Le cercle à l'infini des surfaces à courbure négative

Etienne Ghys

Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie 69007 LYON, FRANCE

1 Introduction

Soit S une surface compacte orientée munie d'une métrique riemannienne g de classe C^∞ à courbure variable strictement négative. Il est bien connu que le revêtement universel $\tilde{S}$ de S peut naturellement être compactifié par l'adjonction d'un bord à l'infini, noté $\partial\tilde{S}$ (voir par exemple [1]). Par définition, un point de $\partial\tilde{S}$ est représenté par un rayon géodésique, c'est-à-dire un plongement isométrique r : $[0, +\infty[\to \tilde{S}$ et deux tels rayons r_1 et r_2 définissent le même point du bord si la distance entre $r_1(t)$ et $r_2(t)$ est uniformément bornée. Si p est un point de $\tilde{S}$, on peut représenter chaque point de $\partial\tilde{S}$ par un unique rayon issu de p. Ainsi, le bord $\partial\tilde{S}$ s'identifie à l'espace des vecteurs unitaires de l'espace tangent à $\tilde{S}$ en p ; il est donc homéomorphe à un cercle. Bien sûr, le groupe fondamental Γ de S opère sur $\tilde{S}$ et donc sur le cercle $\partial\tilde{S}$. Nous nous proposons ici de décrire quelques résultats relatifs à cette action. Notre but n'est pas de les démontrer mais d'essayer de les motiver et d'indiquer les liens qui les unissent.

2 L'aspect topologique et la cohomologie bornée

D'un point de vue topologique, il n'y a qu'une action à étudier. C'est un fait bien connu depuis longtemps.

Théorème. *Soient* g_1 *et* g_2 *deux métriques à courbure négative sur la même surface compacte* S. *Alors les actions du groupe fondamental de* S *sur les bords pour* g_1 *et* g_2 *du revêtement universel* $\tilde{S}$ *sont topologiquement conjuguées.*

Pour montrer ce théorème, on constate qu'un rayon r_1 dans $\tilde{S}$ pour la métrique g_1 n'est pas nécessairement un rayon pour g_2 mais que c'est un "quasi-rayon" : la g_2-distance entre $r_1(t)$ et $r_1(t')$ est comprise entre $c^{-1}|t - t'|$ et $c|t - t'|$ pour une certaine constante $c > 0$. Ceci permet de montrer l'existence d'un rayon r_2 pour g_2 qui est à distance bornée de r_1. Les bords de $\tilde{S}$ pour g_1 et g_2 sont alors naturellement identifiés de manière Γ équivariante.

De manière plus conceptuelle, on peut associer un bord à un groupe de type fini G (voir [7] et [19]). Pour cela, on se fixe une partie génératrice finie et on considère le graphe de Cayley de G correspondant à cette partie génératrice. Si une arête relie les éléments γ_1 et γ_2 de G, on équipe cette arête d'une métrique qui la rend isométrique à un intervalle de longueur $(n + 1)^{-2}$ où $n = \inf (\|\gamma_1\|, \|\gamma_2\|)$ et $\|\gamma_i\|$ désigne la longueur de γ_i par rapport à la partie génératrice choisie. Le graphe de Cayley de G devient ainsi un espace métrique non complet (si G est infini). Le bord ∂G de G est alors défini comme l'espace qu'il faut ajouter à ce graphe pour le compléter. Il ne dépend pas du choix de la partie génératrice. Le groupe Aut(G) des automorphismes de G opère naturellement sur ∂G. En particulier, G opère sur ∂G (via les automorphismes internes). Ce bord est particulièrement utile lorsque G est un groupe hyperbolique au sens de M. Gromov [19]. Par exemple, si G est le groupe fondamental Γ d'une surface compacte S de genre supérieur ou égal à 2, le bord ∂G s'identifie à $\partial\tilde{S}$. Ainsi, *l'action que nous étudions n'est autre que celle du groupe* Γ *sur son bord.*

Examinons rapidement le cas particulier où la courbure de la métrique g est –1. Le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie alors au disque de Poincaré D^2 et son groupe d'isométries à PSL(2, R). Le bord de D^2 est le cercle, ici identifié à la droite projective réelle P^1. Dans ce cas, l'action étudiée de Γ sur P^1 est projective et provient d'un plongement de Γ dans PSL(2, R) comme sous-groupe discret co-compact. L'espace de ces plongements (à conjugaison près) est l'espace de Teichmüller ; il est de dimension finie. Bien que toutes ces actions projectives soient topologiquement conjuguées, il est facile de s'assurer qu'elles ne sont C^1-conjuguées que si elles sont projectivement conjuguées. D. Sullivan [31] montre même que si deux de ces actions sont conjuguées par une application mesurable qui respecte les ensembles négligeables au sens de Lebesgue, alors ces actions sont projectivement conjuguées.

Comment caractériser le type topologique de cette action? Si un groupe discret G opère sur le cercle en respectant l'orientation, on peut construire un fibré en cercles au dessus de l'espace d'Eilenberg-MacLane K(G, 1). La classe d'Euler de ce fibré, élément de $H^2(G, Z)$ est évidemment un invariant de conjugaison topologique (respectant l'orientation). Cet invariant est cependant insuffisant. Si G = Z par exemple, ce second groupe de cohomologie est trivial. Dans [12], nous introduisons un invariant plus fin, élément de $H_b^2(G, Z)$, second groupe de cohomologie bornée à coefficients entiers [18]. Cette cohomologie est celle du sous-complexe du complexe d'Eilenberg-MacLane formé des cochaînes bornées (comme fonctions de G^n vers Z). Voici comment on procède pour définir l'invariant en question.

Soient f_1, f_2, f_3 trois homéomorphismes directs du cercle S^1 et x un point base sur S^1. Posons $c(f_1, f_2, f_3) = 1$ si les points $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sont distincts et placés dans un ordre cyclique rétrograde sur le cercle ou si $f_1(x) = f_3(x) \neq f_2(x)$ et posons $c(f_1, f_2, f_3) = 0$ dans les autres cas. Il est aisé de s'assurer que c est un cocycle. Si ϕ est une action du groupe discret G sur le cercle par homéomorphismes directs, on obtient ainsi, par image réciproque, une classe $\phi^*(c)$ dans $H_b^2(G, Z)$. On vérifie facilement que l'image de cette classe dans la cohomologie usuelle est la classe d'Euler (voir aussi [25]). Nous appellerons cette classe la *classe d'Euler bornée* de l'action ϕ. Si G = Z, on a $H^2_b(G, Z) \simeq R/Z$ et la classe d'Euler bornée n'est autre que le nombre de rotation du générateur de l'action.

Théorème [12]. *Soient* ϕ_1 *et* ϕ_2 *deux actions du même groupe* G *sur le cercle, par homéomorphismes directs. On suppose que toutes les orbites de* ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont denses dans le cercle. Alors,* ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont topologiquement conjuguées, par un homéomorphisme direct, si et seulement si les classes d'Euler bornées* $\phi^*_1(c)$ *et* $\phi^*_2(c)$ *sont égales dans* $H^2_b(G, Z)$.

Lorsque les orbites ne sont pas supposées denses, on a un énoncé plus faible qui utilise une notion de semi-conjugaison (voir [12] et aussi [32]).

Revenons au cas où G est le groupe fondamental Γ de S. La classe d'Euler d'une action de Γ sur le cercle est un élément de $H^2(\Gamma, Z)$, c'est-à-dire un entier que nous noterons *eu*.. Un théorème de Milnor-Wood [35], qui est d'ailleurs l'une des origines de la notion de cohomologie bornée, affirme que cet entier vérifie l'inégalité $|eu| \leq |\chi(S)|$ où $\chi(S)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de S. Dans le cas de l'action de Γ sur le cercle $\partial\tilde{S}$ qui correspond à une métrique à courbure négative, on a en fait l'égalité $eu = \pm\chi(S)$.

Dans un joli article [28], S. Matsumoto montre que si Γ opère sur le cercle et si le nombre d'Euler est maximal, i. e. si $eu = \chi(S)$, alors la classe d'Euler *bornée* ne peut prendre qu'une valeur, à savoir celle correspondant à l'action de Γ sur son bord. Il peut alors en déduire la caractérisation topologique suivante qui répond positivement à une conjecture de W. Goldman [17].

Théorème [28]. *Considérons une surface compacte orientée* S *de genre supérieur ou égal à 2 et une action du groupe fondamental de* S *sur le cercle, par homéomorphismes directs. On suppose que toutes les orbites sont denses sur le cercle et que le nombre d'Euler vérifie* $eu = \pm\chi(S)$. *Alors, cette action est topologiquement conjuguée à l'action naturelle de ce même groupe sur le bord* $\partial\tilde{S}$ *du revêtement universel de* S, *pour n'importe quelle métrique à courbure négative sur* S.

L'hypothèse de densité des orbites est en fait inutile si l'on se restreint à des actions suffisamment différentiables.

Théorème [13]. *Considérons une surface compacte orientée* S *de genre supérieur ou égal à 2 et une action du groupe fondamental de* S *sur le cercle, par difféomorphismes directs de classe* C^2 *(resp. analytiques réels). On suppose que le nombre d'Euler du fibré associé vérifie* $eu = \pm\chi(S)$ *(resp.* $eu \neq 0$*). Alors, toutes les orbites sont denses dans le cercle.*

La démonstration se fonde sur les théorèmes de structure des feuilletages de codimension 1, à la Denjoy-Sacksteder.

Citons encore un résultat, obtenu avec J. Barge, et dont la démonstration utilise aussi la cohomologie bornée. Soit x un point base sur le bord $\partial\tilde{S}$ correspondant à une métrique g. Si γ_1, γ_2, γ_3 sont trois éléments de Γ, on peut considérer l'aire $a(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ du triangle idéal de $\tilde{S}$ de sommets $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $\gamma_3(x)$. C'est un 2-cocycle borné sur Γ à valeurs réelles. Dans le cas de courbure -1, l'aire de ces triangles vaut $\pm\,\pi$ et la classe de cohomologie bornée de a est égale à 2π fois la classe d'Euler bornée (considérée comme classe réelle). La réciproque est plus délicate.

Théorème [2]. *Soit* g *une métrique riemannienne à courbure négative sur la surface compacte* S. *On suppose que tous les triangles idéaux du revêtement universel* $\tilde{S}$ *sont d'aire* π. *Alors, la courbure de* g *est constante, égale à* -1.

3 La différentiabilité du bord

Soient p et q deux points de $\tilde{S}$. Nous avons déjà observé que $\partial\tilde{S}$ est naturellement identifié aux cercles unités S^1_p et S^1_q dans les espaces tangents en p et q à $\tilde{S}$. Ainsi, il existe un homéomorphisme naturel π_{pq} entre S^1_p et S^1_q. Quel est le degré de régularité de ces homéomorphismes? Un résultat classique de E. Hopf affirme qu'ils sont de classe C^1[23] (voir aussi [22]). Un résultat plus fort a été obtenu par S. Hurder et A. Katok.

Théorème[24]. *Les homéomorphismes* π_{pq} *sont de classe* $C^{2-\varepsilon}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Ce résultat est à comparer au suivant sur lequel nous allons nous attarder un peu plus.

Théorème[15]. *Si les homéomorphismes* π_{pq} *sont de classe* C^2*, alors la courbure de la métrique considérée est constante.*

Ce théorème fait suite à un théorème local de S. Hurder et A. Katok [24] qui se fondait sur un résultat de [11] que nous mentionnerons plus loin. Il a donné lieu par la suite à un certain nombre de développements, tout spécialement en dimension supérieure. Puisque nous ne traitons ici que du cas des surfaces, nous ne décrirons pas ces développements qui aboutissent à une caractérisation analogue des espaces localement symétriques à courbure négative mais nous renvoyons à ([3], [5], [6], [8],[20], [26]). Grâce à ces travaux, et tout particulièrement à ceux de M.Kanai, la démonstration du théorème précédent s'est significativement simplifiée. Nous allons esquisser ici une preuve assez élémentaire.

Soit T_1S le fibré unitaire tangent à S et ϕ_t le flot géodésique de S, agissant sur T_1S. Soient F^s et F^u les feuilletages stables et instables faibles de ϕ_t. Les feuilles du relevé $\tilde{F}^s$ de F^s au fibré unitaire $T_1\tilde{S}$ sont constituées de tous les vecteurs unitaires qui définissent des rayons géodésiques asymptotes. L'espace des feuilles de $\tilde{F}^s$ est donc homéomorphe au bord $\partial\tilde{S}$. Les fibres de la fibration en cercles de $T_1\tilde{S}$ sont transverses à $\tilde{F}^s$ et les applications d'holonomie induites sur ces fibres sont précisément les homéomorphismes π_{pq}. Ainsi, la différentiabilité des π_{pq} est équivalente à celle du feuilletage F^s (ou, d'ailleurs, de F^u puisque ces deux feuilletages sont conjugués par l'involution de T_1S envoyant un vecteur sur son opposé).

Plaçons nous donc dans l'hypothèse où ces feuilletages sont de classe C^2. La première étape consiste à montrer qu'ils sont en fait transversalement projectifs. Un disque D transverse à ϕ_t est muni d'une forme d'aire Ω (provenant de la forme de Liouville) et de deux champs de directions L^s et L^u, traces de F^s et F^u. Ces structures permettent de définir une métrique pseudo-riemannienne q sur D : si v est un vecteur tangent à D et si v_u et v_s sont ses composantes sur L^s et L^u, on pose $q(v) = \Omega(v_u, v_s)$. C'est une métrique de classe C^2 si F^s est de classe C^2 et L^s et L^u sont les directions isotropes de q. On a ainsi construit une métrique pseudo-riemannienne sur le fibré normal à ϕ_t, évidemment invariante par ϕ_t. La courbure de q est donc une fonction continue constante sur les orbites de ϕ_t ; elle est donc constante car ϕ_t est transitif.

En d'autres termes, tous les disques transverses sont localement isométriques à un même plan lorentzien de courbure constante. Il est très facile d'en conclure que F^s est muni d'une structure transverse projective (ou affine si la courbure de q était nulle). Chaque fibre de T_1S, étant transverse à F^s, est ainsi équipée d'une structure projective ou affine et les applications d'holonomie préservent cette structure. Puisque nous connaissons a priori la topologie de l'action de Γ sur le cercle, on montre que c'est en fait le cas projectif qui se présente et que l'action de Γ sur le cercle est C^2-conjuguée à celle d'un sous-groupe discret co-compact de PSL(2, R).

Ainsi, si le feuilletage F^s est de classe C^2, il est C^2-conjugué au feuilletage stable du flot géodésique d'une métrique à courbure – 1. Il faut encore en conclure que la métrique considérée est elle même à courbure constante. On dispose actuellement de deux méthodes pour y parvenir. La première consiste à développer encore des arguments analogues à ceux utilisés plus haut et à montrer qu'en fait ϕ_t est conjugué au flot géodésique d'une métrique à courbure constante. On peut alors conclure en appliquant le théorème de rigidité de A. Katok [27] qui caractérise la courbure constante en termes d'entropie. La seconde méthode est due à Y. Mitsumatsu et elle est reliée à l'invariant de Godbillon–Vey. Nous avons choisi de décrire ici cette méthode car cet invariant interviendra encore par la suite.

Rappelons la définition de cet invariant. Soit F un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable et de classe C^2 sur une variété M et soit ω une 1-forme différentielle qui le définit. Il existe alors, d'après le théorème de Frobenius, une forme ω_1 telle que $d\omega = \omega \wedge$

ω_1. Il se trouve que la 3-forme $\omega_1 \wedge d\omega_1$ est fermée et que sa classe de cohomologie ne dépend que de $\mathcal{F}$; c'est la classe de Godbillon–Vey de $\mathcal{F}$, notée $GV(\mathcal{F})$. Lorsque M est une variété fermée orientée de dimension 3, l'évaluation de $GV(\mathcal{F})$ sur la classe fondamentale de M est un nombre réel ; c'est l'invariant de Godbillon–Vey que nous noterons $gv(\mathcal{F})$. Par exemple, considérons le cas du feuilletage stable $\mathcal{F}^s$ du flot géodésique d'une métrique à courbure constante –1. Nous savons que le fibré T_1S s'identifie à un espace homogène $PSL(2, R)/\Gamma$. Sur $PSL(2, R)$, il existe une base de formes invariantes à droite ω, ω_1, ω_2 telle que :

$$d\omega = \omega \wedge \omega_1 \quad ; \quad d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2 \quad ; \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

La forme ω passe au quotient sur T_1S et définit le feuilletage $\mathcal{F}^s$. L'invariant de Godbillon–Vey est alors facile à calculer : c'est le volume de T_1S. Le théorème de Gauss-Bonnet donne :

$$gv(\mathcal{F}^s) = 4\pi^2 \chi(S)$$

Dans [29], Y. Mitsumatsu eut l'idée de calculer l'invariant de Godbillon–Vey du feuilletage stable du flot géodésique d'une métrique à courbure négative variable, en supposant celui-ci de classe C^2. Voici le principe de son calcul. Sur T_1S, la théorie du repère mobile permet de construire trois champs de vecteurs V, X_1, X_2 qui forment en chaque point un repère orthonormé et sont tels que :

i) V est le champ associé à l'action de $SO(2)$ sur T_1S,

ii) X_1 engendre le flot géodésique,

iii) $[V, X_1] = X_2$; $[V, X_2] = -X_1$; $[X_1, X_2] = -(k \circ p)V$ où k est la courbure de S et p est la projection de T_1S sur S.

Il existe une fonction F définie sur T_1S telle que le feuilletage stable $\mathcal{F}^s$ soit engendré par X_1 et $X_2 + FV$. La condition d'intégrabilité est facile à écrire ; elle est équivalente à l'équation de Ricatti :

$$X_1(F) + F^2 + k \circ p = 0$$

où $X_1(F)$ désigne la dérivée de la fonction F dans la direction X_1. On dispose alors de toutes les données nécessaires à l'évaluation de l'invariant $gv(\mathcal{F}^s)$. Tous calculs faits, on trouve :

$$gv(\mathcal{F}^s) = 4\pi^2\chi(S) - 3 \int V(F)^2 \, d\,vol$$

Revenons à notre situation. Si le feuilletage $\mathcal{F}^s$ est de classe C^2, nous avons vu qu'il est C^2-conjugué au feuilletage stable du flot géodésique d'une métrique à courbure – 1. L'invariant $gv(\mathcal{F}^s)$ est donc égal à $4\pi^2\chi(S)$. La formule précédente montre alors que $V(F)$ est identiquement nul, c'est-à-dire que F est constant sur les fibres de p. Il est facile d'en conclure que la courbure est constante.

4 Le problème de l'invariance topologique de la classe de Godbillon–Vey

Soit F^s le feuilletage stable du flot géodésique d'une métrique de S à courbure -1. Nous avons déjà vu que l'invariant de Godbillon–Vey de F^s ne dépend pas du choix de cette métrique. Est-il possible de perturber F^s parmi les feuilletages de classe C^∞, hors de l'espace des feuilletages stables de flots géodésiques, de façon à faire varier la classe de Godbillon–Vey ?

Nous savons que F^s peut être défini par une forme ω telle que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ avec $\omega_1 \wedge d\omega_1$ non singulière. Il est clair que cette même propriété est satisfaite pour tous les feuilletages F, disons de classe C^∞, qui sont C^3-proches de F^s. En dérivant la relation $d\omega = \omega \wedge \omega_1$, on constate qu'il existe une forme ω_2 telle que $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$. Les formes ω, ω_1, ω_2 sont alors linéairement indépendantes partout et on peut donc définir deux champs de vecteurs X et Y, tangents à F par :

$$\begin{array}{lllll} \omega(X) = 0 & ; & \omega_1(X) = 1 & ; & \omega_2(X) = 0 \\ \omega(Y) = 0 & ; & \omega_1(Y) = 0 & ; & \omega_2(Y) = 1 \end{array}$$

Des calculs extrêmement simples montrent alors que les champs X et Y préservent le volume $\omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$ et que $[X, Y] = -Y$. Cette dernière relation décrit l'algèbre de Lie du groupe affine GA de la droite, i. e. du groupe des transformations x „ $ax + b$ $(a > 0)$. On conclut donc que le feuilletage F est défini par une action localement libre de GA sur T_1S, préservant le volume $\omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$. Ces actions sont complètement classées dans [11], ce qui permet alors d'obtenir le résultat de rigidité suivant :

Théorème [11]. *Tout feuilletage de classe* C^∞ *qui est suffisamment* C^3*-proche du feuilletage stable du flot géodésique d'une métrique à courbure* -1, *est* C^∞*-conjugué au feuilletage stable du flot géodésique d'une (autre) métrique à courbure* -1.

Résumons la situation. Toutes les actions de Γ de classe C^2 sur le cercle, de classe d'Euler maximale, sont topologiquement conjuguées. Deux actions projectives provenant de métriques à courbure -1 ne sont C^1- conjuguées que si les métriques correspondantes sont isométriques. Une action de classe C^∞, qui est C^3- proche d'une de ces actions projectives est C^∞- conjuguée à une autre action projective. Peut-on globaliser ce dernier énoncé ?

Problème. *Soit* Γ *le groupe fondamental d'une surface compacte orientée* S *de genre supérieur ou égal à* 2. *Considérons une action de* Γ *sur le cercle par difféomorphismes directs de classe* C^∞. *Si le nombre d'Euler de l'action est maximal (i. e. égal à* $\pm \chi(S)$ *), peut-on affirmer que l'action est* C^∞*-conjuguée à une action projective (associée à une métrique à courbure* -1*) ?*

Ainsi, les déformations des feuilletages stables de flots géodésiques, dans l'espace des feuilletages de classe C^∞, gardent un type topologique constant mais ont aussi un invariant de Godbillon–Vey constant. C'est l'une des motivations de la question suivante.

Problème. *Soient* (M_1, F_1) *et* (M_2, F_2) *deux variétés compactes feuilletées, de codimension* 1*, transversalement orientables, et de classe* C^2*. On suppose qu'il existe un homéomorphisme* h *entre* M_1 *et* M_2 *qui envoie* F_1 *sur* F_2*. L'isomorphisme* h* *entre les cohomologies de* M_1 *et* M_2 *envoie-t-il la classe de Godbillon–Vey de* F_2 *sur celle de* F_1 *?*

Si l'on consent à un élargissement du domaine de définition de la classe de Godbillon–Vey, la réponse à la question précédente est négative. Nous allons mentionner rapidement deux tels élargissements.

Il n'est pas possible de définir un invariant pour les feuilletages de classe C^1. Ceci résulte de la contractibilité du classifiant des feuilletages transversalement orientables, de codimension 1 et de classe C^1, démontrée par T. Tsuboi [33]. La classe de Godbillon–Vey est cependant invariant par conjugaison de classe C^1 (voir [16] et [30]).D'autre part, dans [24], S. Hurder et A. Katok définissent un invariant pour les feuilletages de classe $C^{1+\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 1/2$. En particulier, on peut calculer l'invariant du feuilletage stable du flot géodésique d'une métrique à courbure négative variable. Dans ce cas, la formule de Y. Mitsumatsu est encore valable et montre que l'invariant de Godbillon–Vey varie effectivement si la courbure varie. Cette même formule montre d'ailleurs que l'invariant prend sa valeur maximale précisément sur les métriques à courbure constante.

Dans une autre direction, on peut aussi définir l'invariant de Godbillon–Vey pour les feuilletages de classe C^2 par morceaux [10] et on peut aussi se poser le problème précédent dans ce contexte élargi. Nous y répondons négativement à travers le résultat suivant :

Théorème [14]. *L'action du groupe fondamental d'une surface à courbure négative sur le bord de son revêtement universel est topologiquement conjuguée à une action affine par morceaux.*

Ceci donne effectivement une réponse négative au problème car un feuilletage transversalement affine par morceaux a un invariant de Godbillon–Vey nul.

Pour démontrer ce dernier théorème, on utilise le fait que le flot géodésique ϕ_t possède une section de Birkhoff, c'est-à-dire qu'il existe une surface à bord Σ dans T_1S dont l'intérieur est transverse à ϕ_t et dont le bord est constitué d'orbites périodiques de ϕ_t. De plus, toute orbite de ϕ_t coupe Σ une infinité de fois et on peut donc définir une application de premier retour $r : \Sigma \to \Sigma$ (voir
[4], [9]). Les feuilletages F^s et F^u tracent sur Σ deux feuilletages transverses ayant un comportement bien contrôlé au voisinage du bord. On montre alors que r est topologiquement conjugué à un difféomorphisme pseudo-Anosov qui agit de manière affine sur l'espace de ses

feuilles stables. Par conséquent, F^s est topologiquement conjugué à un feuilletage transversalement affine par morceaux, les cassures correspondant aux feuilles contenant les courbes du bord de Σ. Une description explicite des homéomorphismes affines par morceaux ainsi obtenus a été récemment donnée par N. Hashiguchi [21].

D'une certaine façon, ce contre-exemple à l'invariance topologique de la classe de Godbillon–Vey est peu satisfaisant. On est tenté de penser que par cette conjugaison topologique, la classe de Godbillon–Vey s'est concentrée dans les singularités du feuilletage affine par morceaux. Il est effectivement possible de définir un "invariant discret" qui tient compte de ces singularités mais on montre que, même en ajoutant cette contribution, la classe n'est pas un invariant topologique.

Les deux extensions du domaine de définition de la classe de Godbillon–Vey que nous venons d'évoquer ont été récemment unifiées par T. Tsuboi [34]. Il définit un pseudogroupe d'homéomorphismes de la droite qui contient à la fois les difféomorphismes de classe $C^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 1/2$) et les homéomorphismes qui sont de classe C^2- par morceaux. Il montre ensuite comment définir une classe de Godbillon–Vey pour les feuilletages de codimension 1 dont la structure transverse est modelée sur ce pseudogroupe. Il semble bien que ceci soit "le" domaine maximal d'existence de l'invariant.

Le problème de l'invariance topologique dans le cadre des feuilletages de classe C^2 reste cependant ouvert.

Références

1. Ballman, W., Gromov, M., Schroeder, V.: Manifolds of non positive curvature. **61** (1985)
2. Barge, J., Ghys, E.: Surfaces et cohomologie bornée. Invent. Math. **92** (1988) 509-526
3. Benoist, Y., Foulon, P., Labourie, F.: Flots d'Anosov à distributions stables et instables différentiables. C.R.A.S. Paris 1990
4. Birkhoff, G.D.: Dynamical systems with two degrees of freedom. Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917) 199-300
5. Feres, R.: Geodesic flows on manifolds of negative curvature with smooth horospheric foliations Ph D Caltech. 1989
6. Feres, R., Katok, A.: Invariant tensor fields of dynamical systems with pinched Lyapunov exponents and rigidity of geodesic flows. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **3** (1989) 427-433
7. Floyd, W.: Group completions and limit sets of Kleinian groups. Inventiones math. **57** (1980) 205-218
8. Foulon, P., Labourie, F.: Flots d'Anosov à distributions de Liapounov différentiables. C. R. A. S Paris. **309** (1989) 255-260
9. Fried, D.: Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps. Topology. **22** (1983) 299-303

10. Fuchs, D.B., Gabrielov, A.M., Gelfand, I.M.: The Gauss–Bonnet theorem and the Atiyah–Patodi–Siinger functionals for the characteristic classes of foliations. Topology.**15** (1976) 165-188
11. Ghys, E.: Actions localement libres du groupe affine. Invent. Math. **82** (1985) 479-526
12. Ghys, E.: Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. Contemporary Mathematics. **58** Part III.(1987) 81-105
13. Ghys, E.: Classe d'Euler et minimal exceptionnel. Topology. **26** (1987) 93-105
14. Ghys, E.: Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon–Vey. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. **37**(1987) 59-76
15. Ghys, E.: Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **20** (1987) 251-270
16. Ghys, E., Tsuboi, T.: Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. **38** (1988) 215-244
17. Goldman, W.: Discontinuous groups and the Euler class. Ph D thesis. Dept of Mathematics, University of California at Berkeley (1980)
18. Gromov, M.: Volume and bounded cohomology. Pub. Math. I.H.E.S. **56** (1982) 5-100
19. Gromov, M.: Hyperbolic groups, in "Essays in group theory" ed. S. M. Gersten. M.S.R.I. pub. **8** (1987) 7-263
20. Hamenstadt, U.: A geometric characterization of negatively curved locally symmetric spaces. Preprint (1990)
21. Hashiguchi, N.: PL-representations of the geodesic flows on closed surfaces. Preprint (1990)
22. Hirsch, M., Pugh, C.: Smoothness of horocycle foliations. J. Differential Geom. **10** (1975) 225-238
23. Hopf, E.: Statistik der geodätischen Linen in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. Ber. Verh. Sochs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939) 261-304
24. Hurder, S., Katok, A.: Differentiability, rigidity and Godbillon–Vey classes for Anosov flows. Preprint IHES (1987)
25. Jekel, S.: An elementary formula and a bound for the Euler class. Preprint
26. Kanai, M.: Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8**(1988) 215-239
27. Katok, A.: Entropy and closed geodesics. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982) 339-366
28. Matsumoto, S.: Some remarks on foliated S^1 bundles. Invent.Math. **90** (1987) 343-358
29. Mitsumatsu, Y.: A relation between the topological invariance of the Godbillon–Vey invariant and the differentiability of Anosov foliations. Advanced studies in pure mathematics **5**(1985) 159-167
30. Raby, G.: Invariance des classes de Godbillon–Vey par C^1- difféomorphismes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. **38** (1988) 205-213
31. Sullivan, D.: Discrete conformal groups and measurable dynamics. Bull. A. M. S. **6** (1982) 53-73

32. Takamura, M.: Semi-conjugacy and a theorem of Ghys. Preprint
33. Tsuboi, T.: On the foliated products of class C^1. Annals of Maths. **130** (1989) 227-271
34. Tsuboi, T.: Area functional and Godbillon–Vey cocycles. Preprint
35. Wood, J.: Bundles with totally disconnected structure group. Comment.Math.Helvetici. **46** (1971) 257-273