Qu'est-ce qu'un **bon problème ?**

En 1900, à Paris, le mathématicien allemand David Hilbert prononce une conférence devenue célèbre par les 23 problèmes qu'elle contient. Lors de cette intervention, il définit aussi ce qu'est, selon lui, un bon problème.

Étienne GHYS
mathématicien, est directeur de recherche CNRS à l'Unité de Mathématiques pures et appliquées (UMPA) de l'École normale supérieure de Lyon.

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques*: http://images.math.cnrs.fr/ Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisés à le reproduire.

L'ESSENTIEL

- En 1900, lors d'une conférence, David Hilbert dresse la célèbre liste de 23 problèmes.
- Lors de cette conférence, il définit ce qu'est un bon problème.
- La difficulté doit être stimulante, mais pas rebutante. La rigueur doit prévaloir.
- Au final, Hilbert affiche sa conviction: «nous devons savoir, nous saurons».

En août 1897, s'est tenu à Zurich, en Suisse, le premier Congrès international des mathématiciens. Les deux instigateurs, les mathématiciens allemands Felix Klein (1849-1925) et Georg Cantor (1845-1918), réunirent pour l'occasion plus de 200 mathématiciens venant de 16 pays différents. La tradition s'est perpétuée et, tous les quatre ans, le congrès est organisé par l'Union mathématique internationale. Chaque manifestation, qui rassemble désormais plusieurs milliers de mathématiciens, est aujourd'hui ponctuée par la remise de prix: la médaille Fields, décernée la première fois en 1936; le prix Nevanlinna (créé en 1982) qui récompense des travaux mathématiques ayant trait à l'informatique: le prix Gauss dédié depuis 2006 aux mathématiques appliquées.

Lors du dernier congrès, en 2010, à Hyderabad, en Inde, Ngô Báo Châu, Elon Lindenstrauss, Stanislav Smirnov et Cédric Villani ont reçu la médaille Fields, Daniel Spielman le prix Nevanlinna et Yves Meyer le prix Gauss. Le prochain congrès se déroulera à Séoul, en Corée du Sud, en 2014. Intéressons-nous à celui de 1900, à Paris. Il eut un grand retentissement, car il inaugurait le XX[e] siècle (qui ne commença qu'en 1901...) et surtout, car il fut marqué par l'intervention devenue célèbre du mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) intitulée *Sur les problèmes futurs des mathématiques*. Il énonça les 23 grands problèmes ouverts qui devaient guider les mathématiciens du siècle qui s'ouvrait.

En fait, le temps imparti à Hilbert ne lui permit pas d'exprimer l'ensemble des 23 problèmes *(voir l'encadré, page 66)*. En accord avec ses amis Adolf Hurwitz et Hermann Minkowski, il en sélectionna 10. Sa conférence ne fut publiée dans son intégralité qu'en 1902. Nous commenterons ici quelques extraits (la traduction est due à L. Laugel) de l'introduction de cette conférence de façon à donner quelques éléments de réponse à la question: qu'est-ce qu'un bon problème?

De l'importance des problèmes

Hilbert commence ainsi, dans un style qui semble d'une autre époque: «Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la pensée mathématique des générations futures? Quelles seront, dans ce champ, les nouvelles vérités et les nouvelles méthodes découvertes par le siècle qui commence?»

Puis il insiste sur le rôle des problèmes dans le développement des mathématiques: «Le grand rôle joué par des problèmes déterminés dans le progrès général de la Science mathématique est non moins incontestable que l'influence qu'ont ces problèmes sur le travail particulier du chercheur. Tant qu'une branche de la Science jouit d'une abondance de problèmes, elle est pleine de vie; le manque de problèmes dénote la mort, ou la cessation du développement propre de cette branche. Et de même que dans toute entreprise humaine, il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématique il faut des problèmes. La puissance du chercheur se retrempe dans leur résolution, il y trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux points de vue, d'où il découvre un horizon plus vaste et plus libre.»

Un bon problème doit être clair et limpide: «Un mathématicien français du temps passé a dit "Une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on puisse la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue. ” Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée ici d'une théorie mathématique, je l'exigerais encore davantage d'un problème mathématique parfait ; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute. » Dans ce passage, Hilbert fait allusion au géomètre Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) qui fonda en 1810 l'un des premiers journaux mathématiques *Les Annales de mathématiques pures et appliquées*.

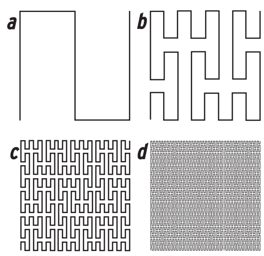
Hilbert poursuit : « Pour avoir de l'attrait, un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts ; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution. »

D'où viennent les bons problèmes ? Souvent, les non-mathématiciens pensent que les mathématiques devraient être appliquées et servir à résoudre des problèmes concrets. Face à un problème de « mathématiques pures », ils se demandent « à quoi ça sert ? ». Selon Hilbert, les choses sont plus subtiles. Certes, les premiers problèmes viennent du monde réel, mais ces problèmes concrets conduisent à d'autres problèmes propres aux mathématiques, *a priori* sans aucune « utilité » directe, ces problèmes purs rejaillissant parfois en retour sur le concret.

De la rigueur avant tout !

Ce qui compte aux yeux du mathématicien allemand est la rigueur : « En effet, la rigueur dans la démonstration, condition aujourd'hui en Mathématiques d'une importance proverbiale, correspond à un besoin philosophique général de notre entendement ; d'autre part, c'est seulement en satisfaisant à cette exigence que les problèmes manifestent complètement leur fécondité et leur portée. Un nouveau problème, lorsqu'il tire son origine du monde extérieur, est comme un sauvageon qui ne se développe et ne porte des fruits que lorsqu'il a été greffé avec tous les soins de l'art du jardinier sur la souche mère, c'est-à-dire sur les connaissances mathématiques que nous possédons complètement. »

DAVID HILBERT, dont le portrait est constitué de courbes portant son nom. Elles sont construites selon la méthode ci-dessous *(de a à d)*.



QUELQUES PROBLÈMES DE HILBERT

Parmi les 23 problèmes listés par Hilbert, en voici certains (non traités par ailleurs dans ce numéro) qui illustrent leur diversité. Le troisième : la méthode euclidienne de décomposition en polyèdres est-elle applicable à tous les volumes ? Max Dehn, élève de Hilbert, montra que non, en 1901. Le quatrième : définir toutes les géométries dont la plus courte distance entre deux points est un segment de droite. George Hamel, un autre élève de Hilbert, a résolu le problème au début du XXe siècle. Le septième : démontrer la transcendance des nombres a^b, quand a est un nombre algébrique (différent de 0 et de 1) et b un nombre irrationnel (par exemple $2^{\sqrt{2}}$). Rappelons qu'un nombre transcendant n'est racine d'aucune équation polynomiale. Les théorèmes de Gelfond-Schneider et de Baker ont répondu. Le treizième : peut-on résoudre une équation algébrique de degré 7 au moyen de fonctions à deux variables ? Andreï Kolmogorov et son élève Vladimir Arnold ont répondu non en 1954. Le dix-septième : une fonction rationnelle positive sur R^n peut-elle s'écrire comme la somme de carrés de fonctions rationnelles ? Oui, selon les travaux de Emil Artin en 1924. Le dix-neuvième : les solutions d'un problème relevant du calcul des variations (système d'équations aux dérivées partielles) sont-elles nécessairement analytiques ? Serge Bernstein et Tibor Rado ont montré en 1929 que c'est bien le cas.

« Ce serait, du reste, une erreur de croire que la rigueur dans la démonstration est l'ennemie de la simplicité. De nombreux exemples, au contraire, montrent que la méthode la plus rigoureuse est aussi la plus simple et la plus facile à saisir. La recherche de la rigueur nous conduit toujours à découvrir des raisonnements plus simples, elle nous ouvre aussi la voie à des méthodes plus fécondes que les anciennes qui étaient moins rigoureuses. »

Faut-il privilégier l'approche qui conduit du général au particulier, ou bien celle inverse ? Hilbert défend ces deux façons de procéder : « Si nous ne pouvons parvenir à résoudre un problème mathématique, la raison en est souvent que nous n'avons pas encore atteint le point de vue le plus général d'où ce problème ne semble plus qu'un anneau d'une chaîne de problèmes de même nature. Mais une fois que nous avons atteint ce point de vue, non seulement le problème devient plus abordable, mais encore nous sommes mis en possession d'une méthode applicable aux problèmes de même espèce.

« D'autre part, à mon avis du moins, la particularisation joue, dans les problèmes mathématiques, un rôle plus important que la généralisation. Quand nous cherchons en vain la réponse à une question, l'insuccès, la plupart du temps, tient peut-être à ce que nous n'avons pas encore résolu ou à ce que nous avons résolu seulement d'une manière incomplète des problèmes plus simples que celui en question. Tout revient alors à trouver des problèmes plus simples et à en obtenir la solution, à l'aide de moyens auxiliaires aussi complets que possible et à l'aide de concepts susceptibles de généralisation. Cette manière de procéder est comme un levier des plus puissants propre à lever les difficultés mathématiques, et c'est de ce levier, ce me semble, que l'on se sert, même inconsciemment, la plupart du temps. »

Parfois on montre qu'un problème est impossible à résoudre : « Il se peut aussi que l'on s'efforce d'obtenir une solution en se basant sur des hypothèses insuffisantes ou mal comprises et que, par suite, on ne puisse atteindre le but. Il s'agit alors de démontrer l'impossibilité de résoudre le problème en se servant d'hypothèses telles qu'elles ont été données ou interprétées. Dans la Mathématique moderne, la question de l'impossibilité de certaines solutions joue un rôle prépondérant. »

La « conviction » du mathématicien

« Le fait remarquable dont nous venons de parler et certains raisonnements philosophiques ont fait naître en nous la conviction que partagera certainement tout mathématicien, mais que jusqu'ici personne n'a étayée d'aucune preuve, la conviction, dis-je, que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution. Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un sérieux encouragement pendant le travail. »

Hilbert a été contraint de réviser sa « conviction ». En effet, le théorème de Gödel, en 1931, montre que dans tout système formel (contenant l'arithmétique), il existe des énoncés qu'il est impossible de démontrer ainsi que leur négation ! Ce fut un grand changement dans la vision des mathématiciens du *vrai* et du *faux*. Pourtant, presque tous les mathématiciens d'aujourd'hui, même s'ils sont au courant de ce théorème, n'y croient pas trop dans leur pratique quotidienne et conservent cette conviction dont parle Hilbert.

Le 8 septembre 1930, un an avant ce théorème de Gödel, Hilbert donnait une conférence sur *La connaissance de la nature et la logique*. Il conclut de la sorte : « Nous ne devons pas croire ceux qui, aujourd'hui, dans une expression philosophique et d'un ton supérieur, prophétisent la fin de la culture et acceptent l'*Ignorabimus* (*« Nous ne saurons jamais »*). Pour nous, il n'y a pas d'*Ignorabimus*, et selon moi, il n'y en a pas non plus dans les sciences naturelles. Par contraste avec l'*Ignorabimus*, je propose le slogan : nous devons savoir. Nous saurons. » Cette conviction, « Wir müssen wissen, Wir werden wissen », fut gravée sur la tombe de Hilbert.

Laissons-le conclure : « Inépuisable est la multitude des problèmes de la Mathématique ; dès qu'une question est résolue, à sa place s'en présente une foule d'autres. » Plus de 110 ans après, cette observation reste d'actualité !

livres

• J. GRAY, *Le défi de Hilbert. Un siècle de mathématiques*, Dunod, Coll. UniverSciences, 2003.

internet

• Le texte de la conférence de Hilbert : http://bit.ly/ucn90C