Math. Ann. 294, 235–265 (1992)

Mathematische Annalen
© Springer-Verlag 1992

Cocycles d'Euler et de Maslov

J. Barge[1] **et E. Ghys**[2]

[1] Université de Grenoble I, Institut Fourier, BP 74, F-38402 St. Martin d'Hères, France*
[2] E.N.S. Lyon, UMR 128 du CNRS, 46, Allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex, France

Reçu le 8 mai, 1991

Mathematics Subject Classification (1991): 55 U 99

Introduction

Dans son article "The logarithm of the Dedekind η-function", Atiyah étudie diverses fonctions numériques définies sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, d'origines très variées [At 1]. Certaines de ces fonctions sont de nature topologique comme le défaut de signature de Hirzebruch et le cocycle signature de Meyer. D'autres sont de nature arithmétique et analytique, liées à la fonction η de Dedekind etc.... L'essentiel de l'article de Atiyah consiste à montrer que ces fonctions coïncident, tout au moins sur les éléments hyperboliques.

La première remarque du présent article est qu'un certain nombre de ces fonctions numériques I sont *évidemment* des quasi-morphismes, c'est-à-dire que $I(AB)-I(A)-I(B)$ est borné sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. D'un point de vue cohomologique ordinaire, le 2-cocycle $c(A,B)=dI(A,B)=I(AB)-I(A)-I(B)$ n'a aucun intérêt puisque c'est un cobord. Néanmoins, sa classe de cohomologie *bornée* est très intéressante car I n'est pas borné. En fait, I est essentiellement déterminé par la *classe* de cohomologie bornée de c dans le second groupe de cohomologie bornée de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Notons cependant que ce dernier groupe de cohomologie bornée est très complexe; par exemple, il n'est pas de type fini.

La seconde remarque est que le cobord $c(A,B)$ de ces invariants se prolonge *naturellement* en des 2-cocycles bornés sur le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Notons que la fonction I elle-même ne se prolonge pas au groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ de sorte que le prolongement c à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ n'est plus a priori cohomologue à zéro.

La troisième remarque est que, pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, le second groupe de cohomologie bornée s'injecte dans la cohomologie ordinaire. Il en résulte que, pour retrouver I à une quantité bornée près, il suffit de connaître la classe de cohomologie *ordinaire* du prolongement c à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. La tâche est facilitée par le fait que les cocycles auxquels nous avons affaire sont évidemment boréliens et que le second groupe de cohomologie borélienne de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est monogène.

* Adresse actuelle: Centre de Mathématiques, URA 169 CNRS, Ecole polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

Tous ces faits algébriques constituent la partie préliminaire A.

Il résulte de ces remarques que le générateur du second groupe de cohomologie borélienne de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ apparaît dans la littérature sous diverses appellations: classe d'Euler, fonction de Rademacher, défaut de signature de Hirzebruch, signature des fibrés en tores. Nous ajoutons à cette liste le nombre de translation de Poincaré dont nous verrons le rôle fondamental.

Le détail de ces identifications fait l'objet de la partie B. Dans le par. B-1, nous introduisons le cocycle «ordre cyclique» et le nombre de translation de Poincaré. Dans les pars. B-2, B-3 et B-4, nous appliquons successivement notre méthode pour identifier trois invariants: l'ambiguïté du logarithme de la fonction η de Dedekind, le défaut de signature de Hirzebruch et la fonction de Rademacher. Cette dernière s'avère très reliée à un cocycle introduit par Brooks dans le contexte de la cohomologie bornée. Pour finir, nous calculons concrètement la signature d'un fibré en tores T^2 au-dessus d'une surface, retrouvant ainsi des résultats de Meyer. De même, nous exprimons le nombre de translation de Poincaré d'un élément de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{Z})$ en termes de cocycles de Brooks.

Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ généralise $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Lui aussi a un second groupe de cohomologie bornée qui s'injecte dans la cohomologie ordinaire. Les considérations précédentes s'appliquent donc. L'analogue de la classe d'Euler est la classe de Maslov. Cette généralisation fait l'objet de la partie C.

Dans le par. C-1, nous décrivons trois généralisations de l'ordre cyclique: indice ternaire de Leray et Kashiwara, cocycle de Dupont, Guichardet, Wigner et un troisième lié à l'argument du déterminant. Il résulte des principes généraux de la partie A que les primitives de ces cocycles diffèrent de quantités bornées. Nous répondons ainsi à une question de Turaev.

Dans le par. C-2, nous construisons un quasi-morphisme privilégié τ, analogue au nombre de tranlsation, défini sur le revêtement universel de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ et qu'on appelle le nombre de translation symplectique. Puis nous calculons τ en fonction du spectre.

Dans le paragraphe C-3, nous pouvons aborder le calcul de la signature d'un fibré de fibre quelconque et de base une surface. Le cas fondamental et celui où la base est une sphère moins trois disques. On est alors amené à étudier un 2-cocycle borné explicite sur le groupe $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$: le cocycle de Meyer. Là encore, nos méthodes s'appliquent et permettent un calcul complet de cette signature (théorème C-3.13).

Nous concluons cet article par une partie C-4 qui généralise le nombre de translation symplectique au «cas fibré». On obtient ainsi un quasi-morphisme intéressant défini sur le groupe des difféomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^{2n}$ à supports compacts contenus dans une boule fixée.

A Préliminaires: groupes uniformément parfaits et cohomologie bornée

Définition 1. Nous dirons qu'un groupe discret G est *uniformément* parfait s'il existe un entier k tel que tout élément du groupe G est le produit d'au plus k commutateurs.

Nous avons alors la remarque élémentaire mais fondamentale.

Remarque fondamentale 2. Soit

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

une extension centrale d'un groupe uniformément parfait G. Notons $T = i(1)$. Il existe au plus une application $\Phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ telle que:

(1) $\Phi(\gamma T) = \Phi(\gamma) + 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,
(2) $\Phi(\gamma_1\gamma_2) - \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)$ est bornée sur $\Gamma \times \Gamma$,
(3) $\Phi(\gamma^n) = n\Phi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$.

Une application d'un groupe Γ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (2) sera appelée un *quasi-morphisme*.

Si elle vérifie en plus (3) ce sera un *quasi-morphisme homogène*.

Preuve. D'après (1), la différence de deux telles fonctions s'écrit $F \circ p$ où $F: G \to \mathbb{R}$ est telle que $F(g_1g_2) - F(g_1) - F(g_2)$ est bornée sur $G \times G$ (2). En particulier la fonction F est bornée sur le sous-ensemble des commutateurs d'éléments de G et donc sur G tout entier puisque le groupe G est uniformément parfait. Il résulte alors de (3) qu'en fait la fonction F est identiquement nulle. □

La première partie de cet article consiste à remarquer que des fonctions Φ, vérifiant évidemment (1), (2) et (3) apparaissent dans des contextes très différents et coïncident donc.

Exemples fondamentaux 3. Tout élément du groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est *un* commutateur. Considérons l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

où $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ est le revêtement universel de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Nous verrons bientôt que pour cette extension, il existe effectivement un Φ, vérifiant (1), (2) et (3).

4. Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ est lui aussi uniformément parfait (voir C-1.1). Considérons l'extension centrale:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

où $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$ est le revêtement universel de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Là encore, une telle fonction Φ existe et nous en rencontrerons divers exemples (donc égaux!) dans la partie C.

5. Une autre généralisation de l'exemple 3 est la suivante. Tout élément du groupe $\mathrm{Homéo}^+(S^1)$ des homéomorphismes du cercle conservant l'orientation est *un* commutateur [E-H-N]. Dans ce cas, l'extension à considérer est:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Homéo}}^+(S^1) \longrightarrow \mathrm{Homéo}^+(S^1) \longrightarrow 1$$

où $\widetilde{\mathrm{Homéo}}^+(S^1)$ est encore le revêtement universel, groupe que l'on peut aussi interpréter comme celui des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ commutant avec la translation T, d'amplitude 1.

Revenons à la remarque fondamentale. Si Φ existe, notons $c: G \times G \to \mathbb{R}$ le 2-cocycle [bien défini d'après (1)] par:

$$c(g_1, g_2) = \Phi(\gamma_1\gamma_2) - \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)$$

où γ_1 et γ_2 sont des relèvements arbitraires de g_1 et g_2 dans Γ. Toujours grâce à (1) la classe de cohomologie réelle définie par c est l'image de la classe de l'extension centrale donnée, par l'application canonique $H^2(G;\mathbb{Z}) \to H^2(G;\mathbb{R})$. On voit donc qu'une condition nécessaire d'existence est que la classe de cohomologie réelle définie par l'extension centrale $0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma \to G \to 1$ soit représentable par un 2-cocycle réel, *borné*, sur $G \times G$.

En fait on peut énoncer:

Proposition 6. *Soient G un groupe uniformément parfait et $x \in H^2(G, \mathbb{Z})$. Notons*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \Gamma_x \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

l'extension centrale correspondante. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) *Il existe une application (unique) $\Phi_x : \Gamma_x \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés (1), (2) et (3) de la remarque fondamentale.*

b) *L'image de x dans $H^2(G, \mathbb{R})$ est représentable par un 2-cocycle borné.*

Preuve. Il reste à voir que b) implique a). Soit donc $c : G \times G \to \mathbb{R}$ un 2-cocycle borné normalisé [i.e. $c(g, 1) = c(1, g) = 0$] représentant la classe réelle de x. Par définition, $p^*c : \Gamma_x \times \Gamma_x \to \mathbb{R}$ est le cobord d'une fonction (unique, car G est parfait) $\Phi_c : \Gamma_x \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi_c(T) = 1$. Puisque

$$\Phi_c(\gamma_1\gamma_2) - \Phi_c(\gamma_1) - \Phi_c(\gamma_2) = c(p(\gamma_1), p(\gamma_2))$$

est bornée, il existe une constante K telle que l'on ait pour tout $n, p \in N$ et tout $\gamma \in \Gamma : |\Phi_c(\gamma^{n+p}) - \phi_c(\gamma^n) - \phi_c(\gamma^p)| < K$. Il en résulte que la suite $\frac{1}{n}\Phi_c(\gamma^n)$ possède une limite lorsque n tend vers l'infini. C'est $\Phi_x(\gamma)$.

Pour terminer ces généralités, dégageons une formule qui exprime Φ_c en fonction de Φ_x et de la connaissance de c sur les sous-groupes monogènes de G.

Formule 7.

$$\Phi_c(\gamma) = \Phi_x(\gamma) - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} c(\gamma^k, \gamma). \quad \square$$

Remarque 8. Ce qui précède s'interprète naturellement dans le contexte de la cohomologie bornée [Gr, Ba, Be, M-M]. Si G est un groupe discret on note $C_b^*(G; \mathbb{R})$ les sous-complexe des cochaînes d'Eilenberg-McLane qui sont bornées et $H_b^*(G; \mathbb{R})$ les groupes d'homologie correspondants: ce sont les groupes de cohomologie bornée. Les considérations précédentes signifient que pour un groupe uniformément parfait G, le second groupe de cohomologie bornée de G s'injecte dans le second groupe de cohomologie ordinaire [M-M].

B Le groupe SL(2, ℝ) et la classe d'Euler

B.1 Nombre de translation et classe d'Euler

Nous commençons par décrire un 2-cocycle normalisé sur le groupe Homéo$^+(S^1)$ des homéomorphismes directs du cercle S^1. Si p, q, r sont trois points du cercle *orienté*, posons:

$$\begin{aligned} \text{ord}(p, q, r) = &\ 0 \quad \text{si deux des points } p, q, r \text{ coïncident} \\ = &\ 1 \quad \text{si } q \in]p, r[\\ = &\ -1 \quad \text{si } q \in]r, p[. \end{aligned}$$

C'est l'*ordre cyclique* des trois points p, q, r.

Proposition 1.1. (i) ord *est invariant par l'action de* Homéo$^+(S^1)$.

(ii) $\text{ord}(p, q, r) + \text{ord}(p, r, s) = \text{ord}(p, q, s) + \text{ord}(q, r, s)$ *où p, q, r, s sont quatre points quelconques du cercle.*

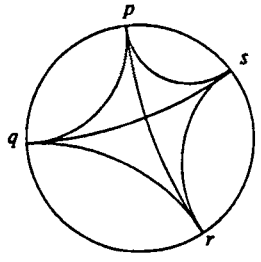


Fig. 1

Preuve. (i) est clair.

(ii) Une façon agréable de s'assurer de (ii) est de penser au cercle S^1 comme le bord du disque de Poincaré et à constater que $\mathrm{ord}(p,q,r)$ est égal à $\frac{1}{\pi}$ fois l'aire algébrique du triangle idéal de sommets p, q et r. La formule (ii) résulte alors de la fig. 1. □

Soit $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la modification de la partie entière [ ], définie par:

$$E(x)=x \quad \text{si } x\in\mathbb{Z},$$
$$E(x)=[x]+\tfrac{1}{2} \quad \text{si } x\notin\mathbb{Z}.$$

Si x et y sont deux nombres réels, posons

$$U(x,y)=2E(x-y)\in\mathbb{Z}.$$

Lemme 1.2. *Soient x,y,z trois nombres réels. On a:*

$$U(x,y)+U(y,z)+U(z,x)=\mathrm{ord}(\pi(x),\pi(y),\pi(z))$$

où $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la projection. □

Corollaire 1.3. *La fonction*

$$\mathrm{ord}:\mathrm{Homéo}^+(S^1)\times\mathrm{Homéo}^+(S^1)\to\mathbb{Z}$$

définie par $\mathrm{ord}(f,g)=\mathrm{ord}(0,f(0),f\circ g(0))$ *est un 2-cocycle normalisé borné sur le groupe uniformément parfait* $\mathrm{Homéo}^+(S^1)$.

De plus, la classe de cohomologie définie par ord *est deux fois la classe d'Euler, c'est-à-dire deux fois celle de l'extension centrale:*

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{Homéo}}^+(S^1)\xrightarrow{p}\mathrm{Homéo}(S^1)\longrightarrow 1\,.$$

Preuve.

$$\mathrm{ord}(p(\tilde f),p(\tilde g))=\Phi_{\mathrm{ord}}(\tilde f\circ\tilde g)-\Phi_{\mathrm{ord}}(\tilde f)-\Phi_{\mathrm{ord}}(\tilde g)$$

où $\Phi_{\mathrm{ord}}:\widetilde{\mathrm{Homéo}}^+(S^1)\to\mathbb{Z}$ est définie par $\Phi_{\mathrm{ord}}(\tilde f)=U(\tilde f(0),0)=2E(\tilde f(0))$. Par ailleurs $\Phi_{\mathrm{ord}}(T)=2$. □

Le quasi-morphisme Φ_{ord} n'est par homogène. Posons:

$$\Phi(\tilde f)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Phi_{\mathrm{ord}}(\tilde f^n).$$

On a:

$$\Phi(\tilde f)=2\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\tilde f^n(0))}{n}.$$

On reconnaît le double du *nombre de translation de Poincaré* $\tau(\tilde{f})$ de $\tilde{f}$.

En résumé, le groupe $\widetilde{\text{Homéo}}(S^1)$ se trouve muni d'une part d'un quasi-morphisme non homogène à valeurs entières que nous noterons $\mathcal{C}:\widetilde{\text{Homéo}}(S^1) \to \mathbb{Z}$ défini par $\mathcal{C}(\tilde{f}) = 2E(\tilde{f}(0))$ et qui est la primitive du cocycle ordre cyclique; d'autre part, d'un quasi-morphisme homogène à valeurs réelles $\tau:\widetilde{\text{Homéo}}(S^1) \to \mathbb{R}$; le nombre de translation de Poincaré.

Nous avons la relation

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathcal{C}((\tilde{f})^n) = 2\tau(\tilde{f}).$$

De plus la classe de cohomologie entière (resp. réelle) définie par le cobord de $\mathcal{C}$ (resp. de τ) est le double de la classe d'Euler (resp. la classe d'Euler réelle).

En considérant le cercle S^1 comme la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ on obtient un plongement du groupe $\text{PSL}(2,\mathbb{R})$ dans le groupe $\text{Homéo}^+(S^1)$. Ce plongement induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux d'où le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widetilde{\text{PSL}}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{PSL}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{Id} & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Homéo}}^+(S^1) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Homéo}}^+(S^1) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Nous noterons encore $\mathcal{C}$ et τ les restrictions à $\widetilde{\text{PSL}}(2,\mathbb{R})$ des deux fonctions précédemment définies.

Le groupe discret $\text{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$. L'extension:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\text{PSL}}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{PSL}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

obtenue par restriction à $\text{PSL}(2,\mathbb{Z})$ de la situation réelle, engendre le groupe

$$H^2(\text{PSL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/6.$$

En particulier, la multiplication par 6 de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ se prolonge en un unique homomorphisme $\varrho:\widetilde{\text{PSL}}(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. Nous noterons $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}: \text{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ la fonction définie par:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(A) = \mathcal{C}(\tilde{A}) - \tfrac{1}{3}\varrho(\tilde{A}) \in \tfrac{1}{3}\mathbb{Z}$$

et $\tau_{\mathbb{Z}}: \text{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$\tau_{\mathbb{Z}}(A) = \tau(\tilde{A}) - \tfrac{1}{6}\varrho(\tilde{A})$$

où $\tilde{A}$ est un relevé quelconque de A dans $\widetilde{\text{PSL}}(2,\mathbb{Z})$.

Remarque 1.4. Dans la partie B-3, nous étudierons des invariants définis sur $\text{SL}(2,\mathbb{R})$ et non plus sur $\text{PSL}(2,\mathbb{R})$. On peut aussi plonger $\text{SL}(2,\mathbb{R})$ dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ en considérant l'action sur les *demi-droites* issues de l'origine de $\mathbb{R}^2$. Nous choisirons comme point base sur ce nouveau cercle la demi-droite passant par $(1,0)$. Nous noterons ord′ le 2-cocycle induit par ord sur $\text{SL}(2,\mathbb{R})$ par ce plongement. Sa primitive $\mathcal{C}':\widetilde{\text{SL}}(2,\mathbb{R}) = \widetilde{\text{PSL}}(2,\mathbb{R}) \to \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ diffère de $\mathcal{C}$ par la formule suivante. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2,\mathbb{R})$ et $\tilde{A}$ un relevé dans $\text{SL}(2,\mathbb{R})$. Nous avons:

$$\mathcal{C}'(\tilde{A}) - 2\mathcal{C}(\tilde{A}) = \text{sign}(c),$$

où, bien sûr, sign(c) vaut 0 si $c = 0$, $+1$ si $c > 0$ et -1 si $c < 0$.

De même, on définit une fonction $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}}: \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \frac{1}{3}\mathbb{Z}$. On a la formule:

$$\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}}(A) = 2\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(\pi(A)) + \mathrm{sign}(c)$$

où $\pi: \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est la projection.

Dans la suite, nous allons identifier trois fonctions sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, à vrai dire, deux sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et une sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Il s'agit d'abord de l'ambiguïté du logarithme de la fonction η de Dedekind, puis du défaut de signature de Hirzebruch pour les variétés de dimension 3 et enfin de la fonction de Rademacher.

Dans ces trois cas la stratégie sera la même. Le cobord de ces fonctions se prolongera naturellement en un 2-cocycle borné sur le groupe *uniformément parfait* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. La connaissance de la classe de cohomologie *ordinaire* de ce 2-cocycle déterminera la fonction (à une quantité bornée près).

B-2 La fonction η de Dedekind

Pour s dans le demi-plan complexe supérieur $\mathscr{H}$, on définit:

$$\eta(s) = e^{\frac{i\pi s}{12}} \prod_1^\infty (1 - e^{2i\pi ns}) \quad [\mathrm{De}].$$

La puissance 24-ième de la fonction η est une forme modulaire de poids 12. En particulier si $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément du groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, on a:

$$\eta^{24}(As) = [(cs+d)^2]^6 \eta^{24}(s)$$

et donc

$$(\log \eta^{24})(As) = (\log \eta^{24})(s) + 6\log(cs+d)^2 + 2i\pi\chi(A), \qquad \chi(A) \in \mathbb{Z},$$

où $\log \eta^{24}$ est n'importe quelle détermination continue, tandis que $\log(cs+d)^2$ est la détermination dont la partie imaginaire appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$. Ce choix assure pour tout c et d, la continuité en s de cette fonction et l'entier $\chi(A)$ est donc bien indépendant de s. C'est cette quantité que nous voulons redéterminer avec nos méthodes.

Le cobord de la fonction. $\chi: \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$.

Pour $s \in \mathscr{H}$ et $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, posons:

$$j_s(A) = \frac{1}{(cs+d)^2} = A'(s)$$

et

$$\log(j_s(A)) = -\log(cs+d)^2 \in]-2\pi, 0]$$

On a alors:

$$j_s(AB) = j_{Bs}(A) \cdot j_s(B)$$

et

$$\log(j_s(AB)) = \log(j_{Bs}(A)) + \log(j_s(B)) + 2i\pi c(A,B)$$

où, là encore, l'entier $c(A, B)$ évidemment borné par 1 est indépendant de s. Lorsque A et B appartiennent à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ on a évidemment la relation:

$$d\chi(A, B) = \chi(AB) - \chi(A) - \chi(B) = 6c(A, B).$$

Nous avons donc prolongé le cobord de la fonction χ en un 2-cocycle borné (par 6) sur le groupe uniformément parfait $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. On pourra comparer ce fait à [As].

Lemme 2.1. *La classe de cohomologie du cocycle $c(A, B)$ est la classe d'Euler.*

Preuve. Puisque c est un cocycle mesurable, la classe de cohomologie qu'il définit est un multiple de la classe d'Euler [Ma]. Il suffit donc de déterminer cette classe en restriction au sous-groupe $SO(2)$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ constitué des rotations autour de $i = \sqrt{-1}$. La définition de $c(A, B)$ montre alors qu'il définit l'extension:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow S^1 = SO(2) \longrightarrow 0. \quad \square$$

On obtient alors une détermination de $\chi(A)$ «à 6 près».

Proposition 2.2. (1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \chi(A^n) = 6\tau_{\mathbb{Z}}(A)$.

(2) $|\chi(A) - 6\tau_{\mathbb{Z}}(A)| \leqq 6$. $\square$

Si l'on veut un calcul complet de la valeur $\chi(A)$, il faut travailler un peu plus.

Lemme 2.3. *Soient A et $B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Posons*

$$\theta_1 = \frac{j_s(B)}{|j_s(B)|} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{j_s(AB)}{|j_s(AB)|}.$$

Alors:

$$\mathrm{ord}(1, \theta_1, \theta_2) = \mathrm{ord}(\infty, A(\infty), AB(\infty))$$

où le membre de gauche est l'ordre sur le cercle des complexes de module 1, tandis que celui de droite est l'ordre sur le bord du demi-plan du Poincaré. (On note ∞ le point à l'infini de ce bord.)

Preuve. Il s'agit de comparer les deux trivialisations naturelles du fibré unitaire tangent au demi-plan de Poincaré. La première est donnée par les translations de $\mathbb{C}$; c'est elle qui donne un sens à l'égalité $j_s(B) = B'(s)$. La deuxième consiste à associer à un vecteur unitaire l'extrémité à l'infini de la demi-géodésique issue de ce vecteur. On a la fig. 2.

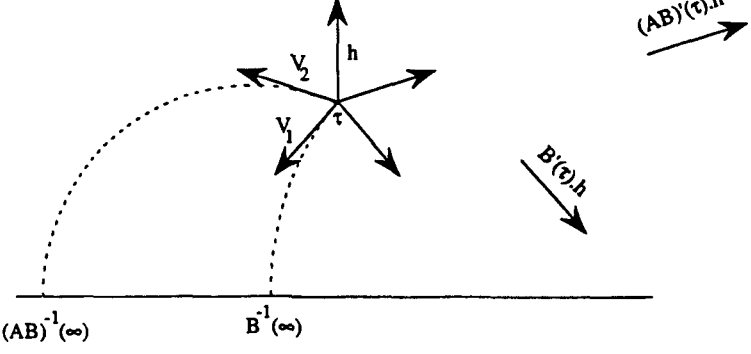


Fig. 2

Soit h le vecteur tangent au point τ dans la direction du point ∞. Les symétriques par rapport à h des translatés de $B'(\tau)\cdot h$ et $(AB)'(\tau)\cdot h$ sont respectivement de direction $B^{-1}(\infty)$ et $(AB)^{-1}(\infty)$. On a donc:

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(1,\theta_1,\theta_2) &= \operatorname{ord}(h, B'(\tau)h, (AB)'(\tau)h)\\ &= -\operatorname{ord}(h, V_1, V_2)\\ &= -\operatorname{ord}(\infty, B^{-1}(\infty), (AB)^{-1}(\infty))\\ &= \operatorname{ord}(\infty, A(\infty), AB(\infty))\,.\quad \square\end{aligned}$$

Lemme 2.4. *Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls et* log *est la détermination de partie imaginaire appartenant à $]-2\pi, 0]$, posons:*

$$\log z_2 = \log\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \log z_1 + 2i\pi c(z_1, z_2)\,.$$

Alors:

$$\operatorname{ord}\left(1, \frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right) - 2c(z_1, z_2) = f(z_1 z_2) - f(z_1) - f(z_2)$$

où $f:\mathbb{C}^* \to \mathbb{Z}$ est définie par:

$$\begin{aligned} f(z) &= -1 \quad si\ \frac{z}{|z|} \neq 1\\ &= -2 \quad sinon\,.\quad \square\end{aligned}$$

On obtient alors, grâce à 2.3 et 2.4, la détermination de χ:

Théorème 2.5. *Soit* $A = \pm\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. *On a:*

$$\begin{aligned}\chi(A) &= 3(\curvearrowleft_{\mathbb{Z}}(A) - 1) \ \ si \quad c \neq 0\\ &= 3(\curvearrowleft_{\mathbb{Z}}(A) - 2) \ \ si \quad c = 0\,.\quad \square\end{aligned}$$

B-3 Défaut de signature de Hirzebruch et cocycle signature de Meyer

Ce paragraphe fournit un calcul de la signature d'une variété orientée de dimension 4 fibrée en tores T^2 sur une surface avec ou sans bord.

A toute variété M de dimension 3, fermée, et munie d'une parallélisation stable t de son fibré tangent stable, Hirzebruch associe un entier $\delta(M,t)$ appelé défaut de signature et défini comme suit [H 1, H 2]. Soit W^4 une variété compacte orientée de bord M et soit $p_1(W,M) \in H^4(W,M;\mathbb{Z})$ la première classe de Pontryagin du fibré sur W/M construit à partir du fibré tangent à W et de la trivialisation t de sa restriction au bord M. Soit $\sigma(W)$ la signature de W. La formule de Hirzebruch pour la signature des variétés fermées de dimension 4 ainsi que l'additivité des signatures de Novikov montrent que l'entier $3\sigma(W) - \langle p_1(W,M), [W,M]\rangle$ ne dépend que du couple (M,t) (où $[W,M]$ désigne la classe fondamentale relative). On le note $\delta(M,t)$.

Pour $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, notons T_A le fibré en tores T^2 sur le cercle S^1, de monodromie A. Tout chemin γ joignant A^{-1} à l'identité dans le groupe connexe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ fournit une trivialisation stable $t(\gamma)$ de la 3-variété T_A. Il est facile de s'assurer que le nombre $\delta(T_A, t(\gamma))$ est en fait indépendant du choix du chemin γ reliant A^{-1} à l'identité [par

exemple parce que l'influence de ces choix transite par le groupe $\pi_1(SO) \simeq \mathbb{Z}/2]$. Nous le noterons donc $\delta(A)$ et comme précédemment nous voulons le déterminer.

Le cobord de la fonction δ. Soient $A, B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Notons P la sphère S^2 privée de trois disques. La donnée de A et B permet de construire un fibré en tores W, de base P, grâce à la représentation du groupe fondamental de P dans le groupe des difféomorphismes du tore donnée par A et B. La variété W est un cobordisme stablement parallélisé entre $T_A \cup T_B$ et T_{AB} et donc:

$$\delta(AB) - \delta(A) - \delta(B) = 3\sigma(W)$$

que nous noterons $3\sigma(A,B)$ et que nous appellerons le *cocycle signature.*

Malheureusement, le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ n'est pas uniformément parfait et la remarque fondamentale ne s'applique pas. Cependant, Meyer [Me] a constaté que le cocycle signature se prolonge naturellement au groupe uniformément parfait $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. En effet, la donnée de deux matrices A et B de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ fait de $\mathbb{R}^2$ un module, noté $\mathfrak{R}^2$, sur l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[\pi_1(P)]$ (P est toujours la sphère S^2 privée de trois disques). Le cup produit

$$H^1(P,\partial P;\mathfrak{R}^2) \times H^1(P,\partial P;\mathfrak{R}^2) \longrightarrow H^2(P,\partial P;\mathfrak{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}^2)$$

est une forme alternée. En composant par la flèche $\pi_1(P)$-équivariante $\mathfrak{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par la structure symplectique canonique de $\mathbb{R}^2$, on obtient une forme bilinéaire *symétrique* sur $H^1(P,\partial P;\mathfrak{R}^2)$. Dans le cas où A et B sont des éléments de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, la suite spectrale de la fibration W montre que la signature de cette forme coïncide avec celle de la variété W. Nous la noterons donc encore $\sigma(A,B)$. L'additivité de Novikov s'adapte à ce contexte et montre donc que $\sigma(A,B)$ est un 2-cocycle borné (a priori par 4) sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Pour appliquer les résultats de la partie A il nous suffit, d'une part, d'identifier la classe de cohomologie *ordinaire* définie par σ ceci a été fait par plusieurs auteurs [Me, At 1–2, Tu], d'autre part de déterminer le 2-cocycle σ, en restriction aux sous-groupes monogènes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (voir formule A-7).

Dans [Me], Meyer décrit la forme bilinéaire symétrique sur le groupe $H^1(P,\partial P;\mathfrak{R}^2)$. La dualité de Poincaré identifie ce groupe à

$$H_1(P;\mathfrak{R}^2) \simeq H_1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z};\mathfrak{R}^2)\,.$$

Ce dernier espace est isomorphe au noyau K de l'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$(u,v) \mapsto (A^{-1} - \mathrm{Id})u + (B - \mathrm{Id})v$$

et la forme bilinéaire associée est la restriction au sous-espace K de:

$$b((u,v);(u',v')) = \det(u+v,(\mathrm{Id}-B)v') \quad [\mathrm{Me}]\,.$$

Lemme 3.1. *Supposons que les matrices A et B commutent et que $A - \mathrm{Id}$ soit inversible. Alors le noyau K précédent est le dimension 2 et la forme bilinéaire b est isométrique à $b' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par:*

$$b'(x,y) = -\det[(AB - (AB)^{-1}) - (A - A^{-1}) - (B - B^{-1})x, y]\,.$$

Preuve. On paramètre K par $\alpha : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} K$

$$\alpha(x) = ((\mathrm{Id}-B)x, (A^{-1} - \mathrm{Id})x)\,. \quad \square$$

Corollaire 3.2. *Si A et B sont deux rotations d'angle α et β, on a:*

$$\begin{aligned}\sigma(A,B) &= 2\,\mathrm{sign}(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta))\\ &= 2\,\mathrm{ord}'(A,B)\quad\text{(voir remarque B-1.4)}.\end{aligned}$$

Preuve. Lorsque $A = \mathrm{Id}$, il est directement évident que $\sigma(\mathrm{Id},B) = 0$. Sinon, on applique le lemme 3.1. □

Corollaire 3.3. *La classe de cohomologie définie par le 2-cocycle σ est 4 fois celle définie par l'extension*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow 1\,.$$

Preuve. Puisque le cocycle σ est mesurable, la classe de cohomologie qu'il définit est un multiple de celle de l'extension ci-dessus. Le corollaire 3.2 montre qu'en restriction à $SO(2)$, le cocycle σ définit le quadruple de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow SO(2) \longrightarrow 0\,.\quad\square$$

Corollaire 3.4. *Soient A et B deux éléments elliptiques qui commutent dans* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. *Alors:*

$$\sigma(A,B) = 2\,\mathrm{ord}'(A,B)\,.$$

Preuve. Les deux membres de l'égalité sont invariants par conjugaison. On applique alors 3.2. □

Lemme 3.5. *Soient A et B deux éléments hyperboliques qui commutent dans* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. *Alors:*

$$\sigma(A,B) = 0\,.$$

Preuve. Lorsque $B \neq A^{-1}$ la forme b' (voir 3.1) est non dégénérée. Tout vecteur propre commun à A et B est isotrope. La signature est donc nulle. Il est par ailleurs évident que $\sigma(A,A^{-1}) = 0$. □

Le cas des éléments paraboliques ne serait pas difficile à traiter de manière analogue. Dans la partie C, nous aurons à traiter le cas général des éléments unipotents du groupe symplectique et nous renvoyons donc à cette partie.

Résumons les résultats obtenus sous la forme de deux théorèmes.

Théorème 3.6. *Soient A et B deux éléments de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *tels que A, B et AB sont non paraboliques. Alors:*

$$\sigma(A,B) = \Phi(\tilde{A}\tilde{B}) - \Phi(\tilde{A}) - \Phi(\tilde{B})$$

où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des relevés arbitraires de A et B dans $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ *et où:*

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{A}) &= 2\mathcal{C}'(\tilde{A}) \quad \textit{si } A \textit{ est elliptique}\\ &= 8\tau(\tilde{A}) \quad \textit{si } A \textit{ est hyperbolique}\,.\quad\square\end{aligned}$$

Théorème 3.7. *Soit A un élément de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. *Le défaut de signature de Hirzebruch $\delta(A)$ est donné par:*

$$\begin{aligned}\delta(A) &= 6\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}}(A) \quad \textit{si } A \textit{ est elliptique}\\ &= 24\tau_{\mathbb{Z}}(A) \quad \textit{si } A \textit{ est hyperbolique}\,.\quad\square\end{aligned}$$

Ainsi, ces théorèmes permettent de calculer la signature d'un fibré en tores T^2 au-dessus d'une sphère moins trois disques. Pour le cas plus général où la base est une surface compacte à bord, il suffit de la «décomposer en pantalons» et d'ajouter les résultats obtenus.

B-4 Cocycles de Brooks et fonction de Rademacher

Ce paragraphe est destiné à calculer numériquement ces invariants $\tau_{\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$. Il en résultera donc un calcul explicite des fonctions χ et δ étudiées précédemment.

Dans [Br], Brooks donne des exemples de quasi-morphismes définis sur le groupe libre $L(\alpha, \beta)$ à deux générateurs. Soit w un mot réduit quelconque en $\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}$. Si γ est un élément du groupe libre $L(\alpha, \beta)$ on note $\eta_w(\gamma)$ le nombre de fois que le mot réduit représentant γ contient w comme sous-mot. On définit alors $N_w : L(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{Z}$ par:

$$N_w(\gamma) = \eta_w(\gamma) - \eta_{w^{-1}}(\gamma).$$

Il est facile de constater que ces N_w sont bien des quasi-morphismes.

Rappelons ici que le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, est engendré par:

$$A = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un élément γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ s'écrit donc de façon unique: $\gamma = B^{\varepsilon_0} A B^{\varepsilon_1} \ldots B^{\varepsilon_{\nu+1}}$ avec $\varepsilon_0, \varepsilon_{\nu+1} \in \{-1, 0, 1\}$ et $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ pour $j \neq 0$ et $j \neq \nu + 1$. D'une manière analogue à Brooks, définissons:

$$R : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

par:

$$R(\gamma) = \sum_{i=0}^{\nu+1} \varepsilon_i .$$

C'est évidemment un quasi-morphisme que nous appellerons la *fonction de Rademacher* pour des raisons qui apparaîtront prochainement.

Une façon agréable de décrire les quasi-morphismes de Brooks se trouve dans [B-G] dans le contexte des groupes agissant sur les arbres réels. Nous en décrivons ici une variante bien adaptée à notre contexte.

Il existe un arbre naturel, plongé dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ et sur lequel $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ opère [Se]. Cet arbre T est l'orbite sous $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ du segment géodésique joignant $j = \sqrt[3]{-1}$ et $i = \sqrt[2]{-1}$. Si, p et q appartiennent à l'orbite de i, l'unique géodésique de T, joignant p à q est en fait une géodésique brisée de $\mathcal{H}$. Les discontinuités de la dérivée correspondent aux points de l'orbite de j et sont de deux types (fig. 3 et 4).

On pose $\angle(p, q)$ égal au nombre de virages à gauche diminué du nombre de virages à droite. C'est aussi $\dfrac{3}{2\pi}$ fois la variation de l'angle du vecteur tangent lorsqu'on le transporte parallèlement le long de l'arc pq.

Remarque 4.1. Si p, q, r sont trois points de l'orbite de i dans T, la quantité $\angle(p, q) + \angle(q, r) + \angle(r, p)$ est égale à 0, $+3$ ou -3 suivant que p, q, r sont alignés, dans un ordre cyclique positif ou négatif autour du centre ω du tripode p, q, r (voir fig. 5).

Cette assertion est bien sûr une version combinatoire très simple du théorème de Gauss-Bonnet.

Les propriétés suivantes sont claires:

(1) $R(\gamma) = \angle(i, \gamma(i))$ pour tout γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

(2) $\angle(\alpha(i), \gamma(\alpha(i))) = R(\alpha^{-1}\gamma\alpha)$ pour tout γ, α de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

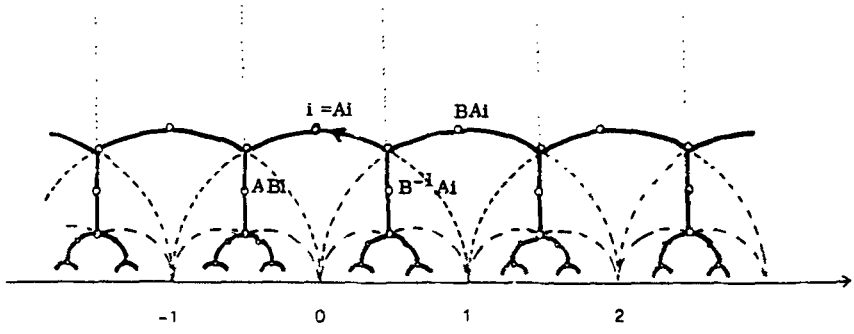
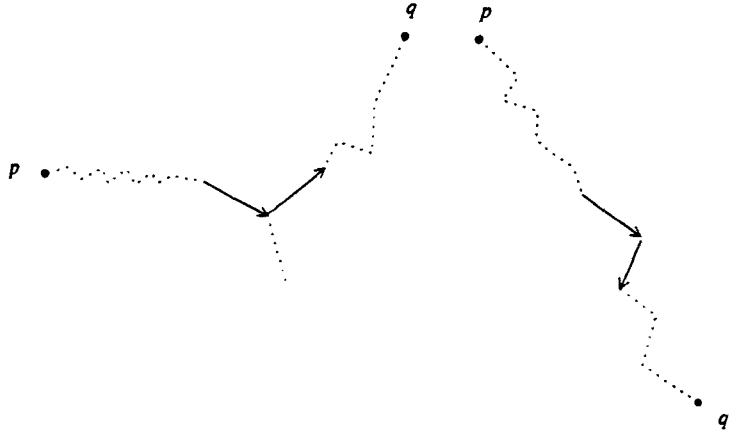


Fig. 3



virage à gauche virage à droite

Fig. 4

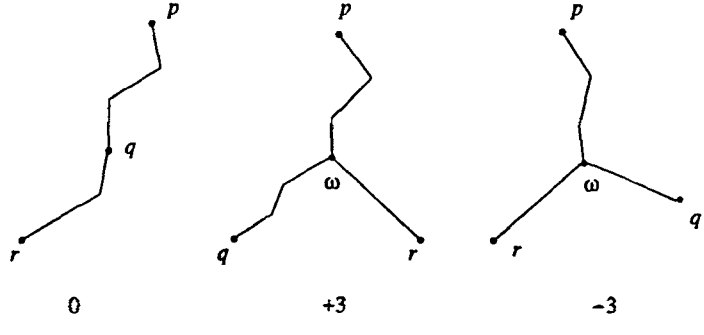


Fig. 5

Cette deuxième égalité va nous permettre de donner un sens à l'expression $\mathcal{C}(\infty, \gamma(\infty))$ où ∞ désigne le point à l'infini du bord du demi-plan de Poincaré. Si $\alpha = BA$, la suite $\alpha^n(i)$ tend vers le point ∞. La suite $R(\alpha^{-n}\gamma\alpha^n)$ est constante à partir d'un certain rang pour tout γ.

Nous noterons sa limite $R_\infty(\gamma)$. Il résulte par ailleurs de la remarque 4.1 que

$$R_\infty(\gamma_1\gamma_2) - R_\infty(\gamma_1) - R_\infty(\gamma_2) = 3\,\mathrm{ord}(\infty, \gamma_1(\infty), \gamma_1\gamma_2(\infty))\,.$$

On obtient alors:

Théorème 4.2. (1) $\lim_{n\to+\infty} R((BA)^{-n}\gamma(BA)^n) = 3\measuredangle_{\mathbb{Z}}(\gamma)$.

(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} R(\gamma^n) = 6\tau_{\mathbb{Z}}(\gamma)$.

Preuve. (1) Les deux membres de l'égalité ont le même cobord.

(2) C'est la version homogénéisée de (1). □

Remarque 4.3. Le théorème précédent est un «calcul numérique» de ces invariants $\measuredangle_{\mathbb{Z}}$ et $\tau_{\mathbb{Z}}$. En effet, le calcul des limites mentionnées dans le théorème est très simple. Par exemple, si l'écriture de γ comme mot en A et B commence par A et finit par A, on a évidemment:

$$3\measuredangle_{\mathbb{Z}}(\gamma) = R(\gamma)\,.$$

De la même manière, si γ commence par A et finit par B, on a:

$$6\tau_{\mathbb{Z}}(\gamma) = R(\gamma)\,.$$

Tous les autres cas se traiteraient de manière analogue. Par ailleurs, la définition précédente de $R(\gamma)$ comme $\measuredangle(i, \gamma(i))$ montre que son calcul est algorithmiquement très simple.

Remarque 4.4. Une façon géométrique d'interpréter $\tau_{\mathbb{Z}}(\gamma)$ est la suivante. Supposons que γ soit une isométrie hyperbolique. Il existe alors une unique géodésique *de l'arbre* T, globalement invariante par γ et sur laquelle γ agit par translation *de l'arbre*. Soit p un point de l'orbite de i situé sur cette géodésique. La fig. 6 montre que:

$$\tau_{\mathbb{Z}}(\gamma) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} R(\gamma^n) = \measuredangle(p, \gamma p)\,.$$

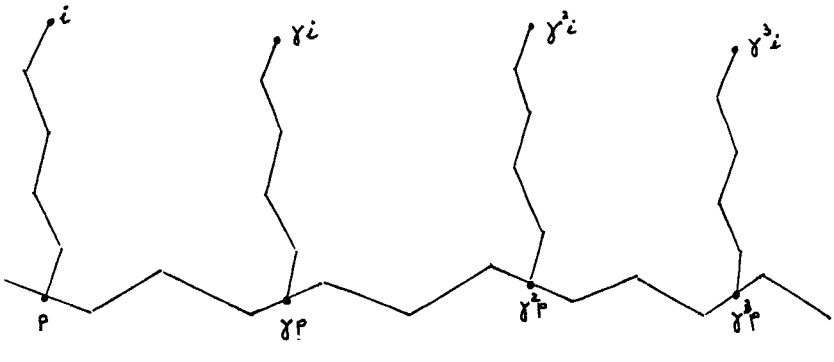


Fig. 6

La fonction R a été introduite par Rademacher, dans son étude sur le logarithme de la fonction η de Dedekind [Ra, R-G]. Rademacher définit une fonction sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ par:

$$R\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{b}{d} & \text{si } c = 0 \\ \dfrac{a+d}{c} - 12\,\mathrm{sign}(c)s(a,|c|) - 3\,\mathrm{sign}(c(a-d)) & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

où $s(h,k) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)$ $(h,k) = 1$, $k > 0$ avec

$$((x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ x - [x] - \frac{1}{2} = x - E(x) & \text{sinon;} \end{cases}$$

puis montre, par des calculs assez longs, que cette fonction coïncide avec celle définie plus haut.

En ces termes de sommes de Dedekind, une formule a déjà été donnée pour le calcul du nombre de translation d'un élément de $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{Z})$. Cette formule est citée dans [Wa] et attribuée à Boyer.

C Le groupe symplectique, la classe de Maslov et le cocycle signature de Meyer

C-1 La classe de Maslov et trois quasi-morphismes définis sur $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$

Commençons par quelques rappels et notations (pour plus de détails, on pourra consulter [A-M]). Soit n un entier positif. Munissons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ de coordonnées $q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ et considérons la forme symplectique standard ω sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par:

$$\omega((q_\alpha,p_\alpha),(q'_\alpha,p'_\alpha)) = \sum_{\alpha=1}^{n} \begin{vmatrix} q_\alpha & q'_\alpha \\ p_\alpha & p'_\alpha \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ le groupe symplectique formé des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$ qui préservent ω et par $\mathrm{PSp}(2n,\mathbb{R})$ le quotient de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ par son centre $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Proposition 1.1. *Le groupe* $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ *est uniformément parfait.*

Preuve. Si a est un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$, nous noterons t_a la transvection symplectique définie par:

$$t_a(x) = x + \omega(x,a)a\,.$$

Soit g un élément de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ tel que $g(a) = \sqrt{2}\cdot a$. On a alors:

$$t_a = (t_a)^2 t_a^{-1} = t_{\sqrt{2}\cdot a}\cdot t_a^{-1} = g t_a g^{-1} t_a^{-1}\,.$$

Ainsi t_a est un commutateur dans $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. La proposition est alors une conséquence du fait que tout élément de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ est le produit d'au plus $2n$ éléments du type $t_a^{\pm 1}$ (voir [Di]). □

Un sous-espace L de $\mathbb{R}^{2n}$, de dimension n est un *lagrangien* si la restriction de ω à $L\times L$ est identiquement nulle. Nous noterons Λ_n la grassmannienne lagrangienne, c'est-à-dire l'espace de tous les lagrangiens. Bien sûr $\mathrm{PSp}(2n,\mathbb{R})$ opère sur Λ_n.

On peut identifier $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$ par les coordonnées $z_\alpha = q_\alpha + ip_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Le groupe unitaire $U(n)$, préservant la forme hermitienne $\sum z_\alpha \bar{z}_\alpha$, est alors contenu dans $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et opère transitivement sur Λ_n. Le stabilisateur de cette action est le groupe orthogonal $O(n)$ de sorte que Λ_n s'identifie à $U(n)/O(n)$. Le carré du déterminant donne une fibration:

$$\det^2 : \Lambda_n = U(n)/O(n) \to S^1 \subset \mathbb{C}^* .$$

La fibre, difféomorphe à $SU(n)/SO(n)$, est simplement connexe. La fibration $\det^2$ induit donc un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.

Désignons par $\pi : \tilde{\Lambda}_n \to \Lambda_n$ le revêtement universel. Soit $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ le sous-groupe constitué des homéomorphismes de $\tilde{\Lambda}_n$ qui relèvent les éléments de $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ considérés comme agissant sur Λ_n. On a bien sûr une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow 1 .$$

Il se trouve que $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ est aussi le revêtement universel de $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$. La classe de cohomologie qui définit cette extension, élément de $H^2(\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R}); \mathbb{Z})$ est, par définition, la *classe de Maslov*. C'est aussi le générateur du second groupe de cohomologie borélienne de $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ [Ma].

Dans le cas où $n = 1$, les considérations précédentes mènent bien sûr à l'extension:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

que nous avons considérée dans la première partie. Dans ce cas, la classe de Maslov coïncide avec la classe d'Euler et Λ_1 n'est autre qu'un cercle. Les quasi-morphismes que nous avons construits sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ provenaient essentiellement de la modification E de la partie entière, ou encore du choix d'un domaine fondamental pour l'action des translations entières sur la droite. Pour généraliser cette construction à $\tilde{\Lambda}_n$, plusieurs méthodes sont possibles et vont mener à divers quasi-morphismes.

La première méthode est certainement la plus naïve. Soit $*$ le plan lagrangien $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $\tilde{*}$ un relevé de $*$ dans $\tilde{\Lambda}_n$. Soit

$$\widetilde{\det}^2 : \tilde{\Lambda}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

le relevé de $\det^2 : \Lambda_n \longrightarrow S^1$ tel que $\widetilde{\det}^2(\tilde{*}) = 0$. On définit alors une fonction $\Phi_{\det}$ sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ par:

$$\Phi_{\det}(\tilde{g}) = \widetilde{\det}^2(\tilde{g}(\tilde{*})) \in \mathbb{R} .$$

Pour mieux décrire $\Phi_{\det}$, nous introduisons la fonction $\varphi_{\det}$ définie sur $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ par:

$$\varphi_{\det}(g) = \det^2(g(*)) \in S^1 \subset \mathbb{C}^* .$$

Les éléments de $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ s'écrivent sous la forme $\pm \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où les blocs A, B, C, D sont tels que $B^t A$ et $C^t D$ sont symétriques et $A^t D - B^t C = \mathrm{Id}$. Les éléments de $PU(n)$ sont ceux pour lesquels $A = D$ et $B = -C$, identifiés à la matrice complexe $\pm(A - iB) \in \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$. Soit donc $g = \pm \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et calculons

$\varphi_{\det}(g)$. Soit $r = \begin{pmatrix} A' & B' \\ -B' & A' \end{pmatrix} \in U(n)$ tel que $r(*) = g(*)$. La matrice $g^{-1}r$ est donc du type $\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ 0 & C'' \end{pmatrix}$ d'où il résulte que:

$$A' = AA'' \quad \text{et} \quad B' = CA''$$

et donc:

$$(A' - iB') = (A - iC)A''.$$

On obtient donc une formule explicite pour $\varphi_{\det}$:

$$\varphi_{\det}\left(\pm\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det^2(g(*)) = \det^2 r = \det(A' - iB')^2$$
$$= \frac{\det(A - iC)^2}{|\det(A - iC)^2|} \in S^1 \subset \mathbb{C}.$$

La fonction $\Phi_{\det}$, quant à elle, est bien sûr le relevé continu de $\varphi_{\det}$ à $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ qui est nul sur l'élément neutre.

Proposition 1.2. *La fonction $\Phi_{\det}$ est un quasi-morphisme.*

Preuve. Rappelons que le domaine de Siegel $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des matrices $n \times n$, symétriques et à coefficients complexes, dont la partie imaginaire est définie positive [Si]. Le groupe $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ opère sur $\mathfrak{S}_n$ par:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot Z = (DZ - B)(-CZ + A)^{-1}$$

[cette action diffère de l'action usuelle par l'automorphisme $g \to {}^t g^{-1}$ de $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$].

Si $g = \pm\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ et $Z \in \mathfrak{S}_n$, on pose:

$$j(g, Z) = \det(-CZ + A)^2 \in \mathbb{C}^*.$$

Il est immédiat de vérifier, de manière analogue à B-2 que:

$$j(g_1 g_2, Z) = j(g_1, g_2 \cdot Z) j(g_2, Z).$$

Ainsi, si l'on pose:

$$\theta_Z : g \in \mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R}) \mapsto \frac{j(g, Z)}{|j(g, Z)|} \in S^1 \subset \mathbb{C}^*,$$

on a de même:

$$\theta_Z(g_1 g_2) = \theta_{g_2 \cdot Z}(g_1) \cdot \theta_Z(g_2).$$

Si on introduit les relevés continus $\tilde{\theta}_Z : \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dépendant continûment de Z et tels que $\tilde{\theta}_Z$ de l'élément neutre de $\widetilde{\mathrm{PSp}}(2n, \mathbb{R})$ soit nul, on a:

$$\tilde{\theta}_Z(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) = \tilde{\theta}_{g_2 \cdot Z}(\tilde{g}_1) + \tilde{\theta}_Z(\tilde{g}_2)$$

et l'aplication $\tilde{\theta}_{i\,\mathrm{Id}}$ coïncide avec l'application $\Phi_{\det}$ dont il s'agit de montrer qu'elle est un quasi-morphisme. Il faut donc montrer que:

$$|\tilde{\theta}_{g_2 \cdot i\,\mathrm{Id}}(g_1) - \tilde{\theta}_{i\,\mathrm{Id}}(g_1)|$$

est majoré par une constante qui ne dépend que de n. Pour cela, considérons deux éléments Z_0 et Z_1 de $\mathfrak{S}_n$ et $g \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. L'application

$$t \in [0, 1] \mapsto j_{(1-t)Z_0+tZ_1}(g) \in \mathbb{C}^*$$

est polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n$. Il existe donc au plus $2n$ valeurs de t où elle prend des valeurs réelles (à moins qu'elle ne soit réelle pour tout t). Par conséquent, la variation de l'argument de $j_{(1-t)Z_0+tZ_1}(g)$ lorsque t varie de 0 à 1 est inférieure à $(2n + 1)\pi$. En d'autres termes:

$$|\tilde{\theta}_{Z_0}(g) - \tilde{\theta}_{Z_1}(g)| \leqq n + \tfrac{1}{2}. \quad \square$$

Le 2-cocycle borné c_{det} défini sur $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ par:

$$c_{\mathrm{det}}(g_1, g_2) = \Phi_{\mathrm{det}}(\tilde{g}_1\tilde{g}_2) - \Phi_{\mathrm{det}}(\tilde{g}_1) - \Phi_{\mathrm{det}}(\tilde{g}_2)$$

où $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ relèvent g_1 et g_2, représente bien sûr la classe de Maslov. En remplaçant Φ_{det} par sa partie entière, on obtiendrait un 2-cocycle *entier* représentant lui aussi la classe de Maslov et prenant des valeurs inférieures à $n + 1$.

Une deuxième méthode pour déterminer un 2-cocycle représentant la classe de Maslov a été utilisée par Dupont, Guichardet et Wigner [Du, D-G, G-W]. Soit

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = U(n) \cdot P$$

la décomposition de Cartan de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. En prenant le carré du déterminant de la composante sur $U(n)$, on obtient une application:

$$\varphi_{\mathrm{DGW}} : \mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R}) \to S^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

Dupont, Guichardet et Wigner montrent que si $g = \pm \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on a:

$$\varphi_{\mathrm{DGW}}(g) = \frac{\det(A + D + iB - iC)^2}{|\det(A + D + iB - iC)^2|} \in S^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

L'application $\Phi_{\mathrm{DGW}} : \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ obtenue par relèvement continu est, elle aussi, un quasi-morphisme comme il est montré par Dupont [Du]. Nous ne détaillerons pas ces constructions car nous n'en aurons pas besoin par la suite. On pourra aussi consulter [He, Ya, Y-S]. Il faut rapprocher ces résultats de [D-T] où il est montré (entre autres) que l'aire symplectique d'un triangle géodésique de l'espace de Siegel est uniformément bornée.

Une troisième mèthode pour déterminer un 2-cocycle représentant la classe de Maslov utilise une construction de domaine fondamental dans $\tilde{\Lambda}_n$ décrite par Arnold [Ar] et que nous allons rappeler rapidement.

Si α est un lagrangien de Λ_n, nous noterons $t(\alpha)$ l'ensemble des lagrangiens β qui ne sont pas transverses à α. C'est une sous-variété orientée et stratifiée de codimension 1 et dont le lieu singulier est de codimension supérieure ou égale à 2. La classe d'homlogie correspondante est Poincaré duale du générateur de $H_1(\Lambda_n; \mathbb{Z})$. Rappelons aussi que l'ensemble des lagrangiens transverses à un lagrangien donné β est naturellement un espace affine (sur l'espace vectoriel des formes quadratiques sur α où α est n'importe quel lagrangien transverse à β). Il en résulte que le complémentaire de l'image inverse $\widetilde{t(\beta)}$ de $t(\beta)$ dans $\tilde{\Lambda}_n$ est une réunion disjointe d'ouverts contractiles permutés par l'action du groupe $\mathbb{Z}$ engendré par T, groupe du revêtement cyclique $\pi : \tilde{\Lambda}_n \to \Lambda_n$.

Au voisinage du point α de $t(\alpha)$, les éléments de Λ_n correspondent à des formes quadratiques et les éléments de $t(\alpha)$ aux formes dégénérées. Ainsi $t(\alpha)$ disconnecte localement Λ_n en $(2n+1)$ composantes connexes au voisinage de α, suivant la signature de la forme quadratique associée. L'une de ces composantes est privilégiée; c'est celle qui correspond aux formes définies positives. Ceci permet à Arnold de définir un indice $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{Z}$ pour deux éléments $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ tels que $\pi(\tilde{\alpha}) = \alpha$ et $\pi(\tilde{\beta}) = \beta$ soient transverses. Il suffit de joindre $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ par un chemin $\tilde{c}$ dans $\tilde{\Lambda}_n$. La projection c de $\tilde{c}$ dans Λ_n joint α et β. On fait suivre c par un petit chemin joignant β à un point proche de β situé dans la composante privilégiée que nous avons décrite. L'indice $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ est alors défini comme le nombre d'intersection de ce chemin avec $t(\beta)$. Il est bien clair que:

$$m(T\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = m(\tilde{\alpha}, T\tilde{\beta}) = m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + 1 .$$

Les composantes de $\tilde{\Lambda}_n - \widetilde{t(\alpha)}$ sont ainsi paramétrées par la valeur de $m(\tilde{\alpha}, -)$.

Il est en fait possible de définir $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ même si $\pi(\tilde{\alpha})$ et $\pi(\tilde{\beta})$ ne sont pas transverses. Le cobord de m s'identifie alors à l'*indice ternaire* de Leray-Kashiwara [Le, L-V] que nous rappelons. Voú aussi [Da].

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont trois lagrangiens, on considère la forme bilinéaire symétrique A définie sur $(\alpha_1 + \alpha_2) \cap \alpha_3$ de la façon suivante: si a et b sont des éléments de $(\alpha_1 + \alpha_2) \cap \alpha_3$ et si x est un élément de α_2 tel que $a - x \in \alpha_1$, alors $A(a, b) = \omega(x, b)$. L'indice ternaire $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la signature de A. Le lien entre m et I est donné par la formule:

$$I(\pi(\tilde{\alpha}), \pi(\tilde{\beta}), \pi(\tilde{\gamma})) = m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + m(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$$

voir [L-V, Le, Ar].

Ainsi, nous pouvons définir la *fonction de Arnold-Maslov*:

$$\Phi_{\mathrm{AM}} : \tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \mapsto m(\tilde{g}(\tilde{*}), \tilde{*}) .$$

Le 2-cocycle associé c_{AM} sur $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ est défini par:

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{AM}}(g_1, g_2) &= \Phi_{\mathrm{AM}}(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) - \Phi_{\mathrm{AM}}(\tilde{g}_1) - \Phi_{\mathrm{AM}}(\tilde{g}_2) \\ &= I(*, g_1(*), g_1 g_2(*)) \end{aligned}$$

où $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ relèvent g_1 et g_2. Ce 2-cocycle entier représente bien entendu la classe de Maslov.

Proposition 1.3. *La fonction de Arnold-Maslov est un quasi-morphisme.*

Preuve. C'est clair car l'indice I est borné par n. □

Le corollaire suivant résulte de notre principe général. Il répond à une question de Turaev [Tu].

Corollaire 1.4. *Les fonctions de Arnold-Maslov, de Dupont-Guichardet-Wigner et $\Phi_{\det}$ diffèrent d'une quantité bornée.* □

C-2 Le nombre de rotation symplectique

Aucune des trois fonctions Φ_{det}, Φ_{DGW} et Φ_{AM} n'est homogène, c'est-à-dire ne vérifie $\Phi(\tilde{g}^k) = k\Phi(\tilde{g})$. Nous introduisons donc le quasi-morphisme homogène correspondant.

Définition 2.1. On appelle *nombre de translation symplectique* d'un élément $\tilde{g}$ de $\widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ le réel défini par:

$$\tau(\tilde{g}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Phi_{\text{det}}(\tilde{g}^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Phi_{\text{AM}}(\tilde{g}^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Phi_{\text{DGW}}(\tilde{g}^k).$$

On appelle *nombre de rotation symplectique* d'un élément g de $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$ l'élément $\varrho(g)$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ défini par:

$$\varrho(g) = \tau(\tilde{g}) \bmod \mathbb{Z}$$

où $\tilde{g}$ est un relevé quelconque de g.

Remarques 2.2. (1) La fonction $\tau : \widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est caractérisée par les propriétés (1), (2) et (3) de la remarque fondamentale de la partie A.

(2) Deux éléments conjugués ont même nombre de translation symplectique.

(3) Si $g \in \text{PSp}(2n, \mathbb{R})$ fixe un lagrangien, alors $\varrho(g) = 0$. C'est clair si ce lagrangien est $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et résulte de la remarque 2 sinon.

(4) La connaissance de τ détermine Φ_{det} et Φ_{AM} à une quantité bornée près. En fait

$$|\tau(\tilde{g}) - \Phi_{\text{det}}(\tilde{g})| \leqq n + 1,$$
$$|\tau(\tilde{g}) - \Phi_{\text{AM}}(\tilde{g})| \leqq n.$$

(5) La définition de ϱ montre que si $g \in PU(n)$, alors $\varrho(g)$ est le carré du déterminant de g si l'on considère S^1 comme le cercle unité dans $\mathbb{C}^*$ ou, plus précisément, $\frac{1}{2\pi}$ fois l'argument de $\det^2 g$ si l'on considère ce cercle comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(6) Le revêtement universel $\tilde{U}(n)$ de $PU(n)$ [sous-groupe de $\widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$] peut être considéré comme l'ensemble des couples $\tilde{g} = (\pm g, d)$ où $g \in PU(n)$ et $d \in \mathbb{R}$ sont tels que $\det^2 g = \exp(2i\pi d)$. Le nombre de translation symplectique d'un élément $\tilde{g} = (\pm g, d)$ est alors évidemment d.

Avant de calculer explicitement le nombre de rotation symplectique, nous allons rappeler quelques généralités bien classiques concernant la décomposition spectrale dans $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $g \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, il en est de même pour $\bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$. Il en résulte que le spectre de g peut être décomposé en blocs de plusieurs types:

(1) des quadruplets $\{\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}\}$ où λ n'est ni réel ni de module 1;

(2) des paires $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$ où λ est réel mais pas de module 1;

(3) des paires $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ où λ est de module 1 mais pas réel;

(4) des singletons $\{1\}$ ou $\{-1\}$ qui apparaissent avec une multiplicité paire.

A chacun de ces blocs correspond un sous-espace caractéristique invariant par g. Ces sous-espaces invariants $V_1, \ldots V_k$ sont évidemment orthogonaux deux à deux pour la structure symplectique. A conjugaison près, on est donc ramené au cas où g est une matrice par blocs.

D'autre part, la décomposition de Jordan, valide dans $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, exprime g sous la forme:

$$g = s \cdot u$$

où s est semi-simple, u est unipotent (i.e. $u - \mathrm{id}$ est nilpotent) et $us = su$. Bien sûr, u et s laissent stables les sous-espaces caractéristiques $V_1, \ldots . V_k$. La restriction de s à chaque V_i est elle-même réductible à une somme de sous-espaces invariants (par s mais pas par u) de dimensions 1, 2 ou 4 suivant le cas.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où g est semi-simple. Pour calculer le nombre de rotation symplectique de $\pm g$, on va se ramener au cas des blocs grâce à la proposition suivante:

Proposition 2.3. (i) *Si deux éléments g_1 et g_2 et $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ commutent, deux relevés quelconques $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ de g_1 et g_2 à $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ commutent aussi.*

(ii) *Si $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ commutent, on a:*

$$\tau(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) = \tau(\tilde{g}_1) + \tau(\tilde{g}_2) .$$

Preuve. La propriété (i) résulte simplement du fait que τ est un quasi-morphisme. Plus précisément, soient g_1 et g_2 comme dans l'énoncé et k l'entier tel que le commutateur $[\tilde{g}_1, \tilde{g}_2]$ soit égal à T^k. On a alors:

$$[\tilde{g}_1^N, \tilde{g}_2^N] = T^{N^2 k}$$

d'où:

$$\tau([\tilde{g}_1^N, \tilde{g}_2^N] = N^2 k .$$

Le membre de gauche de cette dernière égalité est borné quand N tend vers l'infini car τ est un quasi-morphisme. Il en resulte que $k = 0$, c'est-à-dire que $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ commutent.

Pour la propriété (ii), on a:

$$\tau(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \Phi(\tilde{g}_1^k \tilde{g}_2^k) ,$$

$$\tau(\tilde{g}_1) + \tau(\tilde{g}_2) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} (\Phi(\tilde{g}_1^k) + \Phi(\tilde{g}_2^k))$$

où Φ désigne Φ_{AM} ou Φ_{det}. L'égalité cherchée est encore une conséquence du fait que Φ est un quasi-morphisme. □

Lemme 2.4. *Soit $i : \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n + 2p, \mathbb{R})$ le plongement défini par $i(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$. Soit $\tilde{i} : \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n + 2p, \mathbb{R})$ le relevé de i. Alors, pour tout $g \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et $\tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$, on a:*

$$\tau(\tilde{g}) = \tau(\tilde{i}(\tilde{g})) ,$$

$$\varrho(\pi(g)) = \varrho(\pi(i(g))$$

où π est la projection de $\mathrm{Sp} \to \mathrm{PSp}$.

Preuve. La grassmannienne Λ_n se plonge naturellement dans Λ_{n+p} de même que $\tilde{\Lambda}_n$ dans $\tilde{\Lambda}_{n+p}$. Ce dernier plongement est compatible avec les applications $\widetilde{\det}^2 : \tilde{\Lambda}_n \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{\det}^2 : \tilde{\Lambda}_{n+p} \to \mathbb{R}$. □

Remarque 2.5. Le plongement i n'induit pas un plongement de $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{PSp}(2n + 2p, \mathbb{R})$.

Nous étudions maintenant le nombre de rotation symplectique de chaque bloc.

Proposition 2.6. *Soit g un élément de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ dont le spectre est du type $\{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$ où λ n'est ni réel ni de module 1. Alors $\varrho(\pi(g)) = 0$.*

Preuve. L'espace symplectique $\mathbb{R}^4$ est somme de plans réels invariants par g, notés E_1 et E_2, tels que le spectre de $g|E_1$ est $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ et celui de $g|E_2$ est $\{\lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}\}$. Puisque le module de λ est différent de 1, les espaces E_1 et E_2 sont nécessairement lagrangiens. Puisque $\pi(g)$ fixe un lagrangien, on a bien $\varrho(\pi(g)) = 0$. □

Proposition 2.7. *Soit g un élément de* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ *dont le spectre est du type* $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$ *où λ est un réel différent de* ± 1. *Alors* $\varrho(\pi(g)) = 0$.

Preuve. Les droites propres sont des lagrangiens invariants. □

Le cas où le spectre d'une matrice g de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ est du type $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ avec $|\lambda| = 1$ est plus intéressant. La matrice g est alors conjuguée dans $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ à un unique élément de $U(1)$ du type:

$$z \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \mapsto \mu z \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \mu = \lambda \text{ ou } \bar{\lambda}.$$

Ceci introduit une asymétrie dans le spectre de g; la valeur propre μ est privilégiée et sera appelée *valeur propre positive*.

Proposition 2.8. *Si le spectre d'une matrice g de* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ *est du type* $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ *avec* $|\lambda| = 1$ *et* $\lambda \neq \pm 1$, *alors* $\varrho(\pi(g))$ *est égal à* $\frac{1}{\pi}$ *fois l'argument de la valeur propre positive.* □

Preuve. Ceci résulte de la remarque 2.2(5). □

Plus généralement, si un élément semi-simple g de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ a un spectre (multiple) du type $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ avec $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq \pm 1$, alors g est conjugué à un élément de $U(n)$ du type:

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_p, \bar{\lambda} z_{p+1}, \ldots, \bar{\lambda} z_n).$$

On dit alors que p des n valeurs propres λ et $(n - p)$ des n valeurs propres $\bar{\lambda}$ sont positives. Il est clair alors que $\varrho(\pi(g))$ est égal à $\frac{1}{\pi}$ fois la somme des arguments des valeurs propres positives de g. Pour plus de détails sur cette notion de valeur propre positive, on peut consulter [Y-S].

Nous étudions maintenant le cas des éléments unipotents de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire du type $\mathrm{Id} + N$ avec N nilpotent.

Proposition 2.9. *Le nombre de rotation symplectique d'un élément unipotent est nul.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'un élément $\pi(g)$ avec $g = \mathrm{Id} + N$ fixe un lagrangien. On montre ce fait par récurrence sur la dimension n. Soit Δ une droite de $\mathbb{R}^{2n}$ formée de points fixes pour g et $\Delta^\perp$ son orthogonal symplectique. On a bien sûr $\Delta \subset \Delta^\perp$ et le quotient $\Delta^\perp/\Delta$ est muni d'une structure symplectique naturelle préservée par l'action de g sur ce quotient. Si $L \subset \Delta^\perp/\Delta$ est un lagrangien invariant donné par l'hypothèse de récurrence, $L + \Delta$ est un lagrangien de $\mathbb{R}^{2n}$ invariant par g. □

Théorème 2.10. *Soit g un élément de* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *ses valeurs propres de module* 1 *positives (comptées avec multiplicité). Alors,* $\varrho(\pi(g))$ *est égal à* $\frac{1}{\pi}$ *fois la somme des arguments des* λ_i.

Preuve. Tout élément g de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ s'écrit $g = su$ avec s semi-simple, u unipotent et $su = us$. On a alors:

$$\begin{aligned} \varrho(\pi(su)) &= \varrho(\pi(s)) + \varrho(\pi(u)) \quad \text{d'après 2.3} \\ &= \varrho(\pi(s)) \qquad\qquad\quad \text{d'après 2.9}. \end{aligned}$$

Le calcul de $\varrho(\pi(s))$ a déjà été effectué sauf dans le cas du spectre ± 1. Il est immédiat que si s est semi-simple de spectre contenu dans $\{-1,+1\}$, on a $\varrho(\pi(s)) = 0$. □

Pour pouvoir déterminer le nombre de translation symplectique τ sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$, il suffit de constater que τ relève ϱ et d'utiliser la proposition suivante:

Proposition 2.11. *Le nombre de translation symplectique τ est une fonction continue sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $\alpha \in \tilde{\Lambda}_n$, $\tilde{g} \in \widetilde{Sp}(2n,\mathbb{R})$ et k, ℓ deux entiers. On a:

$$|m(\alpha, \tilde{g}^k\alpha) + m(\tilde{g}^k\alpha, \tilde{g}^{k+\ell}\alpha) - m(\alpha, g^{k+\ell}\alpha)| \leqq n+1\,.$$

Par conséquent:

$$|m(\alpha, \tilde{g}^{k\ell}\alpha) - km(\alpha, \tilde{g}^{\ell}\alpha)| \leqq k(n+1)\,.$$

Fixons ℓ, divisons par $k\ell$ et faisons tendre k vers $+\infty$. On trouve:

$$\left|\tau(\tilde{g}) - \frac{1}{\ell}\, m(\alpha, \tilde{g}^{\ell}\alpha)\right| \leqq \frac{n+1}{\ell}\,.$$

Si β est assez proche de α, on a $|m(\alpha,\beta)| \leqq n+1$. Par conséquent, si $\tilde{g}'$ est assez proche de $\tilde{g}$, on a:

$$|m(\alpha, \tilde{g}^{\ell}\alpha) - m(\alpha, \tilde{g}'^{\ell}\alpha)| \leqq 2(n+1)\,,$$

donc:

$$|\tau(\tilde{g}) - \tau(\tilde{g}')| \leqq \frac{3(n+1)}{\ell}\,.$$

Puisque ℓ est arbitrairement grand, on obtient la continuité de τ. □

C-3 La fonction signature de Meyer

Nous avons considéré, au paragraphe B-3, la signature d'un fibré en tores T^2 au-dessus une surface. Nous abordons maintenant le cas général où la fibre est une variété fermée orientée F quelconque de dimension $4k+2$. L'homologie de dimension moitié $H_{2k+1}(F;\mathbb{R})$ est alors munie d'une forme d'intersection qui est une forme symplectique. Un argument simple de suite spectrale montre que la signature d'un fibré F au-dessus d'un pantalon P (sphère moins trois disques) ne dépend que de l'action de la monodromie sur cette homologie de dimension moitié. Précisons ce fait.

Identifions $H_{2k+1}(F;\mathbb{R})$ à un espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$. La donnée de deux automorphismes symplectiques g_1 et g_2 de $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ fait de $\mathbb{R}^{2n}$ un module, noté $\mathfrak{R}^{2n}$, sur l'anneau $\mathbb{Z}[\pi_1(P)]$ du groupe fondamental de P.

Le cup-produit

$$H^1(P,\partial P;\mathfrak{R}^{2n}) \times H^1(P,\partial P;\mathfrak{R}^{2n}) \to H^2(P,\partial P;\mathfrak{R}^{2n} \otimes \mathfrak{R}^{2n})$$

est une forme alternée. En composant avec la forme $\pi_1(P)$-équivariante $\mathfrak{R}^{2n} \otimes \mathfrak{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ donnée par la structure symplectique, on obtient une forme *symétrique* sur $H^1(P, \partial P; \mathfrak{R}^{2n})$ dont la signature est notée $\sigma(g_1, g_2)$. De même qu'au paragraphe B-3, il est clair que:

(1) σ est un 2-cocycle borné sur le groupe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$;

(2) Soit $p: M \to P$ un fibré F au-dessus du pantalon P. Soient g_1 et g_2 les éléments de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ correspondant à la monodromie sur $H_{2k+1}(F; \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{R}^{2n}$ des deux composantes du bord de P. Alors $\sigma(g_1, g_2)$ est la signature de M.

Dans ce cadre généralisé, nous allons calculer σ. Comme au par. B-3, $\sigma(g_1, g_2)$ a aussi l'interprétation algébrique suivante: soit $K \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ le noyau de l'application

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto (g_1^{-1} - \mathrm{Id})(x) + (g_2 - \mathrm{Id})(y).$$

Alors, $\sigma(g_1, g_2)$ est la signature de la restriction à K de la forme bilinéaire:

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \omega(x_1 + y_1, (\mathrm{Id} - g_2)(y_2)).$$

Proposition 3.1. *La classe de cohomologie de σ est 4 fois celle définie par l'extension:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow 1.$$

Preuve. Soit $i: \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2n + 2p, \mathbb{R})$ le plongement défini par blocs: $i(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$. La description précédente montre que $\sigma(i(g_1), i(g_2)) = \sigma(g_1, g_2)$. Puisque la classe de σ a été identifiée sur $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ en B-3, corollaire 3.4, la proposition résulte du fait que i induit un isomorphisme entre les seconds groupes de cohomologie boréliennes. □

Définition 3.2. La *fonction de Meyer* est l'unique fonction

$$\Phi_{\mathrm{Meyer}}: \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que:

$$\sigma(g_1, g_2) = \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) - \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_1) - \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_2).$$

Cette fonction est unique car $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est parfait. Donc Φ_{Meyer}, comme σ, est constante sur les classes de conjugaison de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$.

L'intérêt du calcul de Φ_{Meyer} est clair: il permet la détermination de la signature de n'importe quel fibré de base une surface.

Proposition 3.3. *La fonction de Meyer est un quasi-morphisme.*

Preuve. $|\sigma(g_1, g_2)| \leqq n$. □

Pour comparer Φ_{Meyer} aux autres quasi-morphismes déjà rencontrés, nous allons encore une fois décomposer les matrices par blocs et évaluer σ sur les sous-groupes monogènes. Rappelons que nous savons a priori que la différence $\Phi_{\mathrm{Meyer}} - 8\tau$ est bornée par n. C'est donc cette différence que nous allons préciser.

Pour justifier l'usage d'une décomposition en blocs, nous ne pouvons plus argumenter comme en C-2: nous verrons que Φ_{Meyer} n'est plus additif sur les éléments qui commutent. On a cependant:

Proposition 3.4. *Soit $i: \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n + 2p, \mathbb{R})$ le «plongement par blocs» et $\tilde{i}: \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(2p, \mathbb{R}) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n + 2p, \mathbb{R})$ le relevé aux revêtements universels. Alors:*

$$\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{i}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)) = \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_1) + \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_2).$$

Preuve. Ceci résulte de l'unicité de la fonction de Meyer et du fait que

$$\sigma(i(g_1, g_2), i(g_1', g_2')) = \sigma(g_1, g_1') + \sigma(g_2, g_2')$$

comme on le vérifie immédiatement à partir de la définition de σ. □

Evaluons maintenant σ sur le groupe engendré par l'élément g de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Proposition 3.5. *La valeur de $\sigma(g, g^k)$ $(k \geqq 0)$ est égale à la signature de la forme bilinéaire symétrique f sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par:*

$$f(y_1, y_2) = \omega([(g - g^{-1}) + (g^2 - g^{-2}) + \ldots + (g^k - g^{-k})](y_1), y_2)\,.$$

Preuve. Revenant à la définition de σ, il s'agit d'abord de considérer le noyau K de l'application:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto (g^{-1} - \mathrm{Id})(x) + (g^k - \mathrm{Id})(y)\,.$$

Les couples (x, y) de K vérifient:

$$(g - \mathrm{Id})(-g^{-1}x + (g^{k-1} + \ldots + \mathrm{Id})(y)) = 0\,.$$

Ainsi, le noyau K est aussi paramétré par:

$$(y, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times \ker(g - \mathrm{Id}) \mapsto ((g + g^2 + \ldots + g^k)(y) + z, y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}\,.$$

Sur ce noyau, nous considérons la forme:

$$\bar{b}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \omega(x_1 + y_1, (\mathrm{Id} - g^k)(y_2))\,.$$

En termes du paramétrage de K que nous venons décrire, on voit que $\ker(g - \mathrm{Id})$ est dans le noyau de $\bar{b}$. Il reste donc à évaluer la signature de la forme quadratique b définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ par:

$$b(y_1, y_2) = \omega((\mathrm{Id} + g + \ldots + g^k)(y_1), (\mathrm{Id} - g^k)(y_2))\,.$$

En utilisant le fait que g est symplectique, on trouve bien:

$$\begin{aligned} b(y_1, y_2) &= \omega((\mathrm{Id} - g^{-k})(\mathrm{Id} + \ldots + g^k)(y_1), y_2) \\ &= \omega([(g - g^{-1}) + \ldots + (g^k - g^{-k})](y_1), y_2)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 3.6. Un élément g de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ sera dit:

– *hyperbolique* si toutes ses valeurs propres sont de modules différents de 1. Notons que g n'est par nécessairement semi-simple.

– *elliptique* s'il est semi-simple et si toutes ses valeurs propres sont de module 1, ou de manière équivalente, s'il est conjugué à un élément de $U(n)$.

Un élément de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ sera dit *hyperbolique* ou *elliptique* si sa projection dans $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est hyperbolique ou elliptique.

Proposition 3.7. *Soit $\tilde{g}$ un élément hyperbolique de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$. Alors $\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}) = 8\tau(\tilde{g})$.*

Preuve. Si g est hyperbolique dans $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ la matrice $(g - g^{-1} + \ldots + (g^k - g^{-k}))$ est inversible. On a de plus une décomposition de $\mathbb{R}^{2n}$ sous la forme $E^+ \oplus E^-$ où:

$$E^{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^{2n}, g^k(x) \to 0 \text{ si } k \to \pm\infty\}\,.$$

Ces sous-espaces sont évidemment lagrangiens. La forme non dégénérée b de la proposition 3.5 a donc un sous-espace isotrope de dimension moitié. La signature $\sigma(g, g^k)$ est donc nulle et la proposition résulte de la formule A-7. □

Le cas elliptique est facile. Rappelons qu'un élément elliptique est conjugué à un élément de $U(n)$ et que le revêtement universel $\tilde{U}(n)$ de $U(n)$ s'identifie aux couples $\tilde{g} = (g, d)$ de $U(n) \times \mathbb{R}$ avec $\det g = \exp(2i\pi d)$.

Proposition 3.8. *Soit $\tilde{g} = (g, d)$ un élément de $\tilde{U}(n)$ et $\exp(2i\pi\theta_1), \ldots, \exp(2i\pi\theta_n)$ ses valeurs propres, comptées avec multiplicité. On suppose les θ_i choisis de telle sorte que $\theta_1 + \ldots + \theta_n = d$. Alors:*

$$\Phi_{\text{Meyer}}(\tilde{g}) = 4 \sum_{i=1}^{n} E(\theta_i)$$

où E est la modification de la partie entière définie en B-1.

Preuve. On diagonalise g et on applique la proposition 3.4 et le théorème B-3.7. □

Remarque 3.9. Ce dernier résultat est très analogue à la formule de Souriau [So], sous une forme donnée par Lion et Vergne [L-V].

Etudions maintenant le cas unipotent. Nous allons introduire un entier associé à un élément unipotent. Rappelons qu'un élément unipotent u de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $\exp(N)$ où N est nilpotent et vérifie:

$$\omega(x, Ny) = \omega(y, Nx)\,.$$

Définition 3.10. Avec les notation précédentes, la signature de la forme quadratique $\omega(Nx, x)$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ sera appelée *le signe de u* et notée $\mathrm{sign}(u)$.

Remarquons que:

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}(u^k) &= \mathrm{sign}(u) && \text{si } k > 0 \\ &= 0 && \text{si } k = 0 \\ &= -\mathrm{sign}(u) && \text{si } k < 0\,. \end{aligned}$$

Remarquons d'autre part que si $u = \exp N$ est unipotent, il existe un chemin canonique $u_t = \exp tN$ formé d'unipotents et reliant u à Id. Ainsi l'élément u définit naturellement un relevé $\tilde{u}$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$. Les éléments ainsi obtenus seront, par définition, les *unipotents* de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$.

Soit g un élément de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et $g^{ss} \cdot u$ sa décomposition de Jordan, avec g^{ss} semi-simple et u unipotent. Si $\tilde{g}$ relève g, nous noterons $\tilde{g}^{ss}$ l'élément tel que $\tilde{g} = \tilde{g}^{ss} \cdot \tilde{u}$. Nous dirons que $\tilde{g}^{ss}$ est la *partie semi-simple* de $\tilde{g}$.

Proposition 3.11. *Soit $\tilde{g} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ se projetant sur l'élément unipotent g de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Alors:*

$$\Phi_{\text{Meyer}}(\tilde{g}) = 8\tau(\tilde{g}) - \mathrm{sign}(g)\,.$$

Preuve. Il s'agit de montrer que:

$$\sigma(g, g^k) = \mathrm{sign}(g) \quad \text{pour} \quad k \geqq 0\,.$$

D'après la proposition, il faut calculer la signature de

$$f(y_1, y_2) = \omega([(g - g^{-1}) + \ldots + (g^k - g^{-k})](y_1), y_2)\,.$$

Puisque $g = \exp N$, on a:

$$g - g^{-1} + \ldots + g^k - g^{-k} = 2(1 + \ldots + k)N(\mathrm{Id} + P(N))$$

où $P(N)$ est du type $a_1 N + \ldots + a_{n-1} N^{n-1}$. Considérons la forme quadratique:

$$f_t(y_1, y_2) = \omega([N(\mathrm{Id} + tP(N))](y_1), y_2), \qquad t \in [0, 1].$$

Il est clair que le noyau de f_t ne dépend pas de t et coïncide avec $\ker N$. La signature de f_t ne dépend donc pas de t. En évaluant en $t = 0$ et $t = 1$, on trouve donc que $\sigma(g, g^k)$ coïncide avec la signature de $f(Ny_1, y_2)$, c'est-à-dire avec le signe de g. □

Pour pouvoir compléter notre description de la fonction de Meyer, il faut encore étudier le cas où un élément g a ses valeurs propres de module 1 mais n'est pas semi-simple.

Proposition 3.12. *Soit $\tilde{g}$ un élément de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ se projetant sur l'élément g de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ avec $g - \mathrm{Id}$ inversible. Soit $u = \exp N$ un élément unipotent commutant avec g et $\tilde{u} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ son relevé unipotent canonique. Alors $\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}\tilde{u}) = \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g})$.*

Preuve. Nous calculons $\sigma(g, u)$. Le noyau de l'application:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto (g^{-1} - \mathrm{Id})(x) + (u - \mathrm{Id})(y) \in \mathbb{R}^{2n}$$

se paramètre par:

$$x = (g^{-1} - \mathrm{Id})^{-1}(\mathrm{Id} - u)(y).$$

Dans ce paramétrage, la forme quadratique à considérer est:

$$f(y_1, y_2) = \omega([\mathrm{Id} + (g^{-1} - \mathrm{Id})^{-1}(\mathrm{Id} - u)](y_1), (\mathrm{Id} - u)(y_2)).$$

En développant, on trouve:

$$f(y_1, y_2) = \omega([(u - u^{-1}) + (g + \mathrm{Id})(g - \mathrm{Id})^{-1}(u + u^{-1} - 2\,\mathrm{Id})](y_1), y_2).$$

Ecrivons u sous la forme $\exp N$. On obtient:

$$f(y_1, y_2) = \omega(N(2 \cdot \mathrm{Id} + P(N))y_1, y_2)$$

où $P(N)$ est un polynôme du type $a_1 N + \ldots + a_{n-1} N^{n-1}$.

De même que précédemment, la signature de f est égale à celle de $\omega(Ny_1, y_2)$, c'est-à-dire au signe de u. On a donc, $\sigma(g, u) = \sigma(u, g) = \mathrm{sign}(u)$. En résumé:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}\tilde{u}) &= \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}) + \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{u}) + \sigma(u, g) \\ &= \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}) - \mathrm{sign}(u) + \mathrm{sign}(u) \\ &= \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}). \quad \square \end{aligned}$$

Nous résumons notre discussion sous la forme d'un théorème.

Théorème 3.13. *Soient $\tilde{g}$ un élément de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ et g sa projection dans $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Soit $g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$ la décomposition telle que g_1, g_2, g_3 commutent et:*

(i) *g_1 est hyperbolique.*

(ii) *g_2 a un spectre contenu dans le cercle unité mais ne contenant pas 1.*

(iii) *g_3 est unipotent.*

Soient $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ et $\tilde{g}_3$ des relevés tels que $\tilde{g} = \tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2 \cdot \tilde{g}_3$. Alors:

$$\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}) = \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_1) + \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_2) + \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_3)$$

avec:

$$\begin{aligned} &\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_1) = 8\tau(\tilde{g}_1) \quad \textit{(proposition 3.7)} \\ &\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_3) = 8\tau(\tilde{g}_3) - \mathrm{sign}(g_3) \quad \textit{(proposition 3.11)} \\ &\Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_2) = \Phi_{\mathrm{Meyer}}(\tilde{g}_2^{\mathrm{ss}}) \end{aligned}$$

où $\tilde{g}_2^{ss}$ est la partie semi-simple (elliptique) de $\tilde{g}_2$. Cette valeur de $\Phi_{\text{Meyer}}(\tilde{g}_2^{ss})$ est donnée par la formule de Souriau (proposition 3.8 et remarque 3.9). □

C-4 Une généralisation: le nombre de rotation symplectique fibré

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < \infty$ et $f: X \to X$ une bijection bimesurable préservant μ et $F: X \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ une application mesurable. On peut alors considérer la «dynamique croisée»:

$$(x, \alpha) \in X \times \tilde{\Lambda}_n \mapsto (f(x), F(x)(\alpha)) \in X \times \tilde{\Lambda}_n$$

dont la k-ième itérée est:

$$(x, \alpha) \in X \times \tilde{\Lambda}_n \mapsto (f^k(x), F(f^{k-1}(x)) \cdot F(f^{k-2}(x)) \ldots F(x)(\alpha)) .$$

On supposera que la fonction

$$x \in X \mapsto \tau(F(x)) \in \mathbb{R}$$

est intégrable. (On pourrait aussi utiliser Φ_{AM} ou Φ_{det} à la place de τ.) On pose alors:

$$\tau_k(x) = \tau(F(f^{k-1}(x)) \ldots F(x)) .$$

Puisque τ est un quasi-morphisme, il existe une constante C telle que:

$$\tau_k(x) + \tau_\ell(f^k(x)) - C \leqq \tau_{k+\ell}(x) \leqq \tau_k(x) + \tau_\ell(f^k(x)) + C .$$

Il en résulte que τ_k est intégrable et que si l'on pose, $t_k = \int_X \tau_k d\mu$, on a:

$$t_k + t_\ell - C\mu(X) \leqq t_{k+\ell} \leqq t_k + t_\ell + C\mu(X) .$$

Définition 4.1 La limite t de la suite $\frac{1}{k} t_k$ (qui existe d'après l'inégalité précédente) est le nombre de translation symplectique fibré de (X, f, F).

Rémarque 4.2. Le théorème ergodique sous-additif [Os] affirme que $\frac{1}{k} \tau_k(x)$ converge μ-presque partout vers une fonction mesurable $\tau_*(x)$ et que $\int_X \tau_* d\mu = t$.

Nous nous contenterons d'un exemple. Soit B une boule ouverte dans $\mathbb{R}^{2n}$ et f un difféomorphisme symplectique de B à support compact. On prend $X = B$ et la mesure μ est la forme de volume ω^n. Pour construire F, on utilise la différentielle de f qui donne une application:

$$x \in B \mapsto df_x \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$$

qui est constante égale à l'identité en dehors d'un compact de B et qui se relève donc de manière unique en une application continue:

$$F: x \in B \mapsto F(x) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$$

qui est constante égale à l'identité en dehors d'un compact. Nous avons ainsi le résultat suivant:

Théorème 4.3. *Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathrm{Diff}_C^\infty(B, \omega)$ le groupe des C^∞-difféomorphismes symplectiques de B à supports compacts. Il existe une application:*

$$t: \mathrm{Diff}_C^\infty(B, \omega) \to \mathbb{R}$$

que nous appellerons exposant de Lyapounov symplectique, telle que:

(i) *t est un quasi-morphisme homogène mais n'est pas un morphisme de groupes.*

(ii) *t est un invariant de conjugaison.*

Rémarque 4.4. Cette application figure déjà dans [Ru] et on trouve des notions analogues, définies dans des situations plus particulières, dans [Ek] et [Ta].

Nous avons choisi d'appeler $t(f)$ l'exposant de Lyapounov symplectique car il est analogue aux exposants de Lyapounov habituels [Os]. La différence est que les exposants de Lyapounov usuels rendent compte du comportement hyperbolique de la différentielle des itérés de f alors que l'exposant de Lyapounov symplectique rend compte du comportement elliptique. Rappelons que le nombre de rotation symplectique ne dépend que de la partie de son spectre située sur le cercle unité.

Preuve. Nous avons déjà vu que (i) entraîne (ii). Le fait que t soit un quasi-morphisme résulte de:

(1) $|t(f) - t_1(f)| \leqq C\mu(X)$.

(2) $t_1(f \circ g) = \int_B \tau(d(f \circ g)_x)\omega^n$.

(3) $d(f \circ g) = df \circ g \cdot dg$, τ est un quasi-morphisme et f, g préservent ω^n.

Il faut maintenant montrer que t n'est pas un morphisme de groupes. Rappelons que Calabi définit un morphisme:

$$S : \mathrm{Diff}^\infty_{C,0}(B,\omega) \to \mathbb{R}$$

où $\mathrm{Diff}^\infty_{C,0}(B,\omega)$ désigne la composante neutre de $\mathrm{Diff}^\infty_C(B,\omega)$. Cet invariant S est défini de la façon suivante [Ca]. Si $f \in \mathrm{Diff}^\infty_{C,0}(B,\omega)$, il existe un hamiltonien $H_t : B \to \mathbb{R}$ à support compact et dépendant du temps $t \in [0,1]$ tel que l'isotopie hamiltonienne f_t correspondante joigne l'identité à $f = f_1$. L'invariant de Calabi est alors défini par:

$$S(f) = \int_0^1 \int_B H_t \omega^n dt\,.$$

Par ailleurs, Banyaga montre que le noyau de S est un groupe simple [Ban]. Pour montrer que t n'est pas un morphisme, il suffit donc de s'assurer que t n'est pas nul sur le noyau de S. Considérons d'abord le cas $n = 1$. Soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction lisse constante au voisinage de 0 et nulle au voisinage de l'infini. On considère alors l'hamiltonien

$$H : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(\sqrt{x^2+y^2})\,.$$

Soit f le temps 1 de l'isotopie hamiltonienne engendrée par H (indépendant du temps dans ce cas). Il est facile de calculer t et S sur cet exemple. On trouve:

$$S(f) = \int_0^\infty 2\pi r u(r) dr\,,$$

$$t(f) = \int_0^\infty \frac{u'(r)}{2\pi r} \cdot 2\pi r\, dr = -u(0)\,.$$

Ainsi $t(f)$ peut être non nul alors que $S(f)$ est nul. Le cas $n > 1$ se traite de manière complètement analogue. □

Corollaire 4.5. *Le noyau de l'homomorphisme de Calabi*

$$S : \mathrm{Diff}^{\infty}_{C,0}(B, \omega) \to \mathbb{R}$$

est un groupe parfait non uniformément parfait.

Preuve. Nous avons déjà rappelé que le noyau de S est simple, donc parfait. Ce noyau ne peut être uniformément parfait car il existe un quasi-morphisme homogène non trivial sur $\ker S$. □

Conclusion

Nous espérons avoir convaincu le lecteur qu'il peut être utile de considérer la classe de Maslov comme une classe bornée. Dans [Gh], nous avons montré que la classe d'Euler bornée pour un groupe d'homéomorphismes directs du cercle rend compte de la dynamique topologique de ce groupe. Existe-t-il un résultat analogue pour $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$? En d'autres termes, soit Γ un groupe discret et ϱ_1, ϱ_2 deux représentations de Γ dans $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. On suppose que les cocycles $\varrho_1^* \sigma$ et $\varrho_2^* \sigma$ définissent la même classe bornée. Que peut-on en conclure sur ϱ_1 et ϱ_2?

Par ailleurs, l'article [At 1] traite aussi d'invariants sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ différents de ceux que nous avons considérés, comme par exemple les fonctions L de Shimizu. Est-il possible de les faire rentrer naturellement dans notre cadre?

References

[A-M] Abraham, R., Marsden, J.: Foundations of mechanics, 2nd ed. (Advanced Book Program) Reading, MA: Benjamin 1978

[Ar] Arnold, V.: Sturm theorem and symplectic geometry. Funct. Anal. Appl. **19** (n° 1), 251–276 (1985)

[As] Asai, T.: The reciprocity of Dedekind sums and the factor set for the universal covering group of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Nagoya Math. J. **37**, 67–80 (1970)

[At 1] Atiyah, M.: The logarithm of the Dedekind η-function. Math. Ann. **278**, 335–380 (1987)

[At 2] Atiyah, M.: On framings of 3-manifolds. Topology **29**, 1–7 (1990)

[Ban] Banyaga, A.: On the group of diffeomorphisms preserving an exact symplectic form. In: Differential topology. Varenna 1976, pp. 5–9. Naples: Liguori 1979

[B-G] Barge, J., Ghys, E.: Cocycles bornés et actions de groupes sur les arbres réels. Workshop on group theory from a geometrical view point. I.C.T.P. Trieste. Ghys, E., Haefliger, A., Veryovsky, A. (eds.). Singapore: World Scientific 1990

[Ba] Bavard, C.: Longueur stable commutateurs. Enseign. Math. **37**, 109–150 (1991)

[Be] Besson, G.: Séminaire de cohomologie bornée. E.N.S. de Lyon (Février 1988)

[Br] Brooks, R.: Some remarks on bounded cohomology. In: Kra, I., Maskit, B. (eds.) Riemann surfaces and related topics. (Ann. Math. Stud., vol. 91, pp. 53–65) Princeton: Princeton University Press 1981

[Ca] Calabi, E.: On the group of automorphisms of a symplectic manifold. In: Gunning, R.C. (ed.) Problems in Analysis. Symposium in honour of S. Bochner, pp. 1–26. Princeton: Princeton University Press 1970

[Da] Dazord, P.: Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques. Ann. Inst. Fourier **29**, 25–78 (1979)

[De] Dedekind, R.: Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann. (Riemann's ges. Math. Werke, vol. 2, pp. 466–478) New York: Dover 1982

[Di] Dieudonné, J.: Sur les groupes classiques. Paris: Hermann 1967

[D-T] Domic, A., Toledo, D.: The Gromov norm of the Kähler class of symmetric domains. Math. Ann. **276**, 425–432 (1987)

[Du] Dupont, J.: Bounds for the characteristic numbers of flat bundles. (Lect. Notes Math., vol. 763, pp. 109–119) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979

[D-G] Dupont, J., Guichardet, A.: A propos de l'article «Sur la cohomologie réelle de groupes de Lie semi-simples réels». Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **11**, 293–296 (1978)

[E-H-N] Eisenbud, D., Hirsch, U., Neumann, W.: Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphisms to the circle. Comment. Math. Helv. **56**, 638–660 (1981)

[Ek] Ekeland, I.: Convexity methods in Hamiltonian mechanics. Berlin Heidelberg New York: Springer 1990

[Gh] Ghys, E.: Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. Contemp. Math. **58**, 81–105 (1987)

[Gr] Gromov, M.: Volume and bounded cohomology. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **56**, 5–100 (1982)

[G-W] Guichardet, A., Wigner, D.: Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels. Ann. Sci. Écol. Norm. Supér. **11**, 277–292 (1978)

[He] Herman, M.: Inégalités a priori pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **70**, 47–101 (1989)

[H 1] Hirzebruch, F.: The signature theorem: reminiscences and recreation. In: Prospects in Mathematics. (Ann. Math. Stud., vol. 70, pp. 3–31) Princeton: Princeton University Press 1971

[H 2] Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. Enseign. Math. **19**, 183–281 (1973)

[Le] Leray, J.: Analyse lagrangienne et mécanique quantique. Publ. Math., I.R.M.A., Strasbourg **25** (1978)

[L-V] Lion, G., Vergne, M.: The Weil representation, Maslov index and theta series. (Prog. Math., vol. 6) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1980

[Ma] Mackey, G.W.: Les ensembles boréliens et les extensions de groupes. J. Math. Pures Appl. **36**, 171–178 (1957)

[M-M] Matsumoto, S., Morita, S.: Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms. Proc. Am. Math. Soc. **94**, 539–544 (1985)

[Me 1] Meyer, W.: Die Signatur von lokalen Koeffizienten-Systemen und Faserbündeln. Dissertation. Bonn. Math. Schr. **53** (1972)

[Me 2] Meyer, W.: Die Signatur von Flächenbündeln. Math. Ann. **201**, 239–264 (1973)

[Os] Oseledec, V.I.: Multiplicative ergodic theorem, Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans. Mosc. Math. Soc. **19**, 197–231 (1968)

[Ra] Rademacher, H.: Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Math. Z. **63**, 445–463 (1956)

[R-G] Rademacher, H., Grosswald, E.: Dedekind sums. (Carus Math. Monogr., vol. 16) Washington: Math. Assoc. Am. 1972

[Ru] Ruelle, D.: Rotation numbers for diffeomorphisms and flows. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor. **42**, 109–115 (1985)

[Se] Serre, J.P.: Arbres, amalgames, SL_2. (Astérisque, vol. 46) Paris: Soc. Math. Fr. 1977

[Si] Siegel, C.: Symplectic geometry. New York London: Academic Press 1964

[So] Souriau, J.M.: Construction explicite de l'indice de Maslov, applications. (Lect. Notes Phys., vol. 50, pp. 117–148) Berlin Heidelberg New York: Springer 1976

[Ta] Tabachnikov, S.L.: Two remarks on asymptotic Hopf invariants. Funct. Anal. Appl. **24**, n° 1 (1990)

[Tu] Turaev, V.: A cocycle of the symplectic first Chern class and the Maslov indices. Funkts. Anal. Prilozh. **18** (1984)

[Wa] Walker, K.: Preprint sur l'invariant de Casson

[Ya] Yakubovich, V.A.: Arguments on the group of symplectic matrices. Math. Sb. **55** (97) (n° 3), 255–280 (1961)

[Y-S] Yakubovich, V.A., Starzhinskii, V.M.: Linear differential equations with periodic coefficients, I. New York: Wiley and Jerusalem: Keter Publishing House 1975