COCYCLES BORNÉS ET ACTIONS DE GROUPES SUR LES ARBRES RÉELS

JEAN BARGE

Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex, France

and

ETIENNE GHYS

Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex, France

1. Introduction.

Les arbres réels (voir définition ci-dessous) sont apparus, pour la première fois, dans le travail de J. Morgan et P. Shalen [5] comme une nouvelle interprétation des points à l'infini de l'espace de Teichmüller des surfaces de Riemann de genre supérieur ou égal à 2. En particulier, ces arbres étaient munis d'une action isométrique du groupe fondamental d'une telle surface et cette action s'avérait "fréquemment" être une action libre. Ce fait surprenant (il est bien connu qu'un groupe agissant librement sur un arbre simplicial est en fait un groupe libre) a conduit à se demander quels groupes, disons de type fini, peuvent agir librement sur un arbre réel. C'est clair pour $\mathbb{Z}^n$ qui se réalise comme groupe de translations de la droite affine et, par une construction standard, pour les groupes qui sont produits libres de groupes abéliens libres et de groupes de surfaces orientables. Dans [6], P. Shalen se demande si ce sont les seuls. Dans la note qui suit, nous associons à toute action d'un groupe Γ sur un arbre réel T, une large famille de 2-cocycles bornés. Si, de plus, l'action de Γ sur T est libre, les classes de cohomologie bornée définies par les 2-cocycles précédents ne sont pas toutes nulles à moins que Γ ne soit abélien sans torsion. En particulier, un groupe de type fini, non isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, qui agit librement sur un arbre réel, possède nécessairement un second groupe de cohomologie bornée non trivial.

Un arbre réel T est un espace métrique vérifiant les deux conditions suivantes :

1) Pour toute paire de points distincts A et B de T, il existe un unique plongement γ, du segment réel $[0, d(A,B)]$ dans T, qui soit une isométrie sur son image et qui joigne A et B (*i.e.* $\gamma(0) = A$ et $\gamma(d) = B$). Notons AB l'image de γ.

2) Soient A, B, C trois points de T. Si $AB \cap BC = \{B\}$, alors $AC = AB \cup BC$.

Un arbre réel peut être globalement et même localement très compliqué. Néanmoins, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de l'arbre possède la même structure combinatoire que dans un arbre simplicial. Par exemple, les triangles sont comme indiqués (figure 1), les quadrilatères (figure 2) *etc.*

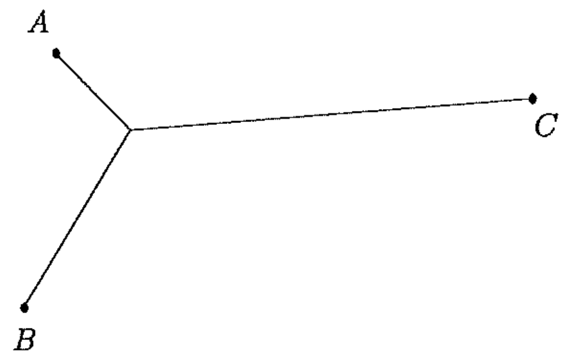


Figure 1

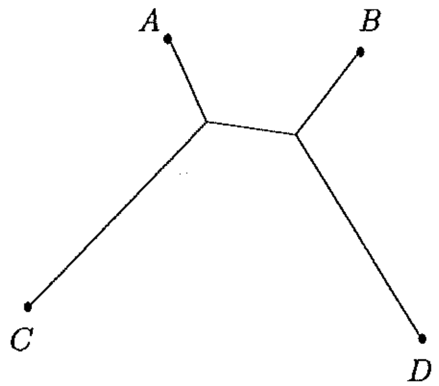


Figure 2

2. Classes de cohomologie bornée.

Soit donc Γ un groupe opérant par isométries sur un arbre réel T.

Nous noterons $\vec{u}$ un segment non dégénéré, *i.e.* non réduit à un point, et orienté, de l'arbre réel T. Nous allons nous servir de l'unité $\vec{u}$ pour "mesurer" la longueur des segments de T, d'une façon inspirée de la construction de R. Brooks [3] pour les groupes libres.

Si A et B sont deux points de T, on note $\Phi_{\vec{u}}(A,B)$ le plus grand entier (positif ou nul) n pour lequel il existe n éléments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ du groupe Γ vérifiant les propriétés suivantes :

1) les segments $\gamma_i \vec{u}$ sont d'intérieurs disjoints deux à deux.

2) chacun des segments $\gamma_i \vec{u}$ est contenu dans AB.

3) $\gamma_i \vec{u}$ est orienté de A vers B.

On note alors $\mathrm{mes}_{\vec{u}}(A,B)$ l'antisymétrisée de la fonction $\Phi_{\vec{u}}(A,B)$, c'est-à-dire la fonction définie par :

$$\mathrm{mes}_{\vec{u}}(A,B) = \Phi_{\vec{u}}(A,B) - \Phi_{\vec{u}}(B,A) \ .$$

Cette fonction est presque additive. Précisément, si A, B, C sont trois points d'un même segment géodésique de T, avec B entre A et C, on a :

$$|\mathrm{mes}_{\vec{u}}(A, C) - \mathrm{mes}_{\vec{u}}(A, B) - \mathrm{mes}_{\vec{u}}(B, C)| \leqslant 1 \ .$$

Il en résulte que si maintenant A, B, C sont trois points quelconques de T, le "périmètre" du triangle ABC est presque nul (voir figure 1)

$$|\mathrm{mes}_{\vec{u}}(A, B) + \mathrm{mes}_{\vec{u}}(B, C) + \mathrm{mes}_{\vec{u}}(C, A)| \leqslant 3 \ .$$

Choisissons un point base, noté $*$, dans T et posons, pour γ_1, γ_2 dans Γ :

$$c_{\vec{u},*}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathrm{mes}_{\vec{u}}(*, \gamma_1, \gamma_2(*)) - \mathrm{mes}_{\vec{u}}(*, \gamma_1(*)) - \mathrm{mes}_{\vec{u}}(*, \gamma_2(*))$$

c'est-à-dire encore le périmètre du triangle de sommets $*, \gamma_1(*), \gamma_1\gamma_2(*)$.

On peut alors énoncer :

PROPOSITION.

i) *La fonction* $c_{\vec{u},*} : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ *définit un 2-cocycle (non homogène) borné sur* Γ.

ii) *La classe de cohomologie définie par* $c_{\vec{u},*}$ *est nulle.*

iii) *La classe de cohomologie bornée définie par* $c_{\vec{u},*}$ *ne dépend pas du point base* $*$ *dans* T.

Preuve. — i) et ii). La cochaîne $c_{\vec{u},*}$ est le cobord de la 1-cochaîne $f_* : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$f_*(\gamma) = \mathrm{mes}_{\vec{u}}(*, \gamma(*)) \ .$$

Cette cochaîne $c_{\vec{u},*}$ est donc un cocycle dont la valeur absolue est bornée par 3. Notons que f_* n'est pas a priori bornée de sorte que la classe de cohomologie bornée de $c_{\vec{u},*}$ peut être non nulle (comme nous nous en assurerons d'ailleurs plus loin).

iii). Soit $*'$ un autre point de T. La différence $f_* - f_{*'}$ est bornée. En effet $f_*(\gamma) - f_{*'}(\gamma)$ n'est autre que le périmètre du quadrilatère de sommets $(*, \gamma(*), \gamma(*'), *')$ (figure 2).

3. Actions libres.

Nous supposerons de plus que le groupe Γ agit librement sur l'arbre réel T.

Rappelons que toute isométrie γ de Γ, sans point fixe, possède un axe $\mathcal{A}_\gamma$, c'est-à-dire un sous-arbre invariant isométrique à $\mathbb{R}$ et sur lequel γ agit par translation. Cet axe est l'ensemble des points x de T tels que $d(x, \gamma(x)) \leqslant d(t, \gamma(t))$ pour tout t de T.

Soit γ_0 un élément non trivial du groupe Γ. Soit $\vec{u}$ le segment $A\gamma_0(A)$ où A est un point de l'axe $\mathcal{A}_{\gamma_0}$ de γ_0. On note alors $[c_{\gamma_0}]$ la classe de cohomologie bornée de $c_{\vec{u},*}$ (dont on s'assure facilement qu'elle ne dépend pas du choix du point A sur l'axe de γ_0).

LEMME. — *Si la classe* $[c_{\gamma_0}]$ *est nulle, il existe un homomorphisme de* Γ *dans* $\mathbb{R}$ *qui prend la valeur 1 sur* γ_0.

Preuve. — Il y a d'abord l'observation générale suivante [2]. Si c est une classe de cohomologie bornée, nulle en cohomologie ordinaire, alors c est la classe d'une 2-cochaîne bornée qui s'écrit df où $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ est une application qui vérifie, pour une constante K :

$$|f(\gamma_1\gamma_2) - f(\gamma_1) - f(\gamma_2)| \leqslant K$$

pour tous γ_1, γ_2 de Γ.

L'inégalité ci-dessus montre que pour tout γ de Γ la suite $\frac{1}{n}f(\gamma^n)$ possède une limite, notée $\bar{f}(\gamma)$ lorsque n tend vers l'infini. De plus, l'application $f - \bar{f}$ est bornée sur Γ ce qui montre que c est aussi la classe bornée de $d\bar{f}$. On a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

i) $c = 0$.

ii) $f = b + \Psi$ où b est bornée et Ψ est un morphisme.

iii) $\bar{f}$ est un morphisme.

Le lemme 2 résulte de l'assertion suivante :

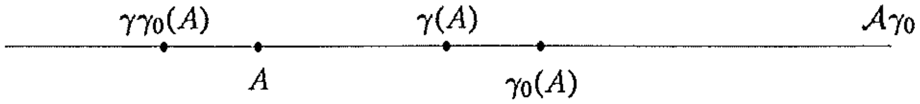
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{mes}_{\overrightarrow{A\gamma_0(A)}}(*, \gamma_0^n(*)) = 1 \ .$$

Comme observé précédemment, la limite du premier membre ne dépend pas du choix du point base $*$. Choisissons donc $* = A$. Il est clair que :

$$\Phi_{\overrightarrow{A\gamma_0(A)}}(A, \gamma_0^n(A)) = n$$

et montrons que $\Phi_{\overrightarrow{A\gamma_0(A)}}(\gamma_0^n(A), A) = 0$.

En effet, il existerait sinon un élément γ de Γ tel que $\overrightarrow{\gamma_0(A), \gamma\gamma_0(A)}$ soit contenu dans l'axe $\mathcal{A}_{\gamma_0}$ de γ_0 avec une orientation opposée. Quitte à modifier γ par une puissance convenable de γ_0, nous obtenons la figure suivante :



sur laquelle il est clair que le milieu du segment $A\gamma(A)$ est fixe par γ. Ceci est contraire au fait que nous supposons l'action libre.

Nous obtenons alors la proposition :

PROPOSITION. — *Soit* Γ *un groupe qui opère librement par isométries sur un arbre réel* T. *Alors, ou bien* Γ *est abélien sans torsion ou bien le second groupe de cohomologie bornée de* Γ *ne s'injecte pas dans le second groupe de cohomologie ordinaire (à coefficients réels).*

Pour donner un énoncé plus concret, nous utiliserons un résultat de [1], [4]. Soit Γ' le premier groupe dérivé de Γ et $\gamma \in \Gamma'$. On note $|\gamma|$ le nombre minimum de commutateurs de Γ dont le produit est égal à γ. On définit alors $\|\gamma\|$ par :

$$\|\gamma\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\gamma^n| .$$

Le résultat dont il s'agit est le suivant : le second groupe de cohomologie bornée de Γ s'injecte dans la cohomologie usuelle si et seulement si cette "longueur stable des commutateurs" est nulle pour tous les éléments de Γ.

PROPOSITION. — *Soit* Γ *un groupe non abélien tel que la longueur stable des commutateurs soit nulle sur* Γ'. *Alors* Γ *n'opère pas librement sur un arbre réel.*

Bibliographie

[1] BAVARD C. — *Longueur stable des commutateurs*, Prépublication E.N.S. Lyon, 1989.

[2] BESSON G. — *Séminaire de cohomologie bornée*, E.N.S. Lyon, fév., 1988.

[3] BROOKS P. — *Some remarks on bounded cohomology in Riemannian surfaces and related topics*, Ann. of Math. Stud., **91** (1981), 53–65.

[4] MATSUMOTO S., MORITA S. — *Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms*, Proc. A.M.S., **94** (1985), 539–544.

[5] MORGAN J., SHALEN P. — *Valuations, trees and degenerations of hyperbolic structures, I*, Ann. of Math., **120** (1984), 401–476.

[6] SHALEN P. — *Dendrology of groups; an introduction in "Essays in group theory"*, S..M. Gersten editor, Pub. MSRI, **8** (1987), 265–319.

– ◇ –

(13 septembre 1990)