Invent. math. 137, 199–231 (1999)
DOI 10.1007/s002229900926

Inventiones mathematicae

Actions de réseaux sur le cercle

Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Lyon,
U.M.R. 128 du CNRS, 46, allée d'Italie, F-69364 Lyon 07, France
(e-mail: ghys@umpa.ens-lyon.fr)

Oblatum 27-VII-1998 & 4-XII-1998 / Published online: 10 May 1999

1 Introduction

Le but de cet article est de décrire les actions des réseaux des groupes de Lie semi-simples sur le cercle, par difféomorphismes de classe C^1. Le *rang réel* d'un groupe de Lie semi-simple connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est l'entier maximal r tel qu'il existe une sous-algèbre abélienne $\mathbf{R}^r \subset \mathfrak{G}$ dont l'image par la représentation adjointe est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Un *réseau* Γ de G est un sous-groupe discret tel que le volume du quotient G/Γ est fini pour la mesure de Haar. Un réseau est *réductible* si on peut trouver deux sous-groupes distingués G_1,G_2 de G, connexes et non triviaux, qui engendrent G, dont l'intersection est contenue dans le centre (discret) de G, et tels que $(G_1 \cap \Gamma).(G_2 \cap \Gamma)$ soit d'indice fini dans Γ. Dans le cas contraire, on dit que Γ est *irréductible* (voir [19]).

Théorème 1.1 *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe dont le rang réel est supérieur ou égal à 2 et dont aucun facteur simple n'est localement isomorphe à* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. *Soit Γ un réseau irréductible de G. Alors toute action de Γ sur le cercle par difféomorphismes de classe C^1 respectant l'orientation transite à travers une surjection de Γ sur un groupe fini cyclique.*

Si $\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ sont deux homomorphismes à valeurs dans le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation, on dit que ϕ_1 est *semi-conjugué à un revêtement fini de ϕ_2* s'il existe une application continue $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, surjective et localement monotone (au sens large), telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on ait $\phi_2(\gamma) \circ f = f \circ \phi_1(\gamma)$. Lorsque f est un revêtement (*resp.* un revêtement de classe C^n), on dit que ϕ_1 est *topologiquement (resp. C^n) conjugué à un revêtement fini de ϕ_2*.

Le théorème suivant, plus fort que le précédent, ne fait plus d'hypothèse sur les facteurs simples de G.

Mathematics Subject Classification (1991): 57M60

Théorème 1.2 *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de rang réel supérieur ou égal à 2 et Γ un réseau irréductible de G. Soit ϕ un homomorphisme de Γ vers le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^1 respectant l'orientation. Alors, ou bien ϕ a une image finie cyclique ou bien ϕ est semi-conjugué à un revêtement fini d'un homomorphisme obtenu en faisant suivre :*

i) le plongement de Γ dans G,

ii) une surjection de G sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$,

iii) l'action projective de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur le cercle (identifié à la droite projective réelle).

*De plus, si ϕ prend ses valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^2, il s'agit en fait d'une conjugaison topologique. Si ϕ prend ses valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ (*resp. *C^ω), il s'agit d'une C^∞ (*resp. *C^ω)-conjugaison.*

Un énoncé analogue au théorème 1.1 a été obtenu indépendamment et simultanément par M. Burger et N. Monod dans le cadre de leur étude de la cohomologie bornée des réseaux [4].

L'étude des actions de groupes tels que les réseaux sur les variétés compactes a été proposée en particulier par R. Zimmer dans [31]. L'une des conjectures centrales dans ce programme est la suivante : si un réseau Γ d'un groupe de Lie connexe simple G de rang réel r agit fidèlement sur une variété compacte M, a-t-on nécessairement $r \leq \dim M$? Cet article répond donc positivement à cette question dans le cas où M est le cercle (tout au moins si l'action est différentiable).

Un certain nombre de résultats allant dans cette direction sont déjà connus.

Dans [29], D. Witte montre le théorème suivant. Soit G un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique simple, dont le $\mathbf{Q}$-rang est supérieur ou égal à 2 et soit Γ un réseau *arithmétique* de G. Alors toute action de Γ par *homéomorphismes* transite à travers un groupe fini. Il est intéressant de comparer ce théorème avec notre théorème 1.1. L'hypothèse relative au $\mathbf{Q}$-rang est extrêmement forte et le théorème de Witte ne s'applique donc qu'à une classe restreinte de réseaux (ceux qui sont les "moins co-compacts"), contrairement à notre résultat qui considère un réseau quelconque. Par contre, le théorème de Witte considère des actions par homéomorphismes, alors que les actions que nous considérons sont par difféomorphismes. Il est naturel de conjecturer que notre théorème 1.1 est également valable pour des actions par homéomorphismes mais les techniques que nous allons développer dans cet article ne permettent pas d'aborder cette question intéressante.

Dans [6, 7] B. Farb et P. Shalen introduisent une condition technique sur les réseaux des groupes de Lie semi-simples de rangs réels supérieurs ou égaux à 2, vérifiée pour de nombreux exemples mais cependant assez restrictive. Ils montrent ensuite qu'une action d'un réseau vérifiant cette condition, par difféomorphismes *analytiques* du cercle, transite à travers un groupe fini.

Quant à la question générale de l'existence d'actions fidèles de réseaux de groupes de Lie simples de rang r sur des variétés compactes M dont la dimension vérifie $r > \dim M > 1$, elle reste ouverte sans hypothèse additionnelle sur la géométrie ou la dynamique de l'action. Signalons cependant le résultat de [10] : un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{Z})$ n'agit pas fidèlement et analytiquement sur une surface compacte de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle dès que $r > 2$. On trouvera également dans [6, 7] des informations intéressantes sur les actions analytiques de certains réseaux en petite dimension.

Nous terminons cette introduction par quelles remarques et questions concernant les actions des réseaux de rangs réels 1. Soit G un groupe de Lie simple de rang réel 1 par exemple le groupe $\mathrm{S0}_0(n, 1)$ des isométries directes de l'espace hyperbolique de dimension n et soit Γ un réseau de G. Pour de nombreux exemples, il existe une surjection de Γ sur $\mathbf{Z}$ et il est donc facile de construire des actions de Γ sur le cercle qui transitent à travers $\mathbf{Z}$, donc non fidèles. Il est plus difficile de construire des actions fidèles de Γ et nous ne connaissons que quelques exemples. Pour $n = 2$, c'est-à-dire pour les groupes fuchsiens agissant sur le disque de Poincaré, le groupe Γ agit naturellement sur le bord de ce disque mais on peut également faire agir Γ via un autre plongement de Γ dans $\mathrm{S0}_0(2, 1) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, par exemple à image dense. Pour $n = 3$, c'est-à-dire pour les groupes kleinéens, W. Thurston donne dans [27] de nombreuses constructions d'actions fidèles de réseaux Γ par *homéomorphismes* du cercle. Il est probable que ces actions ne peuvent être lissées : on trouvera dans [21] un résultat intéressant allant dans ce sens. L'étude des actions fidèles de réseaux de groupes de rangs réels 1 semble prometteuse ; il est peut-être possible de les décrire avec précision lorsqu'elles sont analytiques (ou même seulement différentiables).

Les démonstrations proposées dans cet article sont élémentaires mais risquent d'être obscurcies par le vocabulaire de la théorie des groupes algébriques. Nous avons donc choisi de proposer au lecteur une lecture à plusieurs niveaux. Il se trouve que la démonstration du théorème 1.1-1.2 repose sur l'étude préalable d'un certain nombre de groupes de rangs 2 tels que $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$, $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$, $\mathrm{SO}_0(2, q)$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, $\mathrm{SU}(2, q)$, qui illustrent l'essentiel des difficultés rencontrées dans le cas général. Nous présenterons ensuite la preuve du cas général. Un lecteur pressé pourrait se contenter d'étudier par exemple les cas particuliers de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ et $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$ qui donnent facilement les cas de $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{R})$ et $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$; il ne perdrait pas les idées principales.

2 Généralités

Ce paragraphe est consacré à quelques rappels de propriétés classiques des actions de groupes sur le cercle.

On note toujours $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation. Rappelons qu'un homéomorphisme

$h \in \text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ possède un *nombre de rotation* $\rho(h) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. L'une des définitions possibles de $\rho(h)$ est la suivante [16]. On considère une mesure de probabilité μ sur le cercle invariante par h (il en existe toujours), un relevé $\tilde{h}$ de h au revêtement universel $\mathbf{R}$ du cercle $\mathbf{S}^1 \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et la mesure infinie $\tilde{\mu}$ "image réciproque" de μ dans $\mathbf{R}$, invariante par $\tilde{h}$ et par les translations entières. Pour chaque point x de $\mathbf{R}$, on considère la mesure $\tilde{\mu}([x, \tilde{h}(x)[)$ comptée négativement si $\tilde{h}(x) < x$. Cette mesure ne dépend pas de x ; soit $\tau(\tilde{h})$ cette valeur. Le nombre de rotation $\rho(h)$ est alors égal à $\tau(\tilde{h}) \bmod \mathbf{Z} \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$; il ne dépend ni du choix du relevé $\tilde{h}$ ni de la probabilité invariante μ choisie pour le calculer.

Si $\rho(h)$ est un rationnel $p/q \bmod \mathbf{Z}$, il existe des points périodiques de période q et tous les points périodiques ont la même période. Les points non périodiques sont errants ; les mesures de probabilité invariantes ont un support contenu dans la réunion des points périodiques.

Si $\rho(h)$ est irrationnel, il existe un unique compact non vide $K \subset \mathbf{S}^1$ qui est invariant par h et tel que l'orbite de tout point de K est dense dans K. Il existe une unique mesure de probabilité invariante par h : son support est K. Si K est le cercle tout entier, h est conjugué dans $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ à la rotation d'angle ρ (mesuré en tours). Si K est différent du cercle, c'est un ensemble de Cantor et les points qui ne sont pas dans K sont errants. Il existe une application π du cercle dans lui-même, continue, croissante au sens large, de degré 1, qui est une semi-conjugaison entre h et la rotation d'angle ρ. Les fibres de π sont soit des points de K soit les adhérences des composantes connexes du complémentaire de K.

Lorsqu'un groupe agit sur le cercle, on peut définir un invariant qui contient l'information donnée par les nombres de rotations des divers éléments du groupe et qui caractérise l'action à semi-conjugaison près : il s'agit d'une classe de cohomologie bornée (voir [9] pour plus de détails).

Soit U un groupe topologique compact agissant fidèlement sur le cercle par homéomorphismes, *i.e.* muni d'une injection continue $\phi : U \to \text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. Soit dx la mesure de Lebesgue sur le cercle. Utilisant la mesure de Haar sur U, on peut moyenner les mesures $\phi(u)_*(dx)$ sur U et obtenir ainsi une mesure de probabilité μ sur le cercle, sans atome, chargeant tous les ouverts non vides, et invariante par U. Il existe alors un homéomorphisme h tel que $h_*(\mu) = dx$ de sorte que, après conjugaison par h, on peut supposer que $\phi(U)$ préserve dx, c'est-à-dire que $\phi(U)$ est constitué de rotations. Il en résulte qu'*un sous-groupe compact de* $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ *est soit un sous-groupe fini cyclique soit conjugué au groupe des rotations*.

Remarquons en particulier que cette description des sous-groupes compacts montre qu'il existe un voisinage de l'identité dans $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ qui ne contient aucun sous-groupe compact non trivial. Soit maintenant G un groupe *localement compact* agissant fidèlement sur le cercle. Puisque G possède un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe non trivial, le théorème de Montgomery-Zippin montre que G est un *groupe de Lie* (éventuellement non connexe) [15]. Bien sûr, il s'agit d'un cas très particulier du théorème et on pourrait obtenir également ce résultat de manière plus élémentaire.

La description complète des actions fidèles de groupes de Lie connexes sur le cercle n'est pas difficile à obtenir ; elle est d'ailleurs due pour l'essentiel à S. Lie lui-même.

Soit G un groupe de Lie connexe *semi-simple* agissant fidèlement sur le cercle. Puisque nous connaissons la structure des sous-groupes compacts, on obtient immédiatement que G est localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. À conjugaison près, le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ n'agit fidèlement que d'une seule façon sur le cercle : l'action projective sur la droite projective $\mathbf{RP}^1$. De même, pour chaque entier k, il existe une action du revêtement à k feuillets de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur le revêtement à k feuillets de $\mathbf{RP}^1$, qui est encore un cercle. Enfin, le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ opère sur le revêtement universel de $\mathbf{RP}^1$ qui est une droite. En ajoutant deux points à l'infini de cette droite on obtient une action fidèle de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ sur un intervalle fermé. Si K est un fermé quelconque du cercle, on peut alors construire une action de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ sur le cercle qui est l'identité sur K et qui est conjuguée à l'action que nous venons de décrire sur chaque composante du complémentaire. Le lecteur pourra vérifier qu'à conjugaison près, ceci est la liste complète des actions fidèles de groupes de Lie connexes semi-simples (il s'agit d'étudier d'abord la dynamique topologique de l'action du centre). On peut aussi montrer facilement que les actions fidèles de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ que nous avons décrites ne peuvent pas être différentiables, mais nous n'utiliserons pas ces faits.

La description des actions fidèles de groupes de Lie G connexes *résolubles* sur le cercle est aussi élémentaire (voir par exemple [23]). Il existe un fermé K de points fixes (éventuellement vide) et sur chaque composante du complémentaire, l'action est conjuguée soit au groupe de translations de $\mathbf{R}$ ou du cercle, soit au groupe affine de $\mathbf{R}$. Le second groupe dérivé de G est trivial.

Le cas d'un groupe de Lie connexe quelconque se ramène aux cas précédents en considérant le radical résoluble et un sous-groupe semi-simple de Levi qui normalise le radical. La situation peut ainsi être complètement décrite à conjugaison près.

En résumé, *l'étude des actions de groupes localement compacts sur le cercle se ramène essentiellement à celle des actions de groupes discrets.*

3 Énoncé topologique

En fait, les théorèmes 1.1-1.2 vont résulter d'un résultat général valable pour les actions par homéomorphismes.

Théorème 3.1 *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de rang réel supérieur ou égal à 2 et Γ un réseau irréductible de G. Soit ϕ un homomorphisme de Γ vers le groupe des homéomorphismes du cercle respectant l'orientation. Alors, ou bien $\phi(\Gamma)$ préserve une mesure de probabilité sur* *le cercle ou bien ϕ est semi-conjugué à un revêtement fini d'un homomorphisme obtenu en faisant suivre :*

i) le plongement de Γ dans G,

ii) une surjection de G sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$*,*

iii) l'action projective de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ *sur le cercle (identifié à la droite projective réelle).*

Dans ce paragraphe, nous montrons comment le théorème 3.1 entraîne la partie essentielle du théorème 1.2. Supposons donc le théorème 3.1 démontré, plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.2 et supposons que l'action préserve une mesure de probabilité sur le cercle. *Nous allons montrer que l'action transite en fait à travers un groupe fini.*

La preuve de la dernière assertion du théorème 1.2, relative à la différentiabilité de la conjugaison, est de nature différente et sera reléguée à la fin de cet article (voir §10).

L'application nombre de rotation $\rho : \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ n'est *pas* un homomorphisme. Cependant, la définition que nous avons donnée montre que la restriction de ρ au sous-groupe formé des homéomorphismes qui préservent une mesure de probabilité fixée μ est un homomorphisme. D'après le théorème 3.1, l'application $\rho : \gamma \in \Gamma \mapsto \rho(\phi(\gamma)) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est donc un homomorphisme.

Un théorème important de Margulis, généralisant des travaux de Kazhdan, affirme que tout homomorphisme $\Gamma \to \mathbf{Z}$ est trivial [19, 14]. En fait, Margulis établit ce résultat lorsque G est semi-simple sans facteur compact et à centre fini mais fait remarquer que l'hypothèse sur le centre est inutile (voir [19, remark IX 6.20]). Nous verrons au §10 qu'il est facile de s'affranchir également de l'hypothèse sur les facteurs compacts. D'autre part, tout réseau d'un groupe de Lie connexe est de type fini [19, IX 3.1]. L'image d'un homomorphisme $\Gamma \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est donc un sous-groupe abélien de type fini dont la partie libre est triviale ; c'est un groupe fini cyclique $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Considérons le noyau Γ_0 du morphisme ρ : c'est un sous-groupe d'indice k de Γ et donc un réseau de G. Nous affirmons que tous les points du support de la probabilité μ sont des points fixes de tous les éléments de $\phi(\Gamma_0)$. Ceci résulte de l'observation élémentaire suivante. Soit h un homéomorphisme du cercle respectant l'orientation, de nombre de rotation nul, alors les seules probabilités invariantes par h sont celles dont le support est contenu dans l'ensemble des points fixes de h. En effet un tel homéomorphisme possède un fermé non vide $Fix(h)$ de points fixes et pour chaque intervalle I du complémentaire de $Fix(h)$, la dynamique de h sur I est simple : toute orbite converge vers l'une des extrémités de I de sorte qu'une probabilité invariante ne peut charger I. Nous avons donc montré que $\phi(\Gamma_0)$ opère trivialement sur un fermé non vide $Fix \subset \mathbf{S}^1$.

Rappelons le *théorème de stabilité* de Thurston [26]. Soit Δ un groupe de type fini ne possédant pas d'homomorphisme non trivial dans $\mathbf{Z}$ et soit $\psi : \Delta \to \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{R}, 0)$ un homomorphisme à valeurs dans le groupe des germes de difféomorphismes de classe C^1 de $\mathbf{R}$ fixant l'origine et respectant l'orientation, au voisinage de l'origine. Alors ψ est trivial.

Nous pouvons maintenant démontrer que $\phi(\Gamma)$ est un groupe fini cyclique (toujours en utilisant 3.1). Considérons le fermé non vide Fix des points fixes par tous les éléments de $\phi(\Gamma_0)$. En considérant les germes en un point de Fix et en appliquant le théorème de Thurston, on déduit que Fix est également ouvert et il en résulte bien que $\phi(\Gamma_0)$ est trivial, comme annoncé.

Cet argument utilisant le théorème de stabilité est le seul où nous utiliserons la différentiabilité de l'action étudiée. Le théorème de Thurston n'est pas valable pour les groupes d'homéomorphismes et c'est la raison pour laquelle nous sommes incapables de généraliser nos résultats aux actions par homéomorphismes.

4 Le cas des groupes spéciaux linéaires

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 3.1 dans le cas des groupes spéciaux linéaires. En fait, pour simplifier l'exposition, nous considérons d'abord le cas d'un réseau Γ dans $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. Soit $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. Comme $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$ est un groupe de Lie simple, Γ est bien sûr irréductible et il s'agit en fait de montrer que $\phi(\Gamma)$ préserve une mesure de probabilité sur le cercle.

La structure de la preuve

La démonstration du théorème 3.1 va se faire en plusieurs étapes que nous décrivons d'abord rapidement et informellement pour la commodité du lecteur, avant de les détailler.

Première étape (classique). Un *drapeau* de $\mathbf{R}^3$ est la donnée d'un plan vectoriel E_2 de $\mathbf{R}^3$ et d'une droite (vectorielle) E_1 contenue dans E_2. L'ensemble de ces drapeaux, muni de la topologie naturelle, est une variété compacte Dr qui est un espace homogène sous l'action de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. Le groupe Γ agit naturellement sur $\mathbf{R}^3$ et donc sur Dr.

Soit $Prob(\mathbf{S}^1)$ l'espace des probabilités sur le cercle. C'est un espace métrisable compact sur lequel $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ agit naturellement ainsi que Γ, via l'homomorphisme ϕ.

On munit Dr de la tribu des parties mesurables au sens de Lebesgue et $Prob(\mathbf{S}^1)$ de la tribu des boréliens. La première étape consiste à construire une application mesurable $\Psi : Dr \to Prob(\mathbf{S}^1)$ qui est équivariante par rapport aux actions de Γ sur la source et le but.

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que l'application Ψ prend une valeur constante μ, presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue sur Dr. En effet l'équivariance de Ψ montrera que cette probabilité μ est invariante par $\phi(\Gamma)$.

Par l'absurde, nous supposerons donc par la suite que Ψ n'est pas constante presque partout.

Deuxième étape. En utilisant les propriétés ergodiques de l'action de Γ sur Dr, nous montrons qu'il existe un entier k et une application Ψ équivariante comme ci-dessus telle que l'image de presque tout drapeau est la somme de k masses de Dirac sur le cercle (chacune de poids $1/k$). Notons $\mathbf{S}^1_k$ l'espace des parties du cercle à k éléments de sorte que nous pouvons maintenant considérer Ψ comme une application de Dr vers $\mathbf{S}^1_k$.

Troisième étape. Soit X l'espace constitué des triplets (E^1_2, E^2_2, E^3_2) de plans distincts de $\mathbf{R}^3$ qui s'intersectent sur une même droite E_1. C'est encore un espace homogène sous l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$. Un point de X détermine trois drapeaux. L'application Ψ permet donc de définir une application mesurable $\Psi^{(3)} : X \to (\mathbf{S}^1_k)^3$. La contradiction cherchée va résulter de l'ergodicité de l'action de Γ sur X qui sera incompatible avec la non ergodicité de celle de Γ sur les triplets de points sur le cercle : un triplet de points distincts sur le cercle peut en effet être positivement ou négativement ordonné et cette décomposition de l'espace des triplets de points distincts est invariante par $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$.

Nous passons maintenant à la preuve détaillée.

Première étape : l'application de Furstenberg

Cette première étape est classique et due à Furstenberg [8]. On pourra consulter par exemple [19, IV 4.5] pour une description plus complète mais nous indiquons cependant ici une preuve.

Proposition 4.1 *Il existe une application mesurable au sens de Lebesgue* $\Psi : Dr \to Prob(\mathbf{S}^1)$ *qui est équivariante sous les actions naturelles de* Γ *sur la source et le but.*

Démonstration Le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ agit transitivement sur Dr. Le stabilisateur du drapeau formé de la droite engendrée par $(1, 0, 0)$ et du plan engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ est le groupe B des matrices triangulaires supérieures. On peut donc identifier Dr à l'espace homogène $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})/B$.

Le groupe B est résoluble et donc moyennable [12]. Ceci signifie qu'il existe une forme linéaire "moyenne" m sur l'espace $L^\infty(B, \mathbf{R})$ des fonctions mesurables essentiellement bornées sur B qui vérifie les conditions suivantes :

i) la moyenne de la fonction constante 1 est égale à 1,

ii) si $f \geq 0$ alors, $m(f) \geq 0$,

iii) la moyenne est invariante à gauche : si $f \in L^\infty(B, \mathbf{R})$ et si $b \in B$, notons $f_b : x \in B \mapsto f(bx) \in \mathbf{R}$. Alors $m(f) = m(f_b)$.

Il se trouve qu'il est possible de choisir m dépendant mesurablement de f (voir [20]). Autrement dit, si f_λ dépend mesurablement d'un paramètre λ appartenant à $[0, 1]$, la fonction $\lambda \mapsto m(f_\lambda)$ est mesurable au sens de Lebesgue.

Revenant à notre problème, on commence par remarquer qu'il existe des applications mesurables $\Psi_0 : \mathrm{SL}(3, \mathbf{R}) \to Prob(\mathbf{S}^1)$ qui sont Γ-équivariantes. Ceci résulte du fait que l'action de Γ sur $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ par translations à gauche possède un domaine fondamental ; on définit donc Ψ_0 de manière arbitraire sur ce domaine fondamental et on complète la définition de Ψ_0 en utilisant l'équivariance.

Pour compléter la démonstration, il faut modifier Ψ_0 pour la rendre invariante par les translations à droite par B. Pour ce faire, on utilise la moyenne m. En formules, on définit $\Psi : \mathrm{SL}(3, \mathbf{R}) \to \mathit{Prob}(\mathbf{S}^1)$ de la manière suivante. Si $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$, la probabilité $\Psi(g)$ est définie par son intégrale sur une fonction continue $u : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$:

$$\int_{\mathbf{S}^1} u \, d\Psi(g) = m\Big(x \in B \mapsto \int_{\mathbf{S}^1} u \, d\Psi_0(gx)\Big).$$

Par construction, Ψ est mesurable, invariante à droite par B ; ceci définit donc encore une application mesurable $\Psi : Dr \simeq \mathrm{SL}(3, \mathbf{R})/B \to \mathit{Prob}(\mathbf{S}^1)$ qui a les propriétés requises. □

On remarquera que le résultat de [20] que nous avons utilisé repose sur l'hypothèse du continu. Les démonstrations de [8, 19] n'ont pas cet inconvénient.

Deuxième étape : l'application Ψ à valeurs dans les masses de Dirac

Comme nous l'avons indiqué plus haut, *nous supposons dorénavant par l'absurde que l'application Ψ n'est pas constante sur une partie de mesure de Lebesgue totale.*

Proposition 4.2 *Il existe un entier $k \geq 1$ et une application $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1_k$ à valeurs dans l'espace $\mathbf{S}^1_k$ des parties à k éléments du cercle, qui est mesurable au sens de Lebesgue et équivariante presque partout sous les actions de Γ sur la source et le but.*

Avant de démontrer cette proposition, nous allons rappeler un théorème ergodique important de C. Moore que nous allons utiliser de nombreuses fois dans cet article (voir par exemple [30, Chap. 2]). Soit $Y = G/H$ un espace homogène d'un groupe de Lie semi-simple G, connexe, à centre fini et sans facteur compact, et supposons que le stabilisateur H n'est pas compact. Soit Γ un réseau irréductible de G. Alors l'action de Γ sur Y est ergodique par rapport à la (classe de) mesure de Lebesgue de Y, c'est-à-dire que toute fonction mesurable sur Y qui est invariante par Γ est constante presque partout. On remarquera que tout réseau d'un groupe de Lie simple est évidemment irréductible.

Par exemple, le stabilisateur B d'un drapeau est non compact. *L'action de Γ sur Dr est donc ergodique*.

Comme autre exemple, considérons l'espace Y des couples de drapeaux de $\mathbf{R}^3$ en position générale. Pour un tel couple, il existe trois droites non coplanaires E_1^1, E_1^2, E_1^3 telles que le premier drapeau soit constitué de la droite E_1^1 et du plan engendré par E_1^1 et E_1^2 alors que le second drapeau est constitué de la droite E_1^3 et du plan engendré par E_1^2 et E_1^3. Puisque $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$

agit transitivement sur l'espace des triplets de droites non coplanaires, l'espace Y est bien un espace homogène sous l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$. Le stabilisateur d'un élément de Y est le stabilisateur d'un triplet de droites non coplanaires ; il est clairement non compact. Par conséquent, l'action du réseau Γ sur Y est ergodique. Puisque l'ensemble des couples de drapeaux en position générale est de mesure totale dans l'ensemble des couples de drapeaux, nous avons donc établi que Γ *agit de manière ergodique sur l'ensemble des couples de drapeaux de* $\mathbf{R}^3$.

Par contre, le lecteur vérifiera que l'action de Γ sur les triplets de drapeaux n'est pas ergodique car l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ n'est pas transitive.

Pour démontrer la proposition 4.2, nous allons analyser l'action de Γ sur l'espace des couples de probabilités du cercle.

Si μ est une mesure de probabilité sur le cercle, on définit $atome(\mu)$ comme la somme des mesures des atomes de μ, c'est-à-dire des points x (en nombre dénombrable) tels que $\mu(\{x\}) > 0$. C'est évidemment une fonction mesurable sur $Prob(\mathbf{S}^1)$ qui est invariante par l'action de $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. La fonction :

$$d \in Dr \mapsto atome(\Psi(d)) \in [0, 1]$$

est une fonction mesurable Γ-invariante. D'après le résultat d'ergodicité que nous venons de rappeler, cette fonction est constante presque partout.

Supposons d'abord que cette constante soit non nulle, c'est-à-dire que l'image de presque tout drapeau par Ψ possède au moins un atome.

Soit $\alpha > 0$ un réel strictement positif. Pour toute mesure de probabilité μ sur le cercle, on considère les points $x \in \mathbf{S}^1$ tels que $\mu(\{x\}) \geq \alpha$. Évidemment, il n'existe qu'un nombre fini (éventuellement nul) de tels points x. On notera ce nombre $N(\mu, \alpha)$. L'application $d \in Dr \mapsto N(\Psi(d), \alpha) \in \mathbf{N}$ est mesurable et constante sur les orbites de Γ ; elle est donc constante égale à un entier N_α presque partout. Puisque nous supposons que pour presque tout d, la probabilité $\Psi(d)$ possède des atomes, on peut choisir un α de telle sorte que N_α soit un entier k non nul. Ainsi, on peut définir une application définie presque partout dans Dr et à valeurs dans l'espace des parties du cercle à k éléments, en envoyant le drapeau d sur les k atomes de $\Psi(d)$ qui ont une masse supérieure ou égale à α. Cette application, que nous rebaptisons Ψ satisfait aux conditions requises dans la proposition 4.2 qui est donc démontrée sous l'hypothèse que presque toutes les probabilités $\Psi(d)$ ont des atomes.

Nous considérons maintenant la situation opposée où, pour presque tout d, la probabilité $\Psi(d)$ n'a pas d'atome.

Nous allons montrer d'abord que, sous cette hypothèse, *les probabilités $\Psi(d)$ ont presque toutes le même support.*

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité sans atome sur le cercle. Soit $D(\mu_1, \mu_2)$ le maximum des μ_2-mesures des composantes connexes du complémentaire du support de μ_1. Si $D(\mu_1, \mu_2) = 0$, le support de μ_1 contient celui de μ_2. L'application mesurable définie presque partout :

$$(d_1, d_2) \in Dr^2 \mapsto D(\Psi(d_1), \Psi(d_2)) \in [0, 1]$$

est constante sur les orbites de Γ. Par le résultat d'ergodicité rappelé plus haut, cette application est constante presque partout. Nous affirmons que cette constante δ est nulle. Supposons au contraire que $\delta > 0$. En appliquant le théorème de Fubini, on peut trouver une partie mesurable $\Omega \subset Dr$ telle que :

i) Ω est de mesure de Lebesgue totale.

ii) Si $d \in \Omega$, la probabilité $\Psi(d)$ n'a pas d'atome.

iii) Si $d \in \Omega$, on a $D(d, d') = \delta$ pour presque tout d' de Dr.

iv) Si $d \in \Omega$, alors $\Psi(d)$ appartient au support de la mesure $\Psi_*(Lebesgue)$ sur l'espace compact métrisable $Prob(\mathbf{S}^1)$.

Fixons un point $d \in \Omega$. On peut donc trouver une suite $d_i \in \Omega$ telle que $\Psi(d_i) = \mu_i$ converge vers $\Psi(d) = \mu$. Les probabilités μ_i sont sans atomes et $D(\mu_i, \mu) = \delta$. Cela signifie qu'il existe une composante I_i du complémentaire du support $Supp(\mu)$ telle que $\mu_i(I_i) = \delta$. Si la suite des longueurs des I_i tend vers 0, on peut supposer, quitte à extraire, que l'intervalle I_i tend vers un point p. Ceci entraîne que le point p est un atome de μ, contrairement à notre hypothèse. On peut donc supposer, quitte à extraire, que les intervalles I_i coïncident tous avec un certain intervalle I. Puisque les extrémités de I ne sont pas des atomes de μ, que μ_i tend vers μ, et que $\mu_i(I) = \delta$, on déduit que $\mu(I)\delta$ contredisant le fait que I est dans le complémentaire du support de μ.

Ainsi, nous avons montré que $\delta = 0$, c'est-à-dire que pour presque tout couple de drapeaux (d, d') on a $D(\Psi(d), \Psi(d')) = 0$. Par conséquent, pour presque tout couple de drapeaux (d, d'), les probabilités $\Psi(d)$ et $\Psi(d')$ ont le même support. Autrement dit, *il existe un fermé $K \subset \mathbf{S}^1$ sans point isolé tel que pour presque tout drapeau d, le support de $\Psi(d)$ est égal à K.*

Chaque composante connexe de $\mathbf{S}^1 - K$ est un intervalle ouvert. En contractant sur un point l'adhérence de chacun de ces intervalles, on obtient un espace encore homéomorphe au cercle. Il existe donc une application continue $\pi : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ dont chaque fibre est soit un point soit l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire de K. Si μ est une probabilité sans atome dont le support est K, l'image directe $\pi_*(\mu)$ est une probabilité sans atome et de support total sur le cercle. En composant avec π_*, on obtient donc une application $\overline{\Psi}$ définie presque partout et équivariante de Dr vers l'espace des probabilités sans atomes et de support total sur le cercle.

L'espace des probabilités sans atomes et de support total sur le cercle est un espace homogène sous l'action de $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$, le stabilisateur de la mesure de Lebesgue étant bien sûr $SO(2)$. Cet espace s'identifie donc au quotient $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)/SO(2)$. Le groupe $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$, comme tout groupe topologique métrisable, peut être muni d'une distance invariante à gauche. En moyennant sous l'action de $SO(2)$, on obtient donc une distance *dist* sur $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)/SO(2)$ invariante à gauche.

La fonction qui associe à presque tout couple de drapeaux (d, d') la distance $dist(\overline{\Psi}(d), \overline{\Psi}(d'))$ est mesurable et invariante par l'action de Γ ; elle est donc constante presque partout. Par un argument analogue à celui utilisé ci-dessus, cette constante est nulle, c'est-à-dire que l'application $\overline{\Psi}$ est constante presque partout. Puisque deux probabilités sans atomes et de support K qui ont même image par π_* sont clairement identiques, on en déduit que l'application Ψ est également constante presque partout, contrairement à ce que nous avons supposé au début de ce paragraphe. Cette contradiction conclut la démonstration de la proposition 4.2.

Troisième étape : l'ordre cyclique des triplets de points sur le cercle

Pour éclairer ce qui va suivre, *commençons par supposer que l'entier k introduit précédemment est égal à 1, c'est-à-dire que l'on dispose d'une application équivariante définie presque partout* $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1$ *et non constante presque partout.*

Comme expliqué plus haut, soit X l'espace constitué des triplets (E_2^1, E_2^2, E_2^3) de plans distincts de $\mathbf{R}^3$ qui s'intersectent sur une même droite E_1. C'est encore un espace homogène sous l'action de $SL(3, \mathbf{R})$ et le stabilisateur d'un point de X est clairement non compact. D'après le théorème de Moore, l'action de Γ sur X est ergodique. Un point de X détermine trois drapeaux. L'application Ψ permet de définir une application mesurable équivariante $\Psi^{(3)} : X \to (\mathbf{S}^1)^3$ définie presque partout. Soit en effet $pr : Dr \to \mathbf{RP}^2$ la projection de Dr sur le plan projectif réel qui associe à un drapeau $E_1 \subset E_2$ la droite $E_1 \subset \mathbf{R}^3$. L'espace X est donc l'espace des triplets de drapeaux ayant même projection par pr. Il résulte du théorème de Fubini que pour toute partie de mesure de Lebesgue totale dans Dr, l'ensemble des triplets d'éléments de cette partie ayant mêmes projections est de mesure de Lebesgue totale dans X : c'est précisément ce qui permet de définir $\Psi^{(3)}$.

L'espace $(\mathbf{S}^1)^3$ peut être décomposé en parties disjointes et invariantes sous l'action du groupe $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$:

i) Les triplets de la forme (x, x, x).

ii) Les triplets dont exactement deux éléments sont égaux. Cet ensemble est lui même décomposé en trois parties : l'espace des triplets qui sont de la forme (x, x, z), respectivement (x, y, x), respectivement (x, y, y).

iii) Les triplets de points distincts (x, y, z) du cercle qui sont ordonnés positivement, *i.e.* tels que l'intervalle positivement orienté joignant x à y ne contient pas z.

iv) Les triplets de points distincts (x, y, z) qui sont ordonnés négativement.

Les images réciproques de ces parties par $\Psi^{(3)}$ sont des parties mesurables disjointes et Γ-invariantes. Chacune d'entre elles est donc de mesure de

Lebesgue nulle ou totale. Cela signifie qu'il existe une partie de mesure totale $\Omega \subset X$ dont l'image est contenue dans l'une des parties que nous avons décrites. Nous allons montrer que ceci est impossible.

Pour cela, on observe que le groupe symétrique à trois lettres Σ_3 opère naturellement à la fois sur X et sur $(\mathbf{S}^1)^3$ en permutant respectivement les drapeaux et les points. Ces actions commutent avec celles de Γ sur X et sur $(\mathbf{S}^1)^3$ et l'application $\Psi^{(3)}$ est bien sûr également équivariante sous cette action de Σ_3.

Il résulte de ceci que la partie qui contient $\Psi^{(3)}(\Omega)$ doit être invariante par l'action de Σ_3. Seule la première partie, constituée des triplets de points égaux, vérifie cette condition. Cela signifie que l'application $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1$ que nous étudions transite à travers la projection $pr : Dr \to \mathbf{RP}^2$ ou encore que l'image par Ψ d'un drapeau ne dépend presque partout que de la droite associée au drapeau et non pas du plan.

On aurait pu, exactement de le même manière, définir un espace X' formé des triplets de drapeaux qui ont le même plan, *i.e.* qui ont la même projection dans le plan projectif dual. On montrerait ainsi que Ψ ne dépend presque partout que du plan associé à un drapeau et pas de sa droite.

Ceci entraîne que Ψ est constante sur une partie de mesure totale, ce que nous avons exclu au début de ce paragraphe. Nous avons donc une contradiction dans le cas où $k = 1$.

Lorsque $k > 1$, nous allons procéder de manière similaire. Rappelons que nous notons $\mathbf{S}^1_k$ l'espace des parties A du cercle à k éléments. Étant donnés deux éléments (A_1, A_2, A_3) et (A'_1, A'_2, A'_3) de $(\mathbf{S}^1_k)^3$, nous dirons que ces deux éléments ont le *même ordre cyclique* s'il existe un homéomorphisme du cercle h respectant l'orientation tel que $h(A_1) = A'_1$, $h(A_2) = A'_2$, $h(A_3) = A'_3$. Ceci donne une partition de $(\mathbf{S}^1_k)^3$ en un nombre fini de parties invariantes par $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. De même que précédemment, on déduit qu'il existe une partie de mesure totale $\Omega \subset X$ telle que $\Psi(\Omega)$ est contenu dans une de ces parties. En utilisant également les actions naturelles de Σ_3 de part et d'autre, on en déduit que cette partie est constituée de triplets (A_1, A_2, A_3) qui ont le même ordre cyclique que $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)})$ pour tout élément $\sigma \in \Sigma_3$. Il existe donc pour chaque σ un homéomorphisme h_σ tel que $h_\sigma(A_i) = A_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, 2, 3$. Soit A la réunion de A_1, A_2 et A_3 : c'est un ensemble ayant $N \leq 3k$ éléments. Les homéomorphismes h_σ préservent A et y induisent nécessairement une permutation cyclique. En particulier, le commutateur de deux h_σ agit trivialement sur A. Comme la permutation cyclique $\sigma = (1, 2, 3)$ est un commutateur dans le groupe symétrique Σ_3, l'homéomorphisme $h_{(1,2,3)}$ opère trivialement sur A. Puisque nous savons que $h_{(1,2,3)}(A_1) = A_2$, $h_{(1,2,3)}(A_2) = A_3$ et $h_{(1,2,3)}(A_3) = A_1$, c'est que $A_1 = A_2 = A_3$. En résumé, nous avons montré qu'il existe une partie mesurable de mesure totale $\Omega \subset X$ telle que l'image de $\Psi^{(3)}(\Omega)$ est constituée de triplets de parties égales de $\mathbf{S}^1_k$. Exactement comme dans le cas $k = 1$, nous pouvons conclure que Ψ est constante sur une partie de mesure totale, ce que nous avons exclu au début du paragraphe.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.1 pour le cas des réseaux de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$.

Remarquons que l'argument central de la démonstration, que nous allons généraliser aux autres groupes, est l'incompatibilité entre la non transitivité de l'action de $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ sur les triplets de points distincts et la transitivité de celle de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ sur X. Le fait qu'il existe des transformations de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ qui fixent une droite D et qui permutent de manière impaire trois plans qui contiennent D n'est finalement que la non orientabilité du plan projectif réel.

La démonstration pour un réseau Γ *de* $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{R})$ est exactement la même. Pour toute suite d'entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq r+1$, on considère l'espace $Dr_{i_1,\cdots,i_l}$ des drapeaux de type $(i_1, \cdots, i_l)$, c'est-à-dire des suites de sous-espaces vectoriels $E_{i_1} \subset E_{i_2} \subset \cdots \subset E_{i_l} \subset \mathbf{R}^{r+1}$ avec $\dim E_{i_j} = i_j$ $(j = 1, \cdots, l)$. C'est un espace homogène sous l'action de $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{R})$. L'espace des drapeaux complets, *i.e.* $Dr = Dr_{1,2,\cdots,r}$ est muni de projections pr_j sur les espaces de drapeaux incomplets $Dr_{1,2,\cdots,\hat{j},\cdots,r}$ où l'indice j n'apparaît pas. L'espace X_j formé des triplets de drapeaux distincts de Dr qui se projettent par pr_j sur le même drapeau de Dr_j est également un espace homogène sous l'action de $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{R})$, à stabilisateur non compact.

Il suffit maintenant de recopier la démonstration que nous venons de faire pour $r = 2$. On commence par construire une application équivariante Ψ de Dr vers $Prob(\mathbf{S}^1)$ (même preuve). Supposant par l'absurde que Ψ n'est pas constante presque partout, on construit une autre application encore notée Ψ de Dr vers $\mathbf{S}^1_k$ (même preuve). Pour chaque $j = 1, \cdots, r$, on considère l'application associée $\Psi^{(3)}_j : X_j \to \mathbf{S}^1_k$ et on montre comme plus haut que, sur une partie de mesure totale, elle prend ses valeurs dans les triplets formés de parties identiques (A, A, A). On en déduit que pour chaque $j = 1, \cdots, r$ et sur une partie de mesure totale, la valeur de Ψ sur un drapeau ne dépend que de sa projection par pr_j. Puisque ceci est vrai pour tout j, c'est que Ψ est constante presque partout. C'est la contradiction cherchée qui achève la preuve du théorème 3.1.

Les preuves se généralisent évidemment pour les groupes spéciaux linéaires complexes $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{C})$ et quaternioniques $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{H})$ (pour $r \geq 2$).

5 Le cas du groupe symplectique

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 3.1 dans le cas du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ $(r \geq 2)$.

Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2r, \mathbf{R})$ formé des applications linéaires qui préservent la forme symplectique

$$\omega((x_1, \cdots, x_{2r}), (x'_1, \cdots, x'_{2r})) = x_1 x'_2 - x_2 x'_1 + \cdots + x_{2r-1} x'_{2r} - x_{2r} x'_{2r-1}.$$

C'est un groupe de Lie simple connexe de rang r.

Nous fixons donc un réseau Γ dans $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ ($r \geq 2$) et un homomorphisme $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. Nous supposons par l'absurde que $\phi(\Gamma)$ ne préserve aucune mesure de probabilité sur le cercle.

Un sous-espace E de $\mathbf{R}^{2r}$ est *isotrope* si la restriction de la forme ω à E est nulle. Un sous-espace isotrope de dimension maximale r est un sous-espace *lagrangien*. Si $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_l \leq r$ est une suite d'entiers, on notera dans ce paragraphe $Dr_{i_1,\cdots,i_l}$ l'espace des drapeaux isotropes de type $(i_1, \cdots, i_l)$, c'est-à-dire l'espace des suites de sous-espaces isotropes $E_{i_1} \subset \cdots \subset E_{i_l}$ avec $\dim E_{i_j} = i_j$ ($j = 1, \cdots, l$). Ce sont des espaces homogènes sous l'action du groupe symplectique. De même que précédemment, l'espace $Dr = Dr_{1,2,\cdots,r}$ est muni de projections pr_j sur les espaces de drapeaux incomplets $Dr_{1,2,\cdots,\hat{j},\cdots,r}$ où l'indice j n'apparaît pas. Pour $j = 1, \cdots, r$, on note X_j l'espace des triplets de drapeaux distincts de Dr qui ont même projection par pr_j.

Comme précédemment, le stabilisateur d'un drapeau de Dr sous l'action du groupe symplectique est un groupe résoluble. L'action du groupe symplectique est également transitive sur l'espace des couples de drapeaux génériques, avec un stabilisateur non compact, de sorte qu'on a encore une application équivariante $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1_k$. Comme plus haut, nous supposons que Ψ n'est pas constante presque partout.

La différence essentielle avec le paragraphe précédent est le fait suivant.

Remarque 5.1 Le groupe symplectique opère transitivement sur $X_1, X_2, \cdots, X_{r-1}$ mais pas sur X_r où il a deux orbites.

Pour comprendre ceci, remarquons que si E est un sous-espace isotrope de $\mathbf{R}^{2r}$, le quotient de l'orthogonal symplectique $E^\perp$ par E est naturellement muni d'une forme symplectique. Un point de X_r est la donnée de trois drapeaux complets distincts qui ont les mêmes $r-1$ premiers sous-espaces $E_1 \subset \cdots \subset E_{r-1}$. Par conséquent, un point de X_r donne trois lagrangiens E_r^1, E_r^2, E_r^3 contenant E_{r-1}, c'est-à-dire trois droites distinctes dans le quotient $E_{r-1}^\perp / E_{r-1}$ qui est un espace de dimension 2 muni d'une forme symplectique, et en particulier un plan *orienté*. Le triplet de droites de ce plan peut donc être positivement ou négativement ordonné. Ceci définit donc deux types d'éléments dans X_r et explique pourquoi le groupe symplectique n'opère pas transitivement sur X_r. Le fait que $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ opère transitivement sur chacune de ces deux parties de X_r est un exercice facile laissé au lecteur : il suffit d'analyser l'action du stabilisateur P_r d'un drapeau incomplet $E_1 \subset \cdots \subset E_{r-1}$ sur l'espace $E_{r-1}^\perp / E_{r-1} \simeq \mathbf{R}^2$ et de vérifier que cette action se fait via une surjection $P_r \to \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et agit donc transitivement sur les triplets positivement ordonnés de droites distinctes de $\mathbf{R}^2$.

De même la transitivité sur chaque X_j avec $j < r$ s'obtient en analysant l'action du stabilisateur P_j d'un drapeau incomplet $E_1 \subset \cdots \subset \hat{E}_j \subset \cdots \subset E_r$ (où E_j n'apparaît pas) sur l'espace $E_{j+1}/E_{j-1} \simeq \mathbf{R}^2$ et en vérifiant que cette action se fait via une surjection $P_j \to \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ et agit donc transitivement sur les triplets de droites distinctes de $\mathbf{R}^2$.

Puisque le groupe symplectique opère transitivement sur $X_1, \cdots, X_{r-1}$ et que les stabilisateurs sont non compacts, les arguments du paragraphe précédent montrent que la valeur de Ψ sur un drapeau $d = (E_1 \subset \cdots \subset E_r)$ ne dépend que de son dernier espace E_r, sur une partie de mesure totale. En d'autres termes, Ψ *transite à travers une application équivariante, encore notée* Ψ*, de* Dr_r *vers* $\mathbf{S}^1_k$.

Il nous faut employer un autre argument pour traiter du dernier espace X_r puisque pr_r est "orientable".

Rappelons quelques propriétés de la *classe de Maslov* (voir [1,3]). Soient L_1 et L_2 deux lagrangiens transverses dans $\mathbf{R}^{2r}$. Soit L_3 un troisième lagrangien transverse aux deux premiers et p_1, p_2 les projections de L_3 sur L_1 et L_2 parallèlement à L_2 et L_1 respectivement. La fonction $q : x \in L_3 \mapsto \omega(p_1(x), p_2(x))$ est une forme quadratique non dégénérée sur L_3 ; sa signature (*i.e.* le nombre de carrés positifs moins le nombre de carrés négatifs) est un entier compris entre $-r$ et r (et congru à r modulo 2) appelé *indice de Maslov* $I(L_1, L_2, L_3)$. On peut d'ailleurs étendre la définition lorsque les lagrangiens ne sont pas transverses, mais nous ne l'utiliserons pas. On remarquera que le sous-groupe du groupe symplectique stabilisant les trois lagrangiens est le groupe orthogonal de cette forme quadratique ; il est donc non compact si l'indice I est différent de $\pm r$. Les propriétés que nous utiliserons sont les suivantes.

i) Si (L_1, L_2, L_3) et (L'_1, L'_2, L'_3) sont deux triplets de lagrangiens transverses deux à deux, les indices $I(L_1, L_2, L_3)$ et $I(L'_1, L'_2, L'_3)$ sont égaux si et seulement si il existe une transformation symplectique envoyant L_1 sur L'_1, L_2 sur L'_2 et L_3 sur L'_3 ; c'est la classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel.

ii) Si l'on permute trois lagrangiens transverses, l'indice de Maslov ne change pas ou change de signe suivant la signature de la permutation utilisée.

Plaçons-nous d'abord dans le cas $r = 2$, c'est-à-dire dans le cas du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$. L'espace Y des triplets génériques (L_1, L_2, L_3) de lagrangiens de $\mathbf{R}^4$ (*i.e.* transverses deux à deux) se décompose en trois orbites ouvertes sous l'action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$, suivant que l'indice de Maslov est -2, 0 ou $+2$. Considérons l'orbite Y_0 d'indice 0. C'est un espace homogène à stabilisateur non compact et sur lequel le réseau Γ agit donc ergodiquement. On remarque par ailleurs que cette orbite Y_0 est invariante par l'action naturelle du groupe symétrique à trois lettres Σ_3. L'application $\Psi : Dr_2 \to \mathbf{S}^1_k$ dont nous disposons permet de définir une application mesurable $\Psi^{(3)} : Y_0 \to \mathbf{S}^1_k$ qui est équivariante sous les actions de $\Gamma \times \Sigma_3$ sur les espaces source et but. Exactement comme dans le paragraphe précédent on en déduit que l'image par Ψ de presque tout triplet de Y_0 est constituée de trois parties identiques de $\mathbf{S}^1_k$. Étant donnés deux lagrangiens transverses L_1, L_2, l'ensemble des lagrangiens L_3 tels que $(L_1, L_2, L_3) \in Y_0$ est un ouvert non vide. Il en résulte que pour presque tout couple de lagrangiens (L_1, L_2), on a $\Psi(L_1) = \Psi(L_2)$, c'est-à-dire que Ψ est constante presque partout. Ceci achève la preuve du théorème 1.1 dans le cas de $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$.

En fait, on remarquera que la même preuve fonctionne si r est pair, de façon à ce que l'indice de Maslov puisse prendre la valeur 0 sur un ouvert non vide Y_0 dans l'espace des triplets génériques de lagrangiens.

Pour traiter du cas général où r est impair, plusieurs solutions sont possibles. Soit $Dr_{1,r}$ l'espace des couples $D \subset L$ formés d'une droite contenue dans un lagrangien et considérons l'application (toujours notée Ψ) de $Dr_{1,r}$ vers $\mathbf{S}^1_k$ qui envoie le couple (D, L) sur $\Psi(L)$. Considérons également la projection $p : Dr_{1,r} \to \mathbf{RP}^{2r-1}$ qui envoie le couple (D, L) sur la droite D. La fibre d'une droite D est l'espace des lagrangiens contenant D, c'est-à-dire l'espace des lagrangiens de $D^{\perp}/D$ qui est un espace symplectique de dimension $2(r-1)$. Soit Z l'espace des triplets d'éléments de $Dr_{1,r}$ qui ont même projection par p et tels que les lagrangiens correspondants dans l'espace symplectique associé de dimension $2(r-1)$ sont transverses deux à deux. Dans cet espace, on considère la partie ouverte non vide Z_0 formée des triplets d'indice de Maslov 0 (toujours dans cet espace de dimension $2(r-1)$). C'est un espace homogène sous l'action de $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$, à stabilisateur non compact de sorte que Γ agit ergodiquement sur Z_0. Comme précédemment on construit une application mesurable $\Psi^{(3)} : Z_0 \to (\mathbf{S}^1_k)^3$ qui est équivariante sous l'action de $\Gamma \times \Sigma_3$ sur les espaces source et but. Avec la même preuve que plus haut, on en déduit que $\Psi^{(3)}$ prend presque toutes ses valeurs dans l'ensemble des triplets égaux (A, A, A) dans $(\mathbf{S}^1_k)^3$. La restriction de Ψ à presque toute fibre $p^{-1}(D)$ est donc constante. Mais ceci est impossible puisque nous savons que la valeur de Ψ sur un couple $D \subset L$ ne dépend que de L.

Ceci termine la démonstration du théorème 3.1 dans le cas du groupe symplectique de dimension quelconque.

En passant, remarquons que la difficulté que nous avons rencontrée ne se présente pas pour le groupe symplectique complexe $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{C})$. Puisque deux formes quadratiques complexes de même rang sont équivalentes, le groupe symplectique complexe agit transitivement sur l'analogue de X_r : il n'y a donc pas d'analogue de l'indice de Maslov et la preuve fonctionne sans difficulté.

6 Le cas des groupes orthogonaux

Considérons la forme quadratique sur $\mathbf{R}^{2+q}$ de signature $(2, q)$:

$$Q(x_1, \cdots, x_{q+2}) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{q+2}^2.$$

Le groupe d'isométries directes de cette forme est le groupe de Lie simple $\mathrm{SO}(2, q)$ dont le rang réel est 2. Ce groupe a deux composantes connexes ; nous notons $\mathrm{SO}_0(2, q)$ sa composante neutre.

Nous supposerons dans ce paragraphe que $q \geq 3$ car le groupe $\mathrm{SO}_0(2, 2)$ est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et sera traité au §7 (pour des généralités sur les groupes classiques, on pourra consulter [18, 22]).

Nous fixons toujours un réseau Γ dans $\mathrm{SO}_0(2,q)$ et un homomorphisme $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. Nous supposons par l'absurde que $\phi(\Gamma)$ ne préserve aucune mesure de probabilité sur le cercle.

Un sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}^{2+q}$ est *isotrope* si la forme Q est nulle sur E. Les sous-espaces isotropes de dimension maximale sont de dimension 2. On note *Dr* l'espace des drapeaux isotropes c'est-à-dire l'espace des couples formés d'une droite isotrope E_1 et d'un plan isotrope E_2 la contenant. On dispose de deux projections pr_1 et pr_2 de *Dr* respectivement sur l'espace des droites isotropes et des plans isotropes.

On vérifie d'abord que $\mathrm{SO}_0(2,q)$ opère transitivement sur *Dr* ainsi que sur les couples de drapeaux isotropes génériques, avec un stabilisateur non compact. Notons e_i ($i = 1, \cdots, q+2$) les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^{2+q}$. La droite $[e_1+e_3]$ engendrée par e_1+e_3 et le plan $[e_1+e_3, e_2+e_4]$ engendré par e_1+e_3, e_2+e_4 sont isotropes. On vérifie que le stabilisateur P du drapeau $[e_1+e_3] \subset [e_1+e_3, e_2+e_4]$ est une extension d'un groupe compact par un groupe résoluble. C'est donc un groupe moyennable et on peut appliquer la méthode de Furstenberg. On obtient donc une application équivariante $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1_k$ pour un certain entier k.

Les fibres de pr_2 sont des droites projectives réelles (donc topologiquement des cercles). La fibre de pr_2 au dessus d'un plan est en effet l'espace des droites contenues dans ce plan. On remarquera qu'un plan isotrope se projette bijectivement sur $\mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{2+q}$; il hérite donc de l'orientation de $\mathbf{R}^2$. Ces orientations sont invariantes par l'action du groupe connexe $\mathrm{SO}_0(2,q)$. Ainsi, les fibres de pr_2 sont des cercles orientés.

La fibre de pr_1 au dessus de $[e_1+e_3]$ est l'espace des plans isotropes contenant $[e_1+e_3]$, c'est-à-dire des droites isotropes contenues dans $[e_1+e_3]^\perp/[e_1+e_3]$ qui est un espace de dimension q muni d'une forme de signature $(1, q-1)$ et dont l'espace des droites isotropes constitue une sphère de dimension $q-2$, bord de l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{R}}$ de dimension $q-1$.

Soit X_1 (*resp.* X_2) l'espace des triplets de drapeaux distincts qui ont la même projection par pr_1 (*resp.* pr_2).

Il résulte de notre observation sur l'orientation des fibres de pr_2 que $\mathrm{SO}_0(2,q)$ n'opère pas transitivement sur X_2 : un problème analogue à celui que nous avons rencontré dans le cas symplectique.

Soit $P_1 \subset \mathrm{SO}_0(2,q)$ le stabilisateur de $[e_1+e_3]$. Par restriction à $[e_1+e_3]^\perp/[e_1+e_3]$, on obtient un homomorphisme de P_1 vers $\mathrm{O}(1, q-1)$. On vérifie qu'il est surjectif et que son noyau est non compact. Le groupe d'isométries (directes ou indirectes) de l'espace $\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{R}}$ opère transitivement sur les triplets de points distincts de son bord (remarquons en passant que le groupe des isométries *directes* opère également transitivement sur ces triplets dès que la dimension $q-1 \geq 3$). On en déduit que $\mathrm{SO}_0(2,q)$ opère transitivement sur X_1 avec un stabilisateur non compact.

L'application Ψ est donc constante sur les fibres de pr_1. Soit Λ l'espace des droites isotropes dans $\mathbf{R}^{2+q}$. Nous disposons donc d'une application équivariante, toujours notée Ψ, de Λ vers $\mathbf{S}^1_k$. Soit $\Psi^{(3)} : \Lambda^3 \to \mathbf{S}^1_k$ l'application associée sur les triplets.

Soient L_1, L_2, L_3 trois éléments génériques de Λ. La signature de la restriction de la forme Q au sous-espace de dimension 3 engendré par ces trois droites est $(2, 1)$ ou $(1, 2)$. Soit Y_0 l'ouvert constitué des triplets de droites tels que cette signature soit $(1, 2)$. On vérifie facilement que $\mathrm{SO}_0(2, q)$ opère transitivement sur Y_0 avec un stabilisateur non compact. Toujours par le même argument, l'image par $\Psi^{(3)}$ de presque tout triplet de Y_0 est constituée de trois parties identiques de $\mathbf{S}^1_k$. Puisque pour tout couple générique de droites isotropes (L_1, L_2), il existe un ouvert non vide constitué de plans L_3 tels que $(L_1, L_2, L_3) \in Y_0$, on en déduit que Ψ est constante presque partout.

Ceci termine la démonstration du théorème pour le cas de $\mathrm{SO}_0(2, q)$. On règlerait d'ailleurs de la même manière le cas général des groupes orthogonaux $\mathrm{SO}(p, q)$.

7 Le cas de PSL(2, R) $\times$ PSL(2, R)

Nous abordons un cas différent des précédents puisqu'un réseau irréductible de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ peut effectivement opérer sur le cercle de manière non triviale ; il suffit de faire suivre le plongement de Γ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ par une projection sur l'un des deux facteurs et de faire agir projectivement $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur la droite projective $\mathbf{RP}^1 \simeq \mathbf{S}^1$. Le but de ce paragraphe est de montrer que ces actions sont les seules, à revêtements finis près et à semi-conjugaison près.

Nous fixons donc un réseau irréductible Γ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et un homomorphisme $\phi : \Gamma \to \mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbf{S}^1)$. Nous allons montrer le théorème 3.1 dans ce cas, c'est-à-dire que $\phi(\Gamma)$ préserve une mesure de probabilité ou bien ϕ est semi-conjugué à un revêtement fini d'une action du type décrit plus haut. *Nous supposons dorénavant que $\phi(\Gamma)$ ne préserve aucune probabilité.*

Le stabilisateur d'un point de $\mathbf{RP}^1 \simeq \mathbf{S^1}$ sous l'action projective de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est le groupe résoluble des matrices triangulaires supérieures. Le stabilisateur d'un point de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ sous l'action produit de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est donc lui aussi résoluble. Le stabilisateur d'un couple de points génériques est abélien non compact ; l'action de Γ sur les couples d'éléments de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ est donc ergodique. On peut donc construire une application mesurable, définie presque partout et équivariante $\Psi : \mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{S}^1_k$ pour un certain entier k. *Nous nous proposons de montrer que Ψ est constante sur les fibres de l'une des projections de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ sur l'un des facteurs.*

Soit X l'espace des triplets d'éléments distincts de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ qui ont la même projection sur le second facteur. Une différence importante avec les situations précédentes est que $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ n'agit pas transitivement sur X : il y a deux orbites X_+ et X_- qui correspondent aux triplets positivement ou négativement ordonnés sur le premier facteur (par rapport à une orientation arbitrairement choisie sur $\mathbf{RP}^1$). Le stabilisateur d'un point dans $X_\pm$ est clairement non compact : le réseau Γ agit donc ergodiquement sur chacune de ces deux composantes $X_\pm$.

Soit $\Psi^{(3)} : X \to (\mathbf{S}^1_k)^3$ l'application associée à Ψ. Supposons d'abord que $k = 1$, c'est-à-dire que Ψ est à valeurs dans le cercle. Nous avons déjà observé que les triplets de points du cercle peuvent être regroupés en plusieurs parties invariantes suivant qu'ils contiennent $1, 2$ ou 3 points distincts et leur ordre cyclique. Les images réciproques de ces parties par $\Psi^{(3)}$ sont invariantes par Γ. Puisque nous savons que l'action de Γ sur X a exactement deux composantes ergodiques, il en résulte qu'il existe une partie mesurable Ω de mesure totale dans X telle $\Psi^{(3)}$ est contenu dans une ou deux de ces parties. De même que plus haut, on remarque que $\Psi^{(3)}$ est en fait équivariante sous les actions naturelles de $\Gamma \times \Sigma_3$ où Σ_3 désigne toujours le groupe symétrique.

La réunion de ces deux parties doit être invariante sous l'action de Σ_3. Il n'y a que trois possibilités :

i) ou bien l'image de $\Psi^{(3)}$ est contenue dans l'ensemble des triplets de la forme (x, x, x). Ceci signifie que Ψ est constante sur presque toutes les fibres de la deuxième projection de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ sur $\mathbf{RP}^1$.

ii) ou bien $\Psi^{(3)}$ envoie presque tout X_+ (*resp.* X_-) dans l'ensemble des triplets de points distincts positivement (*resp.* négativement) ordonnés.

iii) ou bien $\Psi^{(3)}$ envoie presque tout X_+ (*resp.* X_-) dans l'ensemble des triplets de points distincts négativement (*resp.* positivement) ordonnés.

Bien sûr le cas iii) se ramène au cas ii) en renversant l'orientation de $\mathbf{RP}^1$. En appliquant le même argument à la seconde projection, et en rappelant que nous avons supposé que Ψ n'est pas constante presque partout, on obtient finalement les possibilités suivantes.

1) ou bien la restriction de Ψ à presque chaque fibre $\mathbf{RP}^1 \times \{y\}$ est injective et respecte l'ordre cyclique.

2) ou bien Ψ transite à travers la projection sur le second facteur, *i.e.* est de la forme $\Psi(x, y) = \overline{\Psi}(y)$ où $\overline{\Psi} : \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{S}^1$ respecte l'ordre cyclique.

Plaçons-nous dans le cas 1). *Nous allons montrer que l'application Ψ transite alors à travers la projection sur le premier facteur*. Si $((x_1, y), (x_2, y), (x_3, y))$ est un point de X_+, il existe une unique application projective $u : \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{RP}^1 \times \{y\}$ qui envoie trois points donnés, par exemple $0, 1$ et ∞, sur $(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)$. Munissons $\mathbf{RP}^1$ d'une mesure de Lebesgue, par exemple celle qui est invariante par l'action de $\mathrm{SO}(2)$ et que nous notons $d\theta$. Ainsi, pour chaque point de X_+, on peut considérer la mesure sur le cercle $(\Psi \circ u)_*(d\theta)$ (bien définie pour presque tout y). Ceci nous permet donc de définir une application $g : X_+ \to \mathit{Prob}(\mathbf{S}^1)$ bien sûr équivariante sous les actions de Γ à la source et au but. Puisque Ψ est injective sur presque toutes les fibres $\mathbf{RP}^1 \times \{y\}$, cette application g est à valeurs dans les mesures sans atomes. Soit Y l'espace des couples d'éléments de X_+ qui ont même projection sur le premier facteur, c'est-à-dire de la forme

$\{x_1, x_2, x_3\} \times \{y_1, y_2\}$ avec (x_1, x_2, x_3) positivement ordonnés et y_1, y_2 distincts. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ agit transitivement sur Y avec un stabilisateur non compact : Γ agit donc ergodiquement sur Y. On procède alors exactement comme au paragraphe 4.2. Pour presque tout $\{x_1, x_2, x_3\} \times \{y_1, y_2\}$ de Y, on dispose des deux mesures $g(((x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1)))$ et $g(((x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2)))$. En utilisant la fonctionnelle $D(\mu_1, \mu_2)$ que nous avons définie en 4.2 et grâce a l'ergodicité de Γ sur Y, on montre que pour presque tout élément de Y, ces deux mesures ont le même support. Puis, toujours comme en 4.2, on utilise l'existence d'une distance invariante sur $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)/\mathrm{SO}(2)$ pour en déduire que pour presque tout élément de Y, les deux mesures $g(((x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1)))$ et $g(((x_1, y_2), (x_2, y_2),$ $(x_3, y_2)))$ sont égales. Cela signifie que la fonction $\Psi(x, y)$ ne dépend presque partout que de la première coordonnée et c'est précisément ce que nous voulions montrer.

Ainsi, quitte à renverser les rôles des deux facteurs, on peut toujours se ramener au cas 2).

L'application $\overline{\Psi}$ permet de définir la semi-conjugaison annoncée entre ϕ et l'action projective de Γ sur le cercle obtenue en projetant sur l'un des facteurs $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. En effet, le fait que $\overline{\Psi}$ préserve l'ordre cyclique de presque tout triplet signifie que pour presque tout couple de points (x, y) dans $\mathbf{RP}^1$, l'image de presque tout point de l'intervalle positif joignant x à y est contenue dans l'intervalle positif joignant $\overline{\Psi}(x)$ à $\overline{\Psi}(y)$. Soit μ la mesure image directe de la mesure de Lebesgue par $\overline{\Psi}$; c'est une mesure de probabilité sans atome sur le cercle. En intégrant cette mesure, on obtient une application *continue et monotone* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{RP}^1$ telle que $f \circ \overline{\Psi}$ est l'identité presque partout. Il est clair que f est une semi-conjugaison topologique entre ϕ et l'action projective de Γ sur $\mathbf{RP}^1$.

Ceci établit le théorème sous l'hypothèse $k = 1$.

Lorsque $k > 1$, nous allons devoir discuter de l'ordre cyclique des triplets d'éléments de $\mathbf{S}^1_k$.

Partageons l'espace $(\mathbf{S}^1_k)^2$ des couples de parties à k éléments en un nombre fini de classes d'équivalence pour la relation d'équivalence "même ordre cyclique" : $(A_1, A_2) \in (\mathbf{S}^1_k)^2$ est équivalent à (A'_1, A'_2) s'il existe un homéomorphisme h du cercle qui respecte l'orientation tel que $h(A_1) = A'_1$ et $h(A_2) = A'_2$.

Puisque Γ agit ergodiquement sur les couples d'éléments de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ qui ont même projection sur le deuxième facteur, il existe un élément $(A_1, A_2) \in (\mathbf{S}^1_k)^2$ tel que pour presque tout $(x_1, x_2, y) \in (\mathbf{RP}^1)^2 \times \mathbf{RP}^1$ le couple $(\Psi(x_1, y), \Psi(x_2, y)) \in (\mathbf{S}^1_k)^2$ a le même ordre cyclique que (A_1, A_2).

Soit A la réunion de A_1 et de A_2 : c'est un ensemble ayant N éléments $(k \le N \le 2k)$ cycliquement ordonné par son plongement dans le cercle. Soit $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ de groupe des permutations cycliques de A qui préservent A_1 et A_2. Sur chaque ensemble A_1 et A_2, on obtient également un groupe cyclique d'ordre l de permutations cycliques de leurs k éléments. En particulier l divise k.

Considérons maintenant un point de X, c'est-à-dire un triplet de points de la forme $((x_1, y), (x_2, y), (x_3, y))$. Nous savons que pour un ensemble de mesure totale, les couples $(\Psi(x_1, y), \Psi(x_2, y)) \in (\mathbf{S}^1_k)^2$ et $(\Psi(x_1, y), \Psi(x_3, y)) \in (\mathbf{S}^1_k)^2$ ont tous les deux l'ordre cyclique de (A_1, A_2). On a donc deux homéomorphismes du cercle respectant l'orientation h_1 et h_2 tels que :

i) $h_1(\Psi(x_1, y)) = A_1$ et $h_1(\Psi(x_2, y)) = A_2$

ii) $h_2(\Psi(x_1, y)) = A_1$ et $h_2(\Psi(x_3, y)) = A_2$.

Les homéomorphismes h_1 et h_2 sont bien définis modulo des homéomorphismes qui respectent A_1 et A_2, qui sur A induisent une permutation cyclique de $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. L'homéomorphisme $h_2 \circ h_1^{-1}$ préserve A_1, il y induit donc une permutation cyclique des k éléments de A_1, bien définie modulo le groupe cyclique $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. Finalement, nous avons associé à un point de X un élément de $\mathbf{Z}/(k/l)\mathbf{Z}$ qui est invariant sous l'action de Γ et qui se change en son opposé lorsqu'on permute x_2 et x_3. Puisque Γ agit ergodiquement sur X_+, cet invariant ne peut prendre que deux valeurs.

Supposons qu'il ne prenne qu'une valeur et choisissons une orbite $B \subset A_1$ d'un point de A_1 sous l'action de $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. Alors, $h_1^{-1}(B) \subset \Psi(x_1, y)$ est un ensemble à l éléments indépendant du choix de x_2 et x_3. Cela signifie qu'il est possible de définir $\overline{\Psi} : \mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{S}^1_l$ en envoyant (x_1, y) sur $h^{-1}(B)$. C'est une nouvelle application équivariante. En d'autres termes, quitte à redéfinir Ψ, on peut toujours supposer que $k = l$. L'ensemble A, qui a au plus $2k$ éléments, est donc invariant par une permutation cyclique d'ordre k qui respecte chacune des parties A_1 et A_2 qui ont chacune k éléments. Il y a donc deux solutions :

- ou bien $A = A_1 = A_2$, ce qui signifie que pour presque tout couple $((x_1, y), (x_2, y))$ on a $\Psi(x_1, y) = \Psi(x_2, y)$, c'est-à-dire que Ψ transite à travers la deuxième projection de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ sur $\mathbf{RP}^1$.

- ou bien A a $2k$ éléments et A_1 et A_2 alternent sur le cercle. Autrement dit, nous avons établi dans ce cas que pour presque tout y, l'application $x \in \mathbf{RP}^1 \mapsto \mathbf{S}^1_k$ est presque partout injective et que l'image de presque tout couple est formée d'ensembles qui alternent sur le cercle.

Si trois parties disjointes (B_1, B_2, B_3) à k éléments du cercle alternent deux à deux, on peut dire que ce triplet est positivement ordonné s'il existe un intervalle positivement orienté qui joint un point de B_1 à un point de B_2 et qui ne contient aucun point de B_3. Cette relation a toutes les propriétés d'un ordre cyclique. On remarquera par ailleurs que si $f : \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{S}^1_k$ est une application mesurable et si ν est une probabilité sur $\mathbf{RP}^1$, on peut définir une mesure sur le cercle de masse totale k, “image directe” de ν par f, notée $f_*(\nu)$. On remarquera également que si f envoie trois points positivement ordonnés sur trois parties positivement ordonnées et si $d\theta$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{RP}^1$, la mesure $f_*(d\theta)$ n'a pas d'atome et, en l'intégrant, on construit une application $h : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{RP}^1$, continue, localement monotone, et de degré k. La démonstration pour le cas $k = 1$ s'adapte donc sans difficulté dans le cas général et donne la semi-conjugaison cherchée.

Il reste encore à comprendre le cas où l'invariant prend deux valeurs. De la même manière que précédemment, cela signifie qu'on peut redéfinir Ψ de telle sorte que $k = 2l$. L'ensemble cycliquement ordonné A a au plus $2k = 4l$ éléments, il est réunion de deux parties à k éléments et le groupe des permutations cycliques de A qui préservent chacune de ces parties a exactement l éléments. Il y a deux possibilités.

i) A contient $3l$ éléments et $A_1 \cap A_2$ en contient l. Lorsque l'on parcourt cycliquement A, les points appartiennent successivement à A_1, $A_1 \cap A_2$, A_2, $A_1, \cdots$. Ceci n'est pas possible puisque, par ergodicité, nous savons que les couples (A_1, A_2) et (A_2, A_1) ont le même ordre cyclique, ce qui n'est pas le cas dans cet exemple.

ii) A contient $4l$ points et A_1 et A_2 sont disjoints. Lorsque l'on parcourt cycliquement les $4l$ points de A, on rencontre successivement $A_1, A_1, A_2, A_2, A_1, A_1, \cdots$. Considérons un triplet générique de X_+ et considérons les trois parties B_1, B_2, B_3 à k éléments qui leur sont associées et considérons l'ordre cyclique de la réunion $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Par ergodicité, nous savons que (B_1, B_2, B_3) et (B_2, B_3, B_1) ont le même ordre cyclique et nous supposons que chacun des couples (B_1, B_2), (B_2, B_3), (B_3, B_1) ont l'ordre cyclique $A_1, A_1, A_2, A_2, A_1, A_1, \cdots$. La seule possibilité est que B possède $3k$ éléments et que lorsque l'on parcourt cycliquement B, on rencontre successivement des points de $B_1, B_1, B_2, B_2, B_3, B_3, B_1, B_1, \cdots$. Soit (x_1, y) un point générique de $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ et considérons l'ensemble $\Psi(x_1, y)$ à $2l$ éléments. Si l'on prend un autre point générique x_2 du cercle, on peut aussi considérer $\Psi(x_2, y)$ et nous connaissons l'ordre cyclique de ces deux ensembles. Ceci permet de choisir une partie à l éléments dans $\Psi(x_1, y)$: on ne retient que les points qui sont l'origine d'un intervalle positif d'extrémités dans $\Psi(x_1, y)$ et qui ne rencontrent pas $\Psi(x_2, y)$. Autrement dit, puisque les éléments de B viennent par paires lorsque l'on parcourt le cercle, on ne retient que le premier de chaque paire. Nos considérations précédentes sur l'ordre cyclique de trois parties montrent que ce choix d'une partie de $\Psi(x_1, y)$ est indépendant du second point générique x_2 choisi. Ainsi, on pouvait définir une autre application Ψ à valeurs dans les parties à l éléments, c'est-à-dire que nous nous sommes ramenés au cas $k = l$ que nous avons déjà traité.

Cette étude combinatoire (un peu désagréable) termine la démonstration du théorème dans le cas de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

8 Le cas des groupes unitaires

On considère maintenant la forme hermitienne Q dans $\mathbf{C}^{2+q}$:

$$Q(z_1, \cdots, z_{q+2}) = -|z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_3|^2 \cdots + |z_{q+2}|^2.$$

Le sous-groupe de $\mathrm{SL}(q + 2, \mathbf{C})$ préservant cette forme est le groupe de Lie simple connexe $\mathrm{SU}(2, q)$ dont le rang réel est 2. Nous supposerons que

$q \geq 3$ car $\mathrm{SU}(2,2)$ est localement isomorphe à $\mathrm{SO}_0(2,4)$ que nous avons déjà étudié.

Nous fixons un réseau Γ dans $\mathrm{SU}(2,q)$ et un homomorphisme ϕ : $\Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. Nous supposons comme toujours que $\phi(\Gamma)$ ne préserve aucune probabilité.

Un sous-espace vectoriel (complexe) E de $\mathbf{C}^{2+q}$ est *isotrope* si la forme Q est nulle sur E. Les sous-espaces isotropes de dimension maximale sont de dimension 2.

On note *Dr* l'espace des drapeaux isotropes c'est-à-dire l'espace des couples formés d'une droite isotrope E_1 et d'un plan isotrope E_2 la contenant. On dispose de deux projections pr_1 et pr_2 de *Dr* respectivement sur l'espace des droites isotropes et des plans isotropes. Soient X_1 (*resp.* X_2) l'espace des triplets de drapeaux distincts qui ont la même projection par pr_1 (*resp.* pr_2).

On vérifie d'abord que $\mathrm{SU}(2,q)$ opère transitivement sur *Dr* ainsi que sur les couples de drapeaux génériques, avec stabilisateurs non compacts. Notons e_i ($i = 1, \cdots, q+2$) les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{C}^{q+2}$. La droite $[e_1+e_3]$ engendrée par e_1+e_3 et le plan $[e_1+e_3, e_2+e_4]$ engendré par e_1+e_3, e_2+e_4 sont isotropes.

On vérifie ensuite que le stabilisateur P du drapeau $[e_1+e_3] \subset [e_1+e_3, e_2+e_4]$ est une extension d'un groupe compact par un groupe résoluble, donc un groupe moyennable. On obtient donc encore une application équivariante $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1_k$ pour un certain entier k.

Les fibres de pr_2 sont des droites projectives complexes (donc topologiquement des sphères). La fibre de pr_2 au dessus d'un plan est en effet l'espace des droites de ce plan.

La fibre de pr_1 au dessus de $[e_1+e_3]$ est l'espace des plans isotropes contenant $[e_1+e_3]$, c'est-à-dire des droites isotropes contenues dans $[e_1+e_3]^\perp/[e_1+e_3]$ qui est un espace de dimension complexe q muni d'une forme hermitienne de signature $(1, q-1)$ et dont l'espace des droites isotropes constitue une sphère de dimension réelle $2q-3$; c'est le bord $\partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$ de l'espace hyperbolique complexe de dimension $q-1$.

Soit $P_1 \subset \mathrm{SU}(2,q)$ le stabilisateur de $[e_1+e_3, e_2+e_4]$. Par restriction à $[e_1+e_3, e_2+e_4]$, on obtient un homomorphisme de P_1 vers $\mathrm{GL}([e_1+e_3, e_2+e_4]) \simeq \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$. On vérifie qu'il est à noyau non compact et que son image consiste en les matrices de déterminant réel ; cette image opère donc transitivement sur les triplets de droites distinctes de $\mathbf{C}^2$ (car $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ opère transitivement sur les triplets de points distincts de la droite projective complexe).

Soit $P_2 \subset \mathrm{SU}(2,q)$ le stabilisateur de $[e_1+e_3]$. Par restriction à $[e_1+e_3]^\perp/[e_1+e_3]$, on obtient un homomorphisme de P_2 vers $\mathrm{U}(1, q-1)$.

La différence fondamentale avec le cas de $\mathrm{S0}_0(2,q)$ est que *le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique complexe de dimension complexe au moins* 2 *n'opère pas transitivement sur les triplets de points distincts du bord.* Voir par exemple [13] pour une description géométrique de ce phénomène. Les orbites ne sont plus ouvertes : on peut associer à un tel triplet un invariant (de Cartan) prenant ses valeurs dans le cercle. Autrement dit le groupe $\mathrm{SU}(2, q)$ n'opère pas transitivement sur X_1 bien que le stabilisateur soit non compact.

On ne peut donc pas appliquer le théorème de Moore et l'argumentation précédente ne s'applique plus pour montrer que Ψ est constante sur presque toute fibre de la projection pr_1 ! Bien sûr l'argument s'applique encore sans problème pour la projection pr_2, c'est-à-dire que l'image par Ψ d'un drapeau isotrope $E_1 \subset E_2$ ne dépend en fait que du plan E_2.

Même si le groupe $\mathrm{SU}(2, q)$ n'opère plus transitivement sur X_1 on peut cependant appliquer le théorème de Moore sur chaque orbite de $\mathrm{SU}(2, q)$ sur X_1. On en déduit que toute fonction Γ invariante sur X_1 est également $\mathrm{SU}(2, q)$ invariante.

Reprenons l'application $\Psi^{(3)} : X_1 \to (\mathbf{S}^1_k)^3$. Nous pouvons associer à chaque élément de X_1 l'ordre cyclique de son image par $\Psi^{(3)}$. C'est une fonction invariante par Γ et donc par $\mathrm{SU}(2, q)$. Une fibre générique de pr_1 est le bord $\partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$ de l'espace hyperbolique complexe de dimension $q - 1$. Par restriction, nous disposons d'une application mesurable $\Psi : \partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{S}^1_k$ et nous savons que pour toute isométrie directe g de $\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$, pour presque tout triplet (x_1, x_2, x_3) de $\partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$, l'ordre cyclique de $(\Psi(g(x_1)), \Psi(g(x_2)), \Psi(g(x_3)))$ est le même que celui de $(\Psi(x_1), \Psi(x_2), \Psi(x_3))$. Le lemme suivant montre que cette situation est impossible.

Lemme 8.1 *Soit* $\Psi : \partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{S}^1_k$ $(q - 1 \geq 2)$ *une application mesurable telle que pour toute isométrie directe* g *de* $\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$*, pour presque tout triplet* (x_1, x_2, x_3) *de* $\partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$*, l'ordre cyclique de* $(\Psi(g(x_1)), \Psi(g(x_2)), \Psi(g(x_3)))$ *est le même que celui de* $(\Psi(x_1), \Psi(x_2), \Psi(x_3))$*. Alors* Ψ *est constante presque partout.*

On remarquera que nous avons déjà montré l'énoncé analogue pour le cas de l'espace hyperbolique réel de dimension au moins 3 puisque le groupe d'isométries directes de cet espace opère transitivement sur les triplets de points distincts.

Pour montrer le lemme, supposons d'abord $k = 1$. Supposons par l'absurde que Ψ n'est pas constante presque partout. On remarque d'abord que l'image directe par Ψ de la mesure de Lebesgue de $\partial\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$ est une mesure sans atome sur le cercle car dans le cas contraire Ψ serait constante sur une partie de mesure positive et donc presque partout par notre hypothèse. Quitte à composer Ψ avec une application continue, de degré 1, croissante au sens large, du cercle dans lui même, on peut donc supposer que Ψ envoie la mesure de Lebesgue sur celle du cercle. D'après l'hypothèse, pour chaque isométrie directe g de $\mathbf{H}^{q-1}_{\mathbf{C}}$, il existe une application $\theta(g)$ du cercle dans lui même qui préserve l'ordre cyclique du cercle et telle que $\Psi(g(x)) = \theta(g)(\Psi(x))$ pour presque tout x. Il en résulte que $\theta(g)$ coïncide presque partout avec un homéomorphisme du cercle respectant l'orientation. Donc θ définit une action non triviale du groupe $\mathrm{SU}(1, q-1)$ sur le cercle par homéomorphismes. C'est bien sûr impossible.

Pour le cas $k > 1$, on remarque que le bord $\partial \mathbf{H}_{\mathbf{C}}^{q-1}$ contient des cercles remarquables qui sont les bords des plans totalement géodésiques qui sont des sous-variétés complexes de dimension complexe 1 (les "droites complexes"). Deux points distincts du bord appartiennent à un unique cercle de ce type. Le stabilisateur d'un tel cercle est une copie de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ contenue dans le groupe d'isométries de $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^{q-1}$. L'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur ce cercle est bien sûr l'action projective sur la droite projective réelle $\mathbf{RP}^1$. Par restriction à un tel cercle générique, on obtient donc une application $\Psi : \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{S}_k^1$ telle que pour presque tout g de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et presque tout triplet (x_1, x_2, x_3) de $\mathbf{RP}^1$ l'ordre cyclique de $(\Psi(g(x_1)), \Psi(g(x_2)), \Psi(g(x_3)))$ est le même que celui de $(\Psi(x_1), \Psi(x_2), \Psi(x_3))$. Nous avons vu au §7 que si Ψ n'est pas constant sur ces cercles, alors, quitte à redéfinir Ψ, on peut supposer que les parties $\Psi(x_1)$ et $\Psi(x_2)$ alternent sur le cercle. L'argument présenté pour $k = 1$ s'adapte alors facilement.

On remarquera que le même argument s'applique pour le bord des espaces hyperboliques quaternioniques. Ainsi le théorème est établi non seulement pour les groupes $\mathrm{SU}(2, q)$ mais aussi les groupes d'isométries des formes quadratiques quaternioniques $\mathrm{Sp}(2, q)$ $(q \geq 2)$. La preuve pourrait aussi se généraliser immédiatement aux autres groupes $\mathrm{SU}(p, q)$ et $\mathrm{Sp}(p, q)$.

9 Le cas "presque" général

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 3.1 dans le cas d'un *groupe de Lie semi-simple connexe G sans facteur compact et de rang réel supérieur ou égal à 2*. La démonstration consiste à observer que les techniques et les cas particuliers déjà obtenus permettent de conclure.

Nous fixons donc un réseau Γ dans G et un homomorphisme $\phi : \Gamma \to \mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbf{S}^1)$ et nous supposons que $\phi(\Gamma)$ ne préserve aucune mesure de probabilité.

Commençons par une remarque élémentaire.

Remarque 9.1 Soit $1 \to \Delta \to \Gamma_1 \to \Gamma_2 \to 1$ une suite exacte avec Δ fini et soit $\phi_1 : \Gamma_1 \to \mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbf{S}^1)$ un homomorphisme. Alors l'image $\phi_1(\Delta)$ est un groupe fini cyclique agissant librement sur le cercle, le quotient $\mathbf{S}^1/\phi_1(\Delta)$ est un cercle $\mathbf{S}'^1$ et on a un homomorphisme naturel $\phi_2 : \Gamma_2 \to \mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbf{S}'^1)$.

En particulier, si un groupe de Lie semi-simple G_1 est un revêtement fini de G_2 et si Γ_1 est un réseau de G_1 qui se projette sur le réseau Γ_2 de G_2, il est équivalent d'établir le théorème 3.1 pour Γ_1 et pour Γ_2.

Fixons quelques notations classiques (voir par exemple [19,22] ou encore [5] pour un exposé plus géométrique). L'algèbre de Lie de G est notée $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre abélienne maximale telle que $ad(\mathfrak{A})$ est

R-diagonalisable. On a alors une décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_0 \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{G}_\lambda$$

où Σ est une partie finie du dual $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{G}_\lambda$ pour $\lambda \in \Phi \cup \{0\}$ désigne le sous-espace propre $\{x \in \mathfrak{G} : [a, x] = \lambda(a)(x)(a \in \mathfrak{A})\}$. Cette décomposition est la décomposition en racines relative à $\mathfrak{A}$ (voir par exemple [19, 22]). On fixe un ordre sur $\mathfrak{A}$ et on note Σ^+ et Σ^- et Π les racines respectivement positives et négatives et simples. Si $\theta \subset \Pi$ on note $[\theta]$ l'ensemble des racines qui sont des combinaisons linéaires entières des éléments de θ et on considère la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{P}_\theta$ engendrée par les sous espaces $\mathfrak{G}_\lambda$ avec $\lambda \in [\theta] \cup \Sigma_+$. On note P_θ le normalisateur dans G du sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{P}_\theta$. Les sous-groupes P_θ sont les *sous-groupes paraboliques standards.* Le groupe $P_\emptyset$ est un sous-groupe parabolique minimal ; c'est une extension compacte d'un groupe résoluble, donc moyennable [19, IV 4.4, p. 164]. Si $\theta_1 \subset \theta_2$, on a bien sûr $P_{\theta_1} \subset P_{\theta_2}$.

On note $Dr = G/P_\emptyset$. Le groupe G opère transitivement sur les couples de points génériques de Dr, avec un stabilisateur non compact (qui est un sous-groupe de Cartan). Comme nous l'avons vu, il existe un entier k et une application mesurable équivariante $\Psi : Dr \to \mathbf{S}^1_k$, définie presque partout que nous supposerons non constante presque partout. Un théorème important de Margulis affirme qu'il existe θ tel que Ψ se factorise à travers la projection naturelle de Dr sur G/P_θ et que l'application obtenue de G/P_θ vers $\mathbf{S}^1_k$ est injective sur une partie de mesure totale [19, IV 2.11]. Nous n'utiliserons pas ce théorème difficile pour garder un caractère "élémentaire" à cet article.

Pour chaque $\lambda \in \Pi$, on considère la projection $pr_\lambda : Dr \to G/P_{\{\lambda\}}$. La fibre au dessus d'un point est isomorphe à S_λ/Q_λ où S_λ est un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1 et Q_λ un sous-groupe parabolique minimal de S_λ. Le groupe S_λ est un facteur de Levi de $P_{\{\lambda\}}$ et Q_λ est l'intersection $S_\lambda \cap P_\emptyset$. Autrement dit, S_λ/Q_λ est identifié au bord d'un espace symétrique de rang 1. On remarque par ailleurs que, puisque le rang réel de G est supposé supérieur ou égal à 2, la surjection de $P_{\{\lambda\}}$ sur S_λ a un noyau non compact. Il en résulte que les stabilisateurs de l'action de $P_{\{\lambda\}}$ sur l'espace des triplets de points distincts de points de S_λ/Q_λ sont non compacts. On remarquera également que les groupes S_λ engendrent G de sorte qu'une fonction constante sur les fibres de toutes les projections pr_λ est constante.

En restriction à presque toute fibre de pr_λ, nous sommes donc précisément dans la situation que nous avons analysée plus haut. Nous avons une application mesurable $\Psi_\lambda : S_\lambda/Q_\lambda \to \mathbf{S}^1_k$ qui a la propriété que pour presque tout $g \in S_\lambda$ et presque tout triplet (x_1, x_2, x_3) de points de S_λ/Q_λ les ordres cycliques de $(\Psi_\lambda(x_1), \Psi_\lambda(x_2), \Psi_\lambda(x_3))$ et de $(\Psi_\lambda(g(x_1)), \Psi_\lambda(g(x_2)), \Psi_\lambda(g(x_3))$ sont les mêmes.

Nous avons vu que si Ψ_λ n'est pas constante presque partout, l'espace S_λ/Q_λ est en fait une droite projective réelle, S_λ est localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et que Ψ_λ est une application monotone (voir en particulier 8.1

et la remarque qui suit). Ainsi, *dès qu'une racine simple* $\lambda \in \Pi$ *est telle que* $\dim S_\lambda/Q_\lambda > 1$, *nous pouvons déduire que* Ψ *est constante sur les fibres de* pr_λ.

Observons d'abord que nous avons déjà traité presque tous les cas de rang réel 2. En consultant la liste des groupes semi-simples réels (par exemple dans [18, 22]), on constatera que les seuls groupes simples que nous n'avons pas examinés sont $SO^*(5)$, EIII, EIV et G_2. Nous aurions d'ailleurs pu les examiner directement de la même manière. Pour ces groupes, les deux dimensions $\dim S_\lambda/Q_\lambda$ sont respectivement (4,5), (6, 9), (8,8) et (1,1). Il y a encore le cas du produit de deux groupes de rangs 1. Si les deux facteurs ne sont pas localement isomorphes à $PSL(2, \mathbf{R})$, l'application Ψ est constante. Si l'un des facteurs est isomorphe à $PSL(2, \mathbf{R})$, l'application Ψ transite à travers une projection de $G/P_\emptyset \to \mathbf{RP}^1$ et nous pouvons conclure. Enfin, nous avons examiné le cas $PSL(2, \mathbf{R}) \times PSL(2, \mathbf{R})$.

Parmi les groupes de rang 2, *il nous faut donc encore comprendre le groupe de Lie réel simple déployé* G_2. Dans ce cas, on dispose de deux sous-groupes paraboliques P_1 et P_2 contenant un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset$. Il se trouve que la fibration $pr_1 : G_2/P_\emptyset \to G_2/P_1$ (*resp.* $pr_2 : G_2/P_\emptyset \to G_2/P_2$), dont les fibres sont des cercles, est non orientable : il existe des éléments g_1 (*resp.* g_2) de G_2 qui fixent une fibre de pr_1 (*resp.* pr_2) et qui en renversent l'orientation et nous savons que ceci permet de conclure. Ceci résulte du lemme 2.13 de [28]. Ce lemme montre en particulier que si un groupe de Lie réel simple déployé possède deux racines simples α et β telles que $N_{\alpha,\beta} = 2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\alpha\rangle^2$ est un entier impair, alors la fibration pr_β est non orientable. Nous avons déjà constaté ce fait : les cas que nous avons rencontrés de fibrations orientables correspondent aux racines de longueurs distinctes dans les groupes symplectiques et orthogonaux pour lesquelles cet entier est 2. Dans le cas de G_2, les entiers $N_{\alpha,\beta}$ et $N_{\alpha,\beta}$ sont égaux à 1 et 3 et ceci montre la non orientabilité de ces fibrations.

Le cas où G est de rang réel 2 est donc réglé. On suppose donc maintenant que le rang réel de G est au moins 3.

Considérons l'ensemble $\Pi_0 \subset \Pi$ des racines simples λ telles que Ψ n'est pas constante sur les fibres de pr_λ : c'est une partie non vide car nous supposons que Ψ n'est pas constante. Nous allons montrer que Π_0 contient au plus un élément qui est un point isolé dans le diagramme de Dynkin associé au système de racines Σ. Soient λ_1, λ_2 deux racines simples et pr_{λ_1,λ_2} la projection de Dr sur $G/P_{\{\lambda_1,\lambda_2\}}$. Les fibres de cette projection sont la forme $S_{\lambda_1,\lambda_2}/Q_{\lambda_1,\lambda_2}$ où S_{λ_1,λ_2} est semi-simple de rang 2 et Q_{λ_1,λ_2} est un sous-groupe parabolique minimal de S_{λ_1,λ_2}. Par restriction aux fibres de pr_{λ_1,λ_2}, on a une fonction mesurable $\Psi_{\lambda_1,\lambda_2} : S_{\lambda_1,\lambda_2}/Q_{\lambda_1,\lambda_2} \to \mathbf{S}^1_k$ qui est telle que pour presque tout $g \in S_{\lambda_1,\lambda_2}$, pour presque tout triplet (x_1, x_2, x_3) de points de $S_{\lambda_1,\lambda_2}/Q_{\lambda_1,\lambda_2}$ ayant mêmes projections par $pr_{\lambda_1} : S_{\lambda_1,\lambda_2}/Q_{\lambda_1,\lambda_2} \to S_{\lambda_1}/Q_{\lambda_1}$ (*resp.* pr_{λ_2}), les ordres cycliques de $(\Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(x_1), \Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(x_2), \Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(x_3))$ et de $(\Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(g(x_1)), \Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(g(x_2)), \Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(g(x_3))$ sont les mêmes.

Nous avons montré que ceci n'est possible que si $\Psi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est constante ou si S_{λ_1,λ_2} est un produit de deux groupes simples dont l'un est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ auquel cas $\Psi_{\lambda_1,\lambda_2}$ factorise à travers la projection correspondante sur un cercle et $\Psi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est monotone sur ce cercle. En particulier λ_1, λ_2 ne peuvent appartenir tous les deux à Π_0.

Ainsi Π_0 ne peut contenir qu'un seul élément et cet élément doit correspondre à un facteur simple de G localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et Ψ transite alors à travers une projection de Dr sur $\mathbf{RP}^1$ associée à ce facteur simple. De même qu'en 7, on construit à partir de $\Psi : \mathbf{RP}^1 \to \mathbf{S}^1_k$ une semi-conjugaison topologique entre ϕ et l'action projective de Γ sur $\mathbf{RP}^1$ obtenue en faisant agir Γ en le projetant sur un facteur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

10 Fin de la démonstration du théorème 1.2

Nous devons d'abord nous débarrasser des hypothèses sur les facteurs compacts et sur le centre de G. Ensuite, nous devrons démontrer le complément relatif à la différentiabilité de la semi-conjugaison.

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple, Γ un réseau irréductible de G et $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ un homomorphisme. Soit K le sous-groupe compact connexe distingué maximal de G et $\pi : G \to G'$ la projection naturelle sur le quotient $G' = G/K$. Bien sûr, $\pi(\Gamma) = \Gamma'$ est un réseau de G' et la surjection π de Γ sur Γ' est à noyau fini. D'après la remarque 9.1, il suffit donc de démontrer le théorème pour le réseau Γ' de G' qui n'a pas de facteur compact. Remarquons en passant que le fait qu'il n'existe pas d'homomorphisme non trivial de Γ' dans $\mathbf{Z}$ entraîne qu'il en est de même pour Γ : nous avions déjà utilisé ceci lorsque nous avons montré que le théorème 3.1 implique le théorème 1.1-1.2.

D'après [19, IX 6.18 B], puisque G' n'a pas de facteur compact, Γ' intersecte le centre (discret) $Z(G')$ de G' sur un sous-groupe d'indice fini du centre $Z(\Gamma')$ de Γ' et la projection Γ'' de Γ' dans $G'' = G'/Z(G')$ est un réseau. Le groupe G'' est un groupe de Lie semi-simple connexe, sans facteur compact et de centre trivial, pour lequel nous avons vu que le théorème 1.1-1.2 est vrai. Il nous reste à montrer que la validité du théorème pour le réseau Γ'' de G'' entraîne la même chose pour le réseau Γ' de G'. Ceci résulte du lemme élémentaire suivant.

Lemme 10.1 *Soit* $0 \to A \to \Gamma_1 \to \Gamma_2 \to 1$ *une extension centrale où* A *est abélien de type fini et* $\phi : \Gamma_1 \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ *un homomorphisme. Alors deux cas sont possibles. Ou bien* $\phi(\Gamma_1)$ *préserve une probabilité ou bien* ϕ *est semi-conjugué à un homomorphisme* ϕ' *tel que* $\phi'(A)$ *est un groupe fini cyclique (et définit donc un morphisme* $\phi'' : \Gamma_2 \to \mathit{Homéo}_+(\mathbf{S}'^1)$ *où* $\mathbf{S}'^1$ *est le quotient de* $\mathbf{S}^1$ *par* $\phi(A)$*).*

Démonstration Puisque A est abélien (et donc moyennable), il existe une mesure de probabilité μ sur le cercle invariante par $\phi(A)$.

Si μ possède des atomes, elle n'en possède qu'un nombre fini de masse donnée de sorte que $\phi(A)$ possède une orbite finie. La réunion des orbites de $\phi(A)$ qui ont un cardinal donné est un fermé invariant par $\phi(\Gamma_1)$. On a donc un entier l et un compact $K \subset \mathbf{S}^1$ invariant par $\phi(\Gamma_1)$ et dans lequel les orbites de $\phi(A)$ ont l éléments. Considérons un ensemble minimal K ayant ces propriétés. En considérant ses points d'accumulation, on montre que K est soit un ensemble fini soit un ensemble de Cantor. Dans le premier cas, nous avons trouvé une orbite finie pour $\phi(\Gamma_1)$ et dans le second cas, on peut construire une application $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, continue surjective et de degré 1, qui envoie surjectivement K sur le cercle et dont les fibres sont soit des points de K soit des intervalles fermés, adhérences des composantes du complémentaire de K. On construit alors un homomorphisme $\phi' : \Gamma_1 \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ tel que $\phi'(A)$ soit un groupe fini cyclique.

Si μ n'a pas d'atome, c'est l'unique mesure invariante par $\phi(A)$. La mesure μ est donc également invariante par le groupe $\phi(\Gamma_1)$ car ce groupe commute avec $\phi(A)$. □

Nous démontrons maintenant la dernière partie du théorème 1.2.

Proposition 10.2 *Soit Γ un groupe et ϕ_1, ϕ_2 deux homomorphismes Γ vers le groupe $\mathrm{Diff}^2_+((\mathbf{S}^1)$ des difféomorphismes du cercle de classe C^2 respectant l'orientation. On suppose que $\phi_1(\Gamma)$ contient un élément de nombre de rotation irrationnel ρ. Si ϕ_1 est semi-conjuguée à un revêtement de ϕ_2, alors ϕ_1 est en fait topologiquement conjugué à un revêtement de ϕ_2. Si de plus, ϕ_1, ϕ_2 sont à valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞* (resp. *C^ω) et si ρ satisfait une condition diophantienne de la forme $|q\rho - p| > C|q|^{-\nu}$ (pour des constantes $C > 0$ et $\nu \geq 1$ et pour tous les couples d'entiers (p, q)), alors il s'agit d'une C^∞* (resp. *C^ω)-conjugaison.*

Démonstration Soit k le degré topologique de l'application $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ qui réalise la semi-conjugaison. Pour chaque $\gamma \in \Gamma$, le nombre de rotation de $\phi_2(\gamma)$ est égal à k fois celui de $\phi_1(\gamma)$. D'après le théorème de Denjoy [16], les orbites d'un difféomorphisme de classe C^2 et de nombre de rotation irrationnel sont toutes denses. Les deux groupes $\phi_1(\Gamma)$ et $\phi_2(\Gamma)$ ont donc toutes leurs orbites denses. Il en résulte qu'une semi-conjugaison est en fait une conjugaison topologique car la réunion des intervalles ouverts sur lesquels la semi-conjugaison est constante est un ouvert invariant, donc vide, de sorte qu'une semi-conjugaison est localement injective, c'est-à-dire un revêtement. D'autre part, un difféomorphisme du cercle de classe C^∞ (*resp.* C^ω) dont le nombre de rotation est irrationnel est conjugué à une rotation par un unique homéomorphisme du cercle qui est en fait de classe C^∞ (*resp.* C^ω) si le nombre de rotation satisfait une condition diophantienne décrite ci-dessus [17]. Il en résulte que, sous une telle hypothèse diophantienne, la conjugaison topologique entre les groupes est en fait de classe C^∞ (*resp.* C^ω). □

Pour démontrer le dernier point du théorème 1.2, on remarque d'abord que si Γ est un réseau irréductible dans un groupe de Lie semi-simple G et si $\pi : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est une surjection, l'image $\pi(\Gamma)$ est dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Rappelons par ailleurs qu'un sous-groupe de type fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ dont tous les éléments elliptiques sont d'ordre fini est discret. Par conséquent, $\pi(\Gamma)$ contient des éléments elliptiques d'ordre infini qui agissent donc sur le cercle avec un nombre de rotation irrationnel. Si ϕ est à valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^2, on peut appliquer la proposition et en déduire la semi-conjugaison topologique.

D'autre part, les traces des éléments de $\pi(\Gamma)$ (définies au signe près) sont des nombres algébriques : ceci est une conséquence bien connue de la rigidité des réseaux en rang supérieur (voir par exemple [24, 25]) (mais ceci résulte aussi bien sûr des théorèmes d'arithméticité de Margulis). Il en résulte que les nombres de rotations ρ associés à ces éléments elliptiques sont tels que $\exp(2i\pi\rho)$ est un nombre algébrique. D'après [2, theorem 3.1], ces nombres ρ vérifient les conditions diophantiennes requises. La proposition s'applique donc et la semi-conjugaison du théorème est bien une conjugaison de classe C^∞ (*resp.* C^ω) si ϕ est à valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ (*resp.* C^ω).

Le théorème 1.1-1.2 est donc (enfin !) établi en toute généralité.

11 Conclusion

Les démonstrations que nous venons de présenter montrent clairement que les cas les plus difficiles à traiter sont ceux des groupes symplectiques et pseudo-unitaires. Ceci est dû au fait qu'il s'agit de groupes de Lie simples G dont l'espace symétrique associé est un espace *hermitien* symétrique. Algébriquement cela se traduit par le fait que le second groupe de cohomologie de G est non nul. Géométriquement, cela signifie que le sous-groupe compact maximal K de G n'est pas simplement connexe. Considérons par exemple le cas du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ dont le compact maximal est $\mathrm{U}(r)$ et l'espace symétrique associé est l'espace de Siegel. La classe de cohomologie de degré 2 est la classe de Maslov qui correspond en fait à la forme de Kaehler de l'espace de Siegel. Le groupe $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ opère sur la grassmannienne Λ_r des lagrangiens dans $\mathbf{R}^{2r}$, dont le groupe fondamental est $\mathbf{Z}$. Son revêtement universel $\widetilde{\Lambda}_r$ est muni d'une fibration $\pi : \widetilde{\Lambda}_r \to \mathbf{R}$ dont les fibres sont compactes. Le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2r, \mathbf{R})$ opère donc sur $\widetilde{\Lambda}_r$ en commutant avec le groupe du revêtement, isomorphe à $\mathbf{Z}$; une situation très proche de celle des relevés des homéomorphismes du cercle à la droite. La fibration π n'est pas équivariante sous cette action. Cependant, si $\tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2r, \mathbf{R})$, la projection $\pi(\tilde{g}(\pi^{-1}(x)))$ est un intervalle dont la longueur est *bornée* indépendamment de $\tilde{g}$ et de x. D'une certaine manière, on peut donc dire que $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2r, \mathbf{R})$ "agit presque" sur $\mathbf{R}$; l'"image" d'un point étant un intervalle de taille bornée. On peut encore dire que $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2r, \mathbf{R})$ agit sur une variété quasi-isométrique à $\mathbf{R}$ et que cette action est uniformément quasi-isométrique. Il apparaît donc clairement pourquoi il est plus difficile d'établir que les réseaux de $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$ n'agissent pas sur le cercle puisqu'ils "quasi-agissent" sur le cercle ... On trouvera une description de ce fait dans [1, 3]. Il serait d'ailleurs intéressant de classifier ces actions quasi-isométriques des réseaux. Ces phénomènes se reproduisent pour tous les espaces symétriques hermitiens.

Il n'est probablement pas difficile de généraliser nos résultats aux réseaux des groupes algébriques sur les corps locaux et de trouver d'autres groupes dans le même esprit qui n'agissent pas sur le cercle (non trivialement). Cependant, il est peut-être préférable de proposer la recherche systématique de groupes intéressants qui agissent effectivement ! Par exemple, le groupe de Thompson, étudié en particulier dans [11], agit sur le cercle et présente les caractéristiques d'un réseau dans le "groupe de Lie de dimension infinie" $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{S}^1)$ ...

Bibliographie

1. V. Arnold, Sturm theorem and symplectic geometry, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 251–276
2. A. Baker, Transcendental numbers, Cambridge University Press, (1975)
3. J. Barge, É. Ghys, Cocycles d'Euler et de Maslov, Math. Ann. **294** (1992), 235–265
4. M. Burger, N. Monod, Bounded cohomology of lattices in Lie groups and Hardy spaces, preprint 1998
5. P. Eberlein, Geometry of non positively curved manifolds, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, (1996)
6. B. Farb, P. Shalen, Lattice actions, 3-manifolds, and homology, preprint
7. B. Farb, P. Shalen, Real-analytic actions of lattices, Invent. math. **135**, 273–296 (1999)
8. H. Furstenberg, Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces in Harmonic analysis on homogeneous spaces, Symposia on pure and applied math. Williamstown, Mass 1972, Proc. vol **26** (1973), 193–229
9. É. Ghys, Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), Contemp. Math. **58** III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987), 81–106
10. É. Ghys, Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **24** (1993), 137–178
11. É. Ghys, V. Sergiescu, Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 185–239
12. F. Greenleaf, Invariant means on topological groups and their applications, Van Nostrand (1969)
13. W. Goldman, Complex hyperbolic Kleinian groups, Complex geometry (Osaka, 1990), Lect. Notes Pure Appl. Math. **143**, Dekker, New York, (1993), 31–52
14. P. de la Harpe, A. Valette, La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, Astérisque **175** SMF (1989)
15. I. Kaplansky, Lie algebras and locally compact groups, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, (1971)
16. A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge Uni. Press, (1995)
17. Y. Katznelson, D. Ornstein, The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle, Ergodic Theory Dynamical Systems **9** (1989), 643–680
18. A. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkäuser, Progress in Math. **140**, (1996)
19. G. Margulis, Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups, Springer-Verlag, (1991)
20. G. Mokobodski, Limites médiales, exposé de P.A. Meyer, Séminaire de probabilités, Strasbourg, 1971-72, Springer L.N.M. **321** (1973), 198-204
21. S. Miyoshi, On foliated circle bundles over closed orientable 3-manifolds, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 400-410
22. A. Onishchik, E. Vinberg, Lie groups and algebraic groups, Springer-Verlag, (1990)
23. J. Plante, Solvable groups acting on the line, Trans. Am. Math. Soc. **278** (1983), 401–414

24. A. Selberg, On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Contributions to function theory (Bombay) TIFR (1960), 147–164
25. A. Selberg, Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces. Proceedings of the Fifteenth Scandinavian Congress (Oslo, 1968) Lect. Notes Math., **118** Springer, Berlin, (1970), 99–120
26. W. Thurston, A generalization of the Reeb stability theorem, Topology **13** (1974) 347–352
27. W. Thurston, Three manifolds, foliations and circles, preprint
28. D. Vogan, The unitary dual of G_2, Invent. Math. 116 (1994), 677–791
29. D. Witte, Arithmetic groups of higher **Q**-rank cannot act on 1-manifolds, Proc. Am. Math. Soc. **122** (1994), 333–340
30. R. Zimmer, Ergodic theory and semisimple groups, Birkhäuser, (1984)
31. R. Zimmer, Actions of semisimple groups and discrete groups, Proc. International Cong. Math. Berkeley (1986), 1247–1258