus de dipôles que le genre sur la surface, on a une solution à notre problème.*

L'interprétation mathématique de ce dernier théorème est le théorème de RIEMANN-ROCH pour une surface de RIEMANN.

Théorème (RIEMANN-ROCH) : *Soit Σ une surface de RIEMANN de genre g . Si $k > g$, alors, il existe sur Σ une forme différentielle méromorphe non triviale Ω qui est exacte, et dont la primitive f est une fonction méromorphe sur Σ possédant k pôles.*



Leçon 6 : Géométrie analytique, Géométrie algébrique

On se propose dans cette leçon de montrer que surfaces de RIEMANN et les courbes algébriques ne sont que deux manières d'appréhender un même objet géométrique. Les "démonstrations" seront encore plus imprécises que dans les leçons précédentes.

Théorème (RIEMANN) :

1. *Une surface de RIEMANN compacte "est" une courbe algébrique.*
2. *Une courbe algébrique "est" une surface de RIEMANN compacte.*

En termes quelque peu abstraits, ce théorème met en bijection des objets algébriques et des objets analytiques. On a là le premier exemple d'un résultat qui illustre les liens profonds entre la géométrie algébrique et la géométrie analytique, et connus sous le nom de “principe GAGA”, en référence à l'article célèbre de SERRE intitulé “Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique” : “un objet analytique global sur une variété projective est algébrique”.

Commençons par expliciter une remarque très simple mais qui sera fondamentale. Les fonctions holomorphes de la sphère de RIEMANN $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle-même sont des fonctions méromorphes de la variable $z \in \mathbb{C}$ qui sont également méromorphes à l'infini dans le sens que ce sont des fonctions méromorphes de la variable $1/z$. Il est bien connu que ce sont les fractions rationnelles de la variable z . Ainsi les fonctions *holomorphes de la sphère de RIEMANN dans elle-même ne sont autres que les fractions rationnelles*. Voilà un premier exemple montrant que certaines fonctions holomorphes sont nécessairement “algébriques”.

Une *courbe algébrique* (affine) C est le lieu des zéros dans $\mathbb{C}^2$, d'un polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X, Y]$:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}.$$

Il s'agit donc d'une courbe complexe dans $\mathbb{C}^2$, objet géométrique de dimension complexe 1. Dans un environnement réel C est définie par deux équations : $\Re P = 0$ et $\Im P = 0$. La courbe C nous y apparaît donc comme un objet géométrique à deux dimensions réelles, c'est-à-dire comme une surface.

Commençons par donner les grandes lignes de la démonstration de l'affirmation 2 du théorème. Il s'agit de définir une structure de surface de RIEMANN sur l'ensemble des zéros d'un polynôme. L'idée est que C est localement, là où elle est non singulière, un graphe au dessus de sa tangente (droite complexe de $\mathbb{C}^2$). On pourra alors paramétrer un petit ouvert de C par un petit ouvert de tangente. Il n'est pas difficile de s'assurer que ces cartes locales définissent bien une structure de surface de RIEMANN. Lorsque la courbe est non singulière, elle définit donc bien une surface de RIEMANN. Cette surface n'est pas compacte et il faut la “compactifier”. La méthode la plus simple consiste à “rendre le polynôme P homogène”. Si d désigne le degré de P , on pose :

$$\overline{P}(x, y, z) = z^d P(x/z, y/z)$$

si bien que $\overline{P}$ est maintenant un polynôme homogène de degré d en trois variables dont le lieu des zéros est un cône dans $\mathbb{C}^3$ qui définit donc une partie du plan projectif complexe $\mathbb{CP}^2$; c'est la *courbe projective* associée à P . Dans la “carte affine” où z est non nul, cet ensemble s'identifie au lieu des zéros de P . Dans les autres cartes affines, par exemple là où x ou y est non nul, il s'identifie au lieu des zéros d'un autre polynôme. Lorsque la courbe projective est non singulière, elle définit une surface de RIEMANN compacte.

Disons maintenant quelques mots du cas où la courbe projective présente des singularités. Tout d'abord les singularités d'une courbe irréductible de $\mathbb{C}^2$ sont isolées. Si l'on ne s'intéresse pas à la structure de la singularité, la question se pose de savoir comment la “supprimer”, ou, selon la terminologie consacrée, comment la “résoudre”. Il s'agit de montrer qu'il existe une surface de RIEMANN compacte $\hat{C}$ telle que C privée de ses points singuliers est isomorphe, comme surface de RIEMANN, à $\hat{C}$ privée d'un nombre fini de points. Il y a beaucoup de méthodes pour atteindre ce but, comme par exemple celle qui consiste à éclater les points singuliers un nombre suffisant de fois...

On montre maintenant que par la construction que nous venons d'esquisser on retrouve *toutes* les surfaces de RIEMANN compactes. Plus précisément on montre que toute surface de RIEMANN compacte “abstraite” peut être représentée comme une courbe algébrique projective (comprendre par là qu'elle est isomorphe à la surface de RIEMANN associée à cette courbe, et que deux surfaces de RIEMANN sont isomorphes s'il existe entre elles une application bijective biholomorphe).

Soit Σ une surface de RIEMANN compacte. Le théorème de RIEMANN-ROCH nous assure que l'on peut trouver deux fonctions méromorphes non constantes sur Σ , donc deux fonctions holomorphes non constantes $f_1, f_2 : \Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. En dimension 1 complexe, Σ est une courbe et son image par (f_1, f_2) est une courbe C de $\hat{\mathbb{C}}^2$. Cette courbe est algébrique ! Voici comment on le montre. L'idée de départ consiste à couper C par une verticale $\{x\} \times \hat{\mathbb{C}}$ puis de construire astucieusement, à l'aide des ordonnées des points d'intersection, une fonction holomorphe de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$. La courbe C est paramétrée par les points de $\Sigma : (x, y) \in C$ si et seulement si $x = f_1(p)$ et $y = f_2(p)$ pour un $p \in \Sigma$. La fonction non constante $f_1 : \Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ étant méromorphe il se trouve que, sauf pour un nombre fini de points $x_1, \dots, x_k$ de $\hat{\mathbb{C}}$, la fibre $f_1^{-1}(x)$ au dessus de x , contient toujours le même nombre r d'éléments de Σ . Soit donc $x \in \hat{\mathbb{C}} - \{x_1, \dots, x_k\}$. Posons $f_1^{-1}(x) = \{s_1(x), \dots, s_r(x)\}$.

On prendra garde au fait que les s_i en tant que “fonctions” de x sont mal définies, c’est-à-dire sont multiformes. L’ensemble $\{s_1(x), \dots, s_r(x)\}$ est bien défini mais il n’est pas possible d’ordonner ses éléments pour former r fonctions holomorphes. Les ordonnées des r points où la droite $\{x\} \times \widehat{\mathbb{C}}$ coupe $\widetilde{C}$ sont données par $y_i(x) = f_2(s_i(x))$, i variant de 1 à r . Là encore on a ainsi r “fonctions” y_i multiformes sur $\widehat{\mathbb{C}} - \{x_1, \dots, x_k\}$;

Pour aller plus loin, supposons dans un premier temps que chaque verticale $\{x\} \times \widehat{\mathbb{C}}$ coupe $\mathbb{C}$ en un point unique $y_1(x)$ ($r = 1$). On a ainsi une application holomorphe $y_1 : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Cette application y_1 est donc une fraction rationnelle et on peut écrire $y_1(x) = A(x)/B(x)$ avec $A, B \in \mathbb{C}[X]$. Observons maintenant que le couple $(x, y) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$ est un point de C si et seulement si $y = y_1(x)$. Posons alors $F(x, y) = yB(x) - A(x)$ de sorte que F est un polynôme en les variables x et y , à coefficients complexes et on a $F(f_1, f_2) = 0$. La surface de RIEMANN associée à la courbe C est isomorphe à Σ si bien que la surface de RIEMANN C est bien associée à une courbe algébrique.

Supposons maintenant que chaque verticale $\{x\} \times \widehat{\mathbb{C}}$ coupe C en deux points $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ($r = 2$). Comme il n’y a pas d’ordre sur $\mathbb{C}$, on ne peut considérer séparément ces deux points. Les “fonctions” y_1 et y_2 sont donc multiformes. Par contre leur somme et leur produit, $\sigma(x) = y_1(x) + y_2(x)$ et $\rho(x) = y_1(x)y_2(x)$ sont bien définis car ce sont des fonctions symétriques. Ces applications sont holomorphes de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$, donc des fractions rationnelles :

$$\sigma(x) = A_1(x)/B_1(x) \quad ; \quad \rho(x) = A_2(x)/B_2(x).$$

Elles sont solutions de l’équation du second degré :

$$y^2 - \frac{A_1(x)}{B_1(x)}y + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} = 0.$$

On termine alors comme précédemment ; si on pose :

$$F(x, y) = \left(y^2 - \frac{A_1(x)}{B_1(x)}y + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} \right) B_2(x)B_1(x),$$

alors F est un polynôme en x, y et $F(f_1, f_2) = 0$.

Dans le cas général $r > 2$, on fait usage des fonctions symétriques des $y_i(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= y_1(x) + \dots + y_r(x), \\ \sigma_2(x) &= y_1(x)y_2(x) + \dots + y_{r-1}(x)y_r(x), \\ &\dots \\ \sigma_n(x) &= y_1(x)\dots y_r(x).\end{aligned}$$

Ces fonctions sont des fractions rationnelles. On conclut avec le polynôme F obtenu à partir de $y^n - \sigma_1(x)y^{n-1} + \dots + (-1)^r \sigma_r(x)$ par multiplication par un polynôme convenable de x , pour chasser les dénominateurs.

Nous terminons ces leçons en citant une caractérisation remarquable des surfaces de RIEMANN que nous qualifierons de “super-algébriques” puisqu’elles utilisent le mot “algébrique” dans deux sens différents. Donnons d’abord quelques définitions. Une courbe algébrique est définie par une équation $P(x, y) = 0$ où $P(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$ est un polynôme à coefficients complexes en général ; cette courbe sera dite *super-algébrique* lorsque les coefficients a_{ij} sont des nombres algébriques, c’est-à-dire, racines de polynômes à coefficients rationnels. On dira qu’une surface de RIEMANN est *super-algébrique* si elle est isomorphe à la surface de RIEMANN associée à une courbe super-algébrique. Enfin si $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{CP}^1$ est une fonction méromorphe sur une surface de RIEMANN Σ , un *point critique* de f est un point de Σ sur lequel la dérivée de f s’annule ; une *valeur critique* de f est l’image par f d’un point critique.

Théorème (BELYI, 1979) : *Une surface de RIEMANN est super-algébrique si et seulement si elle possède une fonction méromorphe qui n’a que trois valeurs critiques*

Cette condition nécessaire et suffisante porte uniquement sur la géométrie de la surface : il faut et il suffit qu’elle se réalise comme un revêtement holomorphe de la sphère de la RIEMANN ramifié en au plus trois points.

Il y aurait beaucoup à ajouter pour transformer les idées de cette leçon en démonstrations...

Ses leçons sont très incomplètes. Il y manque en particulier une description du *théorème d’uniformisation*, l’un des piliers des mathématiques du dix-neuvième siècle, qui permet de décrire le revêtement universel des surfaces de Riemann. Pour nous faire pardonner, voici une figure qui illustre de revêtement universel de la courbe de KLEIN dont l’équation homogène

est $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. Un groupe agit holomorphiquement sur le disque unité, de manière libre et propre, et la surface de Riemann obtenue par quotient est biholomorphiquement équivalente à la surface de KLEIN. Pour plus d'informations, on pourra consulter BAVARD : *La surface de Klein*, www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artCBavard/artCBavard.pdf.

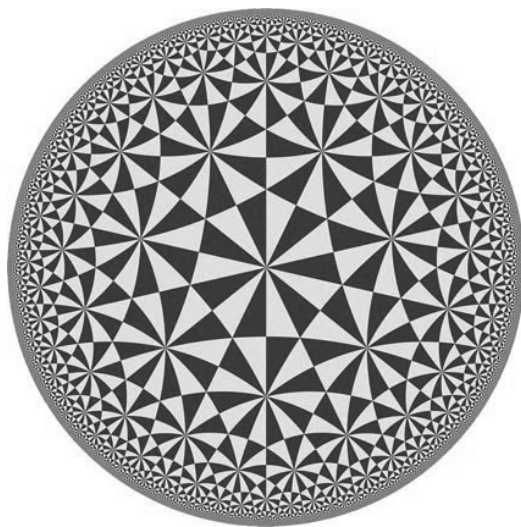


FIG. 28 – Le revêtement universel de la quartique de KLEIN



Quiz !

À la fin des six leçons, un *questionnaire* pour tester vos connaissances ! Répondre par “Vrai” ou “Faux” à chacune des dix assertions suivantes.

[Q1.] *La partie de la Terre située entre l'équateur et le trentième parallèle nord a une superficie plus petite que celle de la partie située au nord du trentième parallèle nord.*

Comme $\sin(30^\circ) = 1/2$, la calotte sphérique au nord du trentième parallèle et la partie de la Terre située entre l'équateur et le trentième parallèle ont la même superficie par le théorème d'Archimède !

[Q2.] *Sur la carte de Mercator, la zone de latitude supérieure à trente degrés nord occupe la même surface que la zone située entre l'équateur et le trentième parallèle nord.*

Dans la carte de Mercator, une calotte polaire quelconque est représentée par un demi-plan, d'aire infinie. L'assertion est donc fausse.

[Q3.] *Sur la carte stéréographique à partir du pôle sud, la zone située entre l'équateur et le trentième parallèle nord occupe plus d'espace que la zone située au nord du trentième parallèle.*

Vrai car la projection stéréographique dilate d'autant plus qu'on s'approche du pôle de projection.

[Q4.] *La projection stéréographique à partir du pôle sud est la meilleure carte conforme pour l'hémisphère nord.*

Eh bien oui, car la dilatation est évidemment constante sur la frontière, l'équateur, et on peut donc appliquer le théorème de Tchebychev.

[Q5.] *Pour un pays convexe de l'hémisphère nord la projection stéréographique à partir du pôle sud n'est pas la meilleure carte conforme, sauf si ce pays est une calotte polaire.*

Cela résulte en effet du théorème de Tchebychev car la dilatation de la projection stéréographique ne dépend que de la latitude si bien qu'elle n'est constante sur la frontière que si celle-ci est un parallèle.

[Q6.] *Il existe un difféomorphisme conforme de l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.*

C'est vrai mais ceci n'a pas été dit dans les leçons ! Le théorème de Gauss garantit l'existence de cartes conformes locales mais l'existence de cartes globales résulte de l'unicité de la structure de surface de Riemann sur une sphère, démontrée par Riemann...

[Q7.] *Pour tout pays convexe de l'hémisphère sud, il existe une carte qui envoie les géodésiques sur des segments de droites.*

Il suffit de prendre la projection radiale à partir du centre de la Terre sur un plan quelconque

[Q8.] *On place un obstacle dans un fluide parfait incompressible sans tourbillon. La vitesse à l'infini est supposée tendre vers le champ de vecteurs uniforme unité horizontal, alors la force de résistance exercée par le fluide sur l'obstacle est perpendiculaire à l'axe des x , même si la circulation est non nulle (il y a portance mais il n'y a pas traînée).*

La question est mal formulée ! S'il s'agit d'un objet plan, comme nous avons discuté dans la leçon sur les fluides, cet énoncé est vrai : c'est le paradoxe de d'Alembert. S'il s'agit d'un objet borné de dimension 3, comme par exemple un convexe, il se trouve que le paradoxe subsiste et même sous une forme forte : il n'y a ni portance ni traînée. On notera qu'une forme fermée dans le complémentaire d'un convexe de l'espace est nécessairement exacte, contrairement à ce qui se passe dans le plan.

[Q9.] *Sur une surface de Riemann compacte l'espace vectoriel des formes holomorphes est de dimension finie.*

C'est un théorème de Riemann que nous avons rencontré : la dimension réelle de cet espace est $2g$ où g est le genre de la surface.

[Q10.] *L'espace vectoriel des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann est de dimension finie.*

Faux, car nous avons vu qu'il existe des fonctions méromorphes ayant un nombre arbitrairement grand de pôles.



Suggestions de lectures

La bibliographie sur ce sujet est immense. Ce texte aura été utile s'il a encouragé le lecteur à en savoir plus et à étudier les preuves. Nous suggérons quelques ouvrages remarquables qui pourront servir de portail d'entrée au monde des surfaces de RIEMANN.

A. BEARDON, A primer on RIEMANN surfaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, 78. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

J.B.BOST, Introduction to compact RIEMANN, Jacobian, abelian varieties. From number theory to physics (Les Houches, 1989), 64-211, Springer, Berlin, 1992.

H.COHN, Conformal mappings on RIEMANN surfaces. Reprint of the 1967 edition. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1980.

R.C. GUNNING, Lectures on RIEMANN surfaces, Jacobi varieties. Mathematical Notes, No. 12. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972.

F. KIRWAN, Complex Algebraic Curves, London Mathematical Society Student Texts, 23. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

E. REYSSAT, Quelques aspects des surfaces de RIEMANN. Progress in Mathematics, 77. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989.

SPRINGER, G, Introduction to RIEMANN surfaces. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass. 1957.

WEYL, H., The concept of a RIEMANN surface. Translated from the third German edition by Gerald R. MacLane. ADIWES International Series in Mathematics Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London 1964.



DJAMEL SMAÏ

U.S.T.H.B.
Faculté de Mathématiques

Laboratoire : A.N.M.E.D.P.

BP 32, El Alia
16111 Bab-Ezzouar, Alger - Algérie

djamelismai@gmail.com

ÉTIENNE GHYS

Unité de Mathématiques
Pures et Appliquées de l'École
Normale Supérieure de Lyon

U.M.R. 5669 du CNRS

46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07- France

etienne.ghys@umpa.ens-lyon.fr
