

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ÉTIENNE GHYS

Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsien

Annales de l'institut Fourier, tome 42, n° 1-2 (1992), p. 209-247.

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_209_0

© Annales de l'institut Fourier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉFORMATIONS DE FLOTS D'ANOSOV ET DE GROUPES FUCHSIENS

par Etienne GHYS

Introduction.

Soit X un champ de vecteurs non singulier, de classe C^∞ , sur une variété V fermée, orientée, de dimension 3. Soit ϕ^t le flot engendré par X . Rappelons que l'on dit que ϕ^t est un *flot d'Anosov* s'il existe des sous-fibrés de rang 1 du fibré tangent TV , notés E^{ss} et E^{uu} , et appelés *stable* et *instable forts*, tels que :

- i) E^{ss} , E^{uu} et $\mathbf{R}X$ sont en somme directe,
- ii) la différentielle de ϕ^t préserve E^{ss} et E^{uu} ,
- iii) si $\|\cdot\|$ désigne une métrique riemannienne quelconque sur V , il existe des constantes $C > 0$, $\lambda_{ss} > 0$ et $\lambda_{uu} > 0$ telles que pour tous $v_{ss} \in E^{ss}$, $v_{uu} \in E^{uu}$ et $t \in \mathbf{R}$, on ait :

$$\begin{aligned}\|d\phi^t(v_{ss})\| &\leq C \exp(-\lambda_{ss}t) \|v_{ss}\| \\ \|d\phi^t(v_{uu})\| &\geq C \exp(\lambda_{uu}t) \|v_{uu}\|.\end{aligned}$$

Les exemples classiques de flots d'Anosov ont motivé cette définition (voir [An]). Il s'agit d'une part des suspensions d'automorphismes hyperboliques du tore et, d'autre part, des flots géodésiques des surfaces à courbure -1 . Si l'on élargit cette collection d'exemples par revêtements finis, on est

amené à la classe des *flots d'Anosov algébriques* dont voici la description. Soit G l'un des deux groupes de Lie suivants :

i) le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. Dans ce cas, soit ϕ^t le sous-groupe à un paramètre relevant le sous-groupe des matrices diagonales $\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$.

ii) Le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^2$ du type :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\exp(t)x + a, \exp(-t)y + b) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas, soit ϕ^t le sous-groupe à un paramètre correspondant à $a = 0$ et $b = 0$.

Soit Γ un sous-groupe discret co-compact de G . Le sous-groupe ϕ^t opère alors par translations à gauche sur l'espace homogène compact $V = G/\Gamma$. Il est facile de s'assurer que les flots ainsi obtenus sont bien de type Anosov [To]. On trouvera dans [RVa] une description des sous-groupes discrets co-compacts de G . Le cas (ii) correspond aux suspensions et le cas i) aux flots géodésiques des surfaces à courbure -1 (à revêtements finis près). Insistons sur le fait que tous les *flots algébriques préservent le volume*.

Bien sûr, les flots algébriques peuvent être perturbés dans la topologie C^1 et produisent de nouveaux exemples. Le théorème de stabilité structurelle d'Anosov montre que ces perturbations sont topologiquement équivalentes aux flots initiaux. Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme envoyant les orbites de l'un sur celles de l'autre sans en respecter nécessairement les paramétrages. Cependant, d'un point de vue différentiable, ces nouveaux flots sont bien différents. Par exemple, les flots géodésiques de deux métriques à courbure négative sur une même surface sont toujours topologiquement équivalents mais ne sont différentiablement conjugués que si les métriques sont isométriques ([Gr], [O]). Dans le présent article, nous nous concentrons sur certaines propriétés différentiables des flots d'Anosov qui ne sont pas invariantes par équivalence topologique.

Notons par ailleurs qu'il existe d'autres flots d'Anosov qui ne sont pas topologiquement équivalents à des flots algébriques, sur d'autres variétés de dimension 3 ([HanTh], [Go], [Fri], [FraWi]).

Une grande attention s'est portée récemment sur le degré de régularité des sous-fibrés E^{ss} et E^{uu} qui ne sont supposés que continus dans la définition mais qui sont évidemment de classe C^∞ dans les cas algébriques. Le flot géodésique d'une métrique riemannienne quelconque sur une surface

préserve une forme de contact canonique et (par conséquent) une forme de volume. Il est montré par S. Hurder et A. Katok que si un flot d'Anosov ϕ^t (sur une variété de dimension 3 comme dans tout cet article) est tel que $E^{ss} \oplus E^{uu}$ est une structure de contact de classe C^1 , alors $E^{ss} \oplus E^{uu}$ est en fait de classe C^∞ et E^{ss} et E^{uu} sont de classe $C^{2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. (Le résultat est en fait beaucoup plus précis, voir [HuKat]). Ces auteurs montrent que, sous ces mêmes hypothèses, si E^{ss} et E^{uu} sont de classe C^2 , alors ils sont en fait de classe C^∞ . Nous avons par ailleurs montré que si E^{ss} et E^{uu} sont de classe C^∞ , alors ϕ^t est C^∞ -conjugué à un flot algébrique dont on modifie le paramétrage de manière extrêmement particulière [Gh3]. Pour d'intéressants développements en dimension supérieure, on consultera [Kan], [Fè], [FeKat], [BeFoL].

Changer le paramétrage d'un flot d'Anosov ϕ^t revient à multiplier le champ X par une fonction (de classe C^∞) strictement positive. Le nouveau flot ψ^t qui en résulte a bien sûr les mêmes orbites et il n'est pas difficile de s'assurer que c'est encore un flot d'Anosov (voir 3.3). En d'autres termes, la propriété d'Anosov est en fait associée au feuilletage orienté de dimension 1 dont les feuilles sont les orbites du flot. Il faut cependant prendre garde au fait que les flots ϕ^t et ψ^t n'ont pas les mêmes fibrés stable et instable forts. Par ailleurs, E^{ss} et E^{uu} peuvent être de classe C^∞ pour ϕ^t et seulement de classe C^0 pour ψ^t ; c'est par exemple le cas si l'on modifie le paramétrage d'un flot algébrique de façon "générique". Cependant, les fibrés de rang 2 $E^s = E^{ss} \oplus \mathbf{R}X$ et $E^u = E^{uu} \oplus \mathbf{R}X$, appelés *stable et instable faibles* sont communs aux deux flots. Ils sont intégrables et définissent deux feuilletages de codimension 1, *stable et instable faibles*, notés $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. Ils sont de classe C^1 et sont naturellement associés au "feuilletage orienté de dimension 1 d'Anosov" engendré par les orbites.

Dans cet article, nous nous intéressons aux flots d'Anosov pour lesquels $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont très réguliers, de classe C^∞ pour fixer les idées. Comme nous venons de l'indiquer, cette hypothèse est bien plus naturelle que celle dans laquelle E^{ss} et E^{uu} sont de classe C^∞ car elle est invariante par changement de paramétrage (de classe C^∞).

Notre premier résultat est une réponse positive à la dernière question laissée en suspens dans le travail déjà mentionné de S. Hurder et A. Katok ([HuKat], problem 10.4).

THÉORÈME A. — Soit ϕ^t un flot d'Anosov de classe C^∞ qui préserve le volume sur une variété fermée orientée de dimension 3. On suppose que les feuilletages stable et instable faibles sont de classe C^2 (et

orientables). Alors, après un changement de paramétrage de classe C^∞ , le flot ϕ^t est C^∞ -conjugué à un flot algébrique.

Il est naturel de se demander si l'hypothèse selon laquelle ϕ^t préserve le volume est essentielle. Voici cependant une méthode pour construire des contre-exemples sans cette hypothèse. Si S est une surface fermée orientée, nous notons T_1S le fibré des demi-droites tangentes à S . Bien sûr, le choix d'une métrique riemannienne sur S identifie naturellement T_1S au fibré unitaire tangent. Ceci permet de "faire coexister" sur la même variété T_1S les flots géodésiques de plusieurs métriques. Si g est une métrique de classe C^∞ , à courbure -1 , sur S , nous notons $\mathcal{F}_g^s$ et $\mathcal{F}_g^u$ les feuilletages stable et instable faibles du flot géodésique de g sur T_1S . Ce sont évidemment des feuilletages de classe C^∞ (qui sont d'ailleurs tous topologiquement conjugués). Si g_1 et g_2 sont deux métriques de classe C^∞ , de courbure -1 et suffisamment C^3 -proches, les feuilletages $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$ sont transverses et l'intersection de $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$ est C^1 -proche du flot géodésique de g_1 (ou de g_2). Si l'on fait un choix de paramétrage sur $\mathcal{F}_{g_1}^s \cap \mathcal{F}_{g_2}^u$, on obtient ainsi un flot d'Anosov dont il n'est pas difficile de s'assurer que les feuilletages stable et instable faibles sont précisément $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$. C'est donc un contre-exemple potentiel au théorème précédent sans l'hypothèse concernant le volume.

En fait, la construction précédente ne dépend que des points de l'espace de Teichmüller déterminés par g_1 et g_2 . Rappelons que dans cet espace on identifie deux métriques à courbure -1 si elles sont isométriques par une isométrie isotope à l'identité. Le résultat général est le suivant :

THÉORÈME B. — Soient g_1 et g_2 deux métriques de classe C^∞ , à courbure -1 , sur une surface fermée orientée S et soient $[g_1], [g_2]$ les points de l'espace de Teichmüller de S ainsi déterminés. Il est possible de définir un feuilletage orienté de dimension 1, de classe C^∞ , sur T_1S , noté $\phi_{[g_1], [g_2]}$ tel que :

i) $\phi_{[g_1], [g_2]}$ est bien défini à conjugaison de classe C^∞ près et ne dépend que de $[g_1]$ et $[g_2]$.

ii) Un flot paramétrant $\phi_{[g_1], [g_2]}$ est de type Anosov.

iii) Les feuilletages stable et instable faibles de $\phi_{[g_1], [g_2]}$ sont C^∞ -conjugués à $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$ respectivement; ils sont donc de classe C^∞ .

iv) Un flot paramétrant $\phi_{[g_1], [g_2]}$ préserve une forme de volume si et seulement si $[g_1] = [g_2]$.

Ainsi, deux points distincts de l'espace de Teichmüller de S permettent de définir un flot d'Anosov à feuilletages stable et instable faibles de classe C^∞ mais qui ne peut pas être algébrique, même après changement de paramétrage, car il ne préserve pas le volume. Observons que le fait de préserver une forme de volume est invariant par changement de paramétrage. Ces exemples obtenus par accouplement de deux points de l'espace de Teichmüller sont analogues aux groupes kleinien de type quasi-fuchsien qui sont obtenus à partir de deux groupes fuchsien. Pour cette raison, les flots d'Anosov ainsi obtenus seront appelés *quasi-fuchsien*.

CONJECTURE. — Soit ϕ^t un flot d'Anosov de classe C^∞ sur une variété fermée de dimension 3 tel que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ soient de classe C^∞ . Alors, deux cas sont possibles :

i) ou bien ϕ^t est C^∞ -conjugué à la suspension (à temps de retour variable) d'un difféomorphisme linéaire du tore.

ii) ou bien, à des revêtements finis près, le feuilletage de dimension 1 engendré par ϕ^t est C^∞ -conjugué à un "feuilletage quasi-fuchsien" $\phi_{[g_1], [g_2]}$ décrit plus haut.

Pour motiver cette conjecture, nous allons en prouver une version locale.

Fixons toujours une métrique riemannienne $\| \cdot \|$ sur la variété V supportant le flot d'Anosov ϕ^t . Soit $x \in V$ et $t \in \mathbb{R}$. La différentielle de ϕ^t en x envoie E_x^{uu} (resp E_x^{ss}) sur $E_{\phi^t(x)}^{uu}$ (resp $E_{\phi^t(x)}^{ss}$). Le logarithme (resp. l'opposé du logarithme) de la norme de cette application linéaire est noté $\lambda_{uu}(x, t)$ (resp $\lambda_{ss}(x, t)$). Si α est un réel supérieur ou égal à 1, nous dirons que le flot ϕ^t est α -pincé s'il existe une métrique $\| \cdot \|$ telle que, pour tout t et tout x , ont ait :

$$(*) \quad \frac{1}{\alpha} \lambda_{ss}(x, t) \leq \lambda_{uu}(x, t) \leq \alpha \lambda_{ss}(x, t).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que cette condition est invariante par changement de paramétrage (voir 3.3). D'autre part, un flot est 1-pincé si et seulement s'il préserve un volume. Par ailleurs, les relations :

$$\lambda_{ss}(x, t_1 + t_2) = \lambda_{ss}(x, t_1) + \lambda_{ss}(\phi^{t_1}(x), t_2)$$

$$\lambda_{uu}(x, t_1 + t_2) = \lambda_{uu}(x, t_1) + \lambda_{uu}(\phi^{t_1}(x), t_2)$$

montrent qu'il suffit que (*) soit satisfaite lorsque $t \in [0, 1]$ pour qu'elle soit satisfaite pour tout t . Par conséquent, si un flot ϕ^t est α -pincé et si $\alpha' > \alpha$,

tout flot suffisamment C^1 -proche de ϕ^t est α' -pincé. En particulier, si $\alpha > 1$, tout flot C^1 -proche d'un flot algébrique (donc préservant le volume) est α -pincé.

THÉORÈME C. — *La conjecture précédente est vraie si l'on suppose de plus que le flot ϕ^t est α -pincé avec $\alpha < 2$. En particulier, cette conjecture est vraie dans un C^1 -voisinage d'un flot algébrique.*

Signalons le résultat de B. Hasselblatt qui affirme que si le flot est α -pincé avec $\alpha < 2$ et si les feuilletages stable et instable faibles sont de classe C^3 alors ils sont de classe C^∞ [Has].

Le problème traité dans le théorème précédent est très relié à un résultat de rigidité des groupes fuchsien que nous avons prouvé dans [Gh2]. Il se trouve que la méthode développée dans le présent article permet d'obtenir une démonstration complètement différente et plus simple de ce résultat de rigidité. Le résultat obtenu étant par ailleurs plus précis, il nous semble utile de le détailler dans cette introduction.

Soit S une surface fermée orientée de genre supérieur ou égal à 2. Pour chaque choix d'une métrique riemannienne g à courbure -1 sur S , le revêtement universel de S s'identifie au disque de Poincaré D^2 et son bord au cercle S^1 . Le groupe fondamental $\pi_1(S)$ opère alors sur $S^1 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par transformations projectives. On a ainsi une représentation :

$$\rho_g : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$$

où $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ désigne le groupe des C^∞ -difféomorphismes du cercle respectant l'orientation. Les propriétés suivantes sont bien connues (voir 4.2) :

i) Toute représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ suffisamment C^1 -proche de ρ_g est topologiquement conjuguée à ρ_g .

ii) Si g_1 et g_2 sont deux métriques à courbure -1 sur S qui ne sont pas isométriques par une isométrie isotope à l'identité, les représentations ρ_{g_1} et ρ_{g_2} sont topologiquement conjuguées mais pas C^1 -conjuguées.

THÉORÈME D. — *Soit $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ une représentation proche de ρ_g dans la C^1 -topologie. Alors, il existe un difféomorphisme f du cercle, de classe C^∞ , tel que $f\rho f^{-1}$ soit égale à $\rho_{g'}$ où g' est une métrique à courbure -1 sur S .*

Dans [Gh2], nous avons obtenu le même résultat, mais sous l'hypothèse plus forte que ρ est proche de ρ_g dans la C^3 -topologie.

Les représentations ρ_g sont donc topologiquement structurellement stables, mais ont un module de déformation C^∞ de dimension finie, à savoir l'espace de Teichmüller. Voici une illustration du théorème. Si γ est un élément de $\pi_1(S)$, la transformation hyperbolique $\rho_g(\gamma)$ a deux points fixes sur le cercle, l'un répulsif et l'autre attractif. Les dérivées en ces points fixes sont inverses l'une de l'autre, ce qui est une propriété instable dans $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$. Il résulte cependant du théorème que lors d'une perturbation de ρ_g , cette propriété doit subsister pour des raisons globales.

Cet article comprend quatre parties. Dans la partie 1, on démontre le théorème A et dans la partie 2, on construit les flots quasi-fuchsien (théorème B). La partie 3 est le cœur de l'article : on montre comment une hypothèse de pincement permet de construire des structures projectives transverses pour $\mathcal{F}^u$ et $\mathcal{F}^s$. La démonstration des théorèmes C et D est achevée dans la partie 4.

Je remercie A. Katok : la "rigidity conference" qu'il a organisée à Pennstate en mars 1991 a réveillé mon intérêt pour ce type de problème.

1. Les flots d'Anosov qui préservent le volume.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème A. Pour simplifier, nous supposons dans tout l'article que tous les objets rencontrés (fibrés et variétés) sont orientés. On se place donc dans les hypothèses suivantes : ϕ^t est un flot d'Anosov de classe C^∞ sur la 3-variété fermée V , qui préserve une forme de volume Ω et $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe C^2 . La forme Ω est alors de classe C^∞ (voir par exemple [Bo]). De même, le "corollary 3.5" de [HuKat] entraîne que les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont en fait de classe C^∞ . Nous désignerons par ϕ le feuilletage de dimension 1 engendré par le flot ϕ^t .

1.1. La métrique pseudoriemannienne transverse.

La démonstration s'inspire d'une méthode utilisée par A. Avez dans [Av] pour étudier les difféomorphismes d'Anosov du tore T^2 . Nous allons exploiter l'hypothèse pour introduire une métrique pseudoriemannienne sur le fibré normal à ϕ , invariante par l'holonomie de ϕ .

Soit D un disque plongé dans V , de classe C^∞ , transverse à ϕ . On peut alors construire sur D :

i) une 2-forme d'aire ω qui est la forme induite sur D par $i_X\Omega$. (Rappelons que le champ X est associé à ϕ^t). Si on multiplie X par la fonction u , le volume invariant devient $\frac{1}{u}\Omega$ et $i_X\Omega = i_{uX}(\frac{1}{u}\Omega)$. La 2-forme ω est donc associée à ϕ et non pas à un choix de paramétrage. Il est clair par ailleurs que la collection de ces 2-formes ainsi obtenues sur les transversales à ϕ est invariante par le pseudogroupe d'holonomie de ϕ .

ii) Une paire de feuilletages transverses f^s et f^u de classe C^∞ qui ne sont autres que les traces de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur D .

On peut alors introduire une métrique pseudoriemannienne q sur D par :

$$q(v) = \omega(\pi_s v, \pi_u v)$$

où v est un vecteur tangent à D quelconque et π_s, π_u désignent les projections de l'espace tangent à D sur les espaces tangents à f^s et f^u , parallèlement à f^u et f^s respectivement. Cette formule montre que f^s et f^u sont des feuilletages q -isotropes de D .

On a ainsi construit une métrique pseudoriemannienne de classe C^∞ sur chaque transversale D à ϕ . Il est clair que cette construction est invariante par le pseudogroupe d'holonomie de ϕ . La courbure de cette métrique est donc une fonction continue sur V constante sur les orbites de ϕ . Puisque ϕ^t préserve le volume, il a une orbite dense et cette courbure est constante. En multipliant Ω par une constante adéquate, on peut supposer que la courbure de g est identiquement nulle ou identiquement égale à $+1$. (Pour une métrique de signature $(+, -)$, le signe de la courbure n'a pas de signification : si l'on change la métrique en son opposée, la courbure change de signe mais la signature reste $(-, +)$...)

Tout disque transverse à ϕ est donc localement isométrique au plan lorentzien plat ou de courbure constante $+1$. Rappelons la description de ces espaces [Wo] :

i) le plan lorentzien plat est le plan $\mathbf{R}^2$ de coordonnées (x, y) équipé de la métrique pseudoriemannienne :

$$ds^2 = dx dy.$$

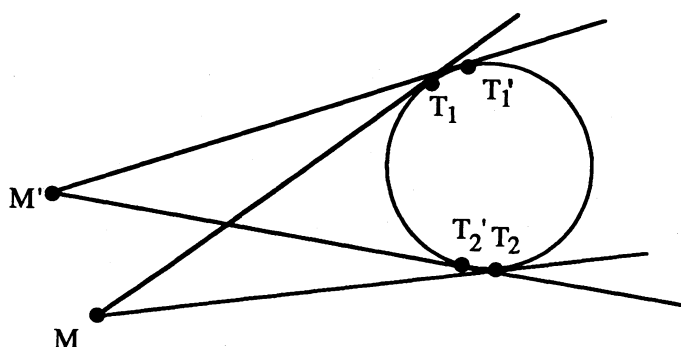
Les directions isotropes sont les droites $x = Cst, y = Cst$. Le groupe d'isométries directes est formé des applications affines du type :

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (\exp(t)x + a, \exp(-t)y + b) \in \mathbf{R}^2.$$

Notons en passant que chaque droite isotrope est munie d'une structure affine canonique, invariante par le groupe d'isométries.

ii) Le plan lorentzien de courbure constante non nulle peut être considéré comme le revêtement universel de l'extérieur du disque de Poincaré D^2 placé dans un plan projectif réel (modèle de Klein). Les feuilletages isotropes sont donnés par les tangentes au cercle ∂D^2 . Notons que ces droites isotropes sont des droites projectives privées d'un point; ce sont naturellement des droites affines.

Soit M un point extérieur au disque et $M' = M + dM$ un point infiniment voisin. Soient T_1 et T_2 (resp T'_1 et T'_2) les points de contact des tangentes à ∂D^2 issues de M (resp M'). Le " ds^2 entre M et M' " est égal au birapport des quatre points T_1, T'_1, T_2, T'_2 du cercle ∂D^2 équipé de sa structure projective naturelle (conique dans un plan projectif).



Le groupe des isométries directes est le revêtement universel du groupe des applications projectives du plan projectif qui respectent la conique ∂D^2 . Ce groupe est bien sûr isomorphe au revêtement universel de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Les groupes d'isométries directes de ces deux espaces sont donc exactement les groupes de Lie qui nous ont servi à définir les flots algébriques.

1.2. Complétude de la structure transverse.

Désignons par T l'espace lorentzien plat ou de courbure 1 et par G le groupe d'isométries directes de T . Nous avons ainsi établi l'existence d'une (G, T) -structure transverse pour ϕ : toute transversale suffisamment petite à ϕ est identifiée à un ouvert de T et cette identification est unique à un élément de G près.

Nous pouvons donc étudier ϕ avec les méthodes adaptées à cette situation (voir par exemple [Th2]). Dans le revêtement universel $\tilde{V}$ de V , le relevé $\tilde{\phi}$ de ϕ est défini par une submersion globale, appelée développement :

$$\mathcal{D} : \tilde{V} \rightarrow T.$$

Les relevés $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ dans $\tilde{V}$ sont les images réciproques par $\mathcal{D}$ de deux feuilletages L^s et L^u de T , formés de feuilles isotropes et appelés bien sûr stable et instable.

Le groupe fondamental $\pi_1(V)$ opère sur $\tilde{V}$ de manière équivariante par rapport à une représentation d'holonomie :

$$R : \pi_1(V) \rightarrow G,$$

c'est-à-dire que, pour tout γ de $\pi_1(V)$ et tout x de $\tilde{V}$, on a :

$$\mathcal{D}(\gamma \cdot x) = R(\gamma) \cdot \mathcal{D}(x).$$

Nous nous proposons ici de démontrer que la *structure considérée est complète*, c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est une fibration localement triviale.

Notons $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ les feuilletages stable et instable forts (de dimension 1) relevés dans $\tilde{V}$. Si $\tilde{x}$ est un point de $\tilde{V}$ et si $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss}$ désigne la feuille passant par $\tilde{x}$, il est clair que $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss})$ est un ouvert dans la feuille isotrope stable $L_{\mathcal{D}(\tilde{x})}^s$ de T passant par $\mathcal{D}(x)$. Par conséquent, $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss}$ est naturellement munie d'une structure affine.

Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une fibration localement triviale, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss})$ et $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{uu})$ coïncident en fait avec $L_{\mathcal{D}(\tilde{x})}^s$ et $L_{\mathcal{D}(\tilde{x})}^u$. En effet, il est alors facile de relever dans $\tilde{V}$ un chemin polygonal de T formé d'arcs alternativement tangents aux feuilletages isotropes stable et instable de T . C'est donc ce point que nous allons montrer.

L'idée est analogue à la démonstration de complétude dans [Gh3]. Soit h^t un flot continu paramétrant le feuilletage stable fort $\mathcal{F}^{ss}$ de V et soit $\tilde{h}^t$ le flot relevé dans $\tilde{V}$. Si $x \in V$, les points $x, h^1(x), h^2(x)$ sont trois points de la variété affine de dimension 1 $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss}$. Soit $\mu(x)$ le réel strictement supérieur à 1 tel que $h^2(x) - x = \mu(x)(h^1(x) - x)$ où le signe $-$ est compris dans une carte affine quelconque. Il est bien évident que $\mu(x)$ est continu en x et il est donc minoré sur V par une constante $\mu > 1$.

Considérons maintenant un point x quelconque de V et un point y du type $h^t(x)$ avec $t > 0$. Soit τ un réel tel que $\phi^\tau(y) = h^1\phi^\tau(x)$. L'application $\phi^\tau : \mathcal{F}_x^{ss} \rightarrow \mathcal{F}_{\phi^\tau(x)}^{ss}$ est affine. Soit z le point $\phi^{-\tau}h^2\phi^\tau(x)$. Les trois points x, y, z de $\mathcal{F}_x^{ss}$ sont donc tels que :

$$z - x > \mu(y - x)$$

dans n'importe quelle carte affine. En itérant le procédé, on construit ainsi une suite de points z_n dans $\mathcal{F}_x^{ss}$ dont les coordonnées affines tendent vers $+\infty$. En procédant de même avec $t < 0$, on obtient que $\mathcal{F}_x^{ss}$ est une droite affine complète, c'est-à-dire affinement isomorphe à $\mathbf{R}$. Il en résulte que $\mathcal{D}$ envoie surjectivement une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$ sur une feuille de L^s . C'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons donc établi la complétude de la (G, T) -structure associée à ϕ .

1.3. Fin de la preuve du théorème A.

Pour décrire complètement le feuilletage ϕ , nous étudions maintenant le groupe d'holonomie $R(\pi_1(V)) \subset G$.

AFFIRMATION 1.3.1. — *Le morphisme d'holonomie $R : \pi_1(V) \rightarrow G$ est injectif.*

Preuve. — Comme la structure est complète, un point fixe dans T d'un élément du type $H(\gamma)$ correspond à une orbite fermée de ϕ . Par conséquent, si un élément γ non trivial était dans le noyau de R , toutes les orbites de ϕ seraient fermées.

AFFIRMATION 1.3.2. — *L'image $\Gamma = H(\pi_1(V))$ est un sous-groupe discret de G .*

Preuve. — Je remercie Thierry Barbot qui m'a permis de simplifier la preuve de cette affirmation.

L'image réciproque dans $\tilde{V}$ d'une orbite périodique de ϕ^t est une réunion discrète de feuilles de $\tilde{\phi}$, permutées par l'action de $\pi_1(V)$. En projetant sur T et en utilisant la complétude de la structure, on obtient ainsi une orbite discrète pour l'action de Γ sur T . Puisque ϕ^t préserve le volume, la réunion des orbites périodiques est dense dans V . Il existe donc une partie dense P de T formée de points dont l'orbite par Γ est discrète dans T . Supposons maintenant que Γ ne soit pas discret dans G et soit g^t un sous-groupe à un paramètre de G contenu dans l'adhérence de Γ . Il résulte des remarques précédentes que g^t doit fixer chaque point de P et donc T tout entier. Ceci est bien sûr une contradiction car G opère fidèlement sur T .

AFFIRMATION 1.3.3. — *Le quotient de G par $\Gamma = R(\pi_1(V))$ est compact.*

Preuve. — Il résulte de la complétude de la structure que $\tilde{V}$ est un fibré de fibre $\mathbf{R}$ et de base difféomorphe à $\mathbf{R}^2$. (Un fibré de base simplement connexe et d'espace total connexe est à fibres connexes.) Ainsi $\tilde{V}$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^3$ et V est un espace d'Eilenberg-McLane. Puisque G est contractile, G/Γ est aussi un espace d'Eilenberg-McLane. Les variétés V et G/Γ ont donc même type d'homotopie. La compacité de G/Γ en découle pour des raisons homologiques.

Nous pouvons maintenant achever la preuve du théorème A. Nous disposons de deux feuilletages de dimension 1 orientés sur deux variétés fermées de dimension 3 :

i) le feuilletage ϕ sur la variété V

ii) le feuilletage Φ de dimension 1 engendré par le flot algébrique sur G/Γ .

Il s'agit de démontrer qu'il existe un difféomorphisme envoyant l'un sur l'autre. Nous savons que ces deux feuilletages admettent une (G, T) -structure transverse complète de même holonomie. En d'autres termes, ces deux feuilletages ont des pseudogroupes d'holonomie équivalents (voir [Hae]). Par ailleurs, les feuilles fermées de ϕ et Φ ont une holonomie non triviale de sorte que les revêtements d'holonomie de toutes les feuilles sont contractiles. Ceci est précisément la condition qui garantit que (V, ϕ) et $(G/\Gamma, \Phi)$ sont des classifiants de leurs pseudogroupes d'holonomie [Hae]. Par unicité du classifiant, on conclut à l'existence d'une application $F : V \rightarrow G/\Gamma$ telle que :

i) F est une équivalence d'homotopie, de classe C^∞

ii) F envoie une feuille de ϕ sur une feuille de Φ

iii) transversalement à ϕ , l'application F est un difféomorphisme qui conjugue les (G, T) -structures transverses de ϕ et Φ .

Par contre, la restriction de F à une feuille de ϕ n'est pas nécessairement une bijection. Pour remédier à cette situation, on procède comme dans [Gr] et [Gh1]. Utilisons des paramétrages ϕ^t et Φ^t pour ϕ et Φ et définissons une fonction continue $u : V \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$F \circ \phi^t(x) = \Phi^{u(x,t)} \circ F(x).$$

Si $\tau > 0$, on pose alors :

$$F_\tau(x) = \Phi_{u_\tau(x)} \circ F(x)$$

avec

$$u_\tau(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(x, t) dt.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que, pour τ assez grand, F_τ est un difféomorphisme de classe C^∞ envoyant ϕ sur Φ (voir [Gh1] pour plus de détails).

Ceci achève la preuve du théorème A.

2. Les flots d'Anosov quasi-fuchsien.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème B.

Commençons par une proposition élémentaire qui est en fait inutile pour notre propos, mais qui explique pourquoi les intersections $\mathcal{F}_{g_1}^s \cap \mathcal{F}_{g_2}^u$ restent C^∞ -conjuguées entre elles lorsque l'on modifie g_1 et g_2 par de petites isotopies. Ceci rend plausible la propriété mentionnée dans l'introduction suivant laquelle les feuilletages que nous construisons ne dépendent que des éléments $[g_1]$ et $[g_2]$ de l'espace de Teichmüller de S définis par g_1 et g_2 .

PROPOSITION. — Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages transverses de classe C^∞ sur une variété fermée V . Soient F_t et G_t deux isotopies de classe C^∞ telles que $F_0 = G_0 = \text{id}$. On suppose que pour tout $t \in [0, 1]$, les feuilletages $F_t^* \mathcal{F}$ et $G_t^* \mathcal{G}$ sont transverses. Alors les intersections $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et $F_1^* \mathcal{F} \cap G_1^* \mathcal{G}$ sont conjugues par un difféomorphisme de classe C^∞ isotope à l'identité.

Preuve. — C'est une simple application du résultat bien connu suivant. Si $\overline{\mathcal{L}}$ est un feuilletage de $V \times [0, 1]$ transverse aux sections $V \times \{t\}$, alors les traces de $\overline{\mathcal{L}}$ sur les $V \times \{t\}$ sont toutes conjugues par des difféomorphismes isotopes à l'identité. Les isotopies F_t et G_t permettent alors de définir des feuilletages $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ sur $V \times [0, 1]$ de dimensions 1 de plus que celles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et induisant sur $V \times \{t\}$ les feuilletages $F_t^* \mathcal{F}$ et $G_t^* \mathcal{G}$. On applique alors le résultat précédent à $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{F}} \cap \overline{\mathcal{G}}$.

2.1. Construction des flots quasi-fuchsien.

Soit g une métrique riemannienne de classe C^∞ à courbure -1 sur S et ϕ_g le feuilletage orienté de dimension 1 de $T_1 S$ engendré par son flot

géodésique. La donnée de g permet de construire une représentation fidèle et discrète $\rho_g : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, bien définie à conjugaison près et qui ne dépend que de la classe de g dans l'espace de Teichmüller de S . Nous avons déjà étudié la structure transverse de ϕ_g au paragraphe 1. Pour des raisons qui apparaîtront clairement un peu plus loin, il est commode d'envisager cette structure de la façon suivante. Soit $T = P_1 \times P_1$ le produit de deux droites projectives réelles et $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ considéré comme groupe de difféomorphismes de T . Alors, ϕ_g possède une (G, T) -structure transverse ayant les particularités suivantes :

i) L'image de l'application développante $\mathcal{D}$ du revêtement universel $\widetilde{T_1 S}$ de $T_1 S$ vers $P_1 \times P_1$ est le complémentaire de la diagonale.

ii) Le morphisme d'holonomie $R_g : \pi_1(T_1 S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est le composé de la projection $\mathrm{pr} : \pi_1(T_1 S) \rightarrow \pi_1(S)$ et du morphisme diagonal (ρ_g, ρ_g) .

Soit g_1 une autre métrique à courbure -1 sur S . Il est bien connu (voir [Gr]) que ρ_{g_1} et ρ_g sont topologiquement conjuguées. En d'autres termes, il existe un (unique) homéomorphisme $h_{g_1, g}$ de P_1 tel que, pour tout γ de $\pi_1(S)$, on ait :

$$\rho_{g_1}(\gamma) = h_{g_1, g} \circ \rho_g(\gamma) \circ h_{g_1, g}^{-1}$$

où cette égalité a un sens dans le groupe des homéomorphismes de P_1 .

Si maintenant g_1 et g_2 sont deux métriques à courbure -1 sur S , on considère :

$$R_{g_1, g_2} = (\rho_{g_1}, \rho_{g_2}) \circ \mathrm{pr} : \pi_1(T_1 S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}).$$

Il est clair que l'homéomorphisme $H = (h_{g_1, g}, h_{g_2, g})$ de $P_1 \times P_1$ conjugue les actions R_{g_1, g_2} et $R_{g, g}$ de $\pi_1(T_1 S)$ sur $P_1 \times P_1$. Nous allons exploiter ce fait pour changer la structure différentiable transverse à ϕ_g et construire ainsi les flots cherchés.

PROPOSITION 2.1.1. — *Soient g_1 et g_2 deux métriques à courbure -1 sur S . Il existe un feuilletage ϕ_{g_1, g_2} de dimension 1, orienté et de classe C^∞ , sur $T_1 S$, unique à isotopie de classe C^∞ près tel que :*

i) ϕ_{g_1, g_2} possède une $(\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}), P_1 \times P_1)$ -structure transverse telle que l'application développante est une fibration localement triviale au-dessus du complémentaire dans $P_1 \times P_1$ du graphe d'un homéomorphisme de P_1 .

ii) Le morphisme d'holonomie est $R_{g_1, g_2} : \pi_1(T_1 S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. En particulier, ϕ_{g_1, g_2} ne dépend (à isotopie de classe C^∞ près)

que des points $[g_1]$ et $[g_2]$ de l'espace de Teichmüller de S définis par g_1 et g_2 .

Preuve. — Commençons par prouver l'existence de ϕ_{g_1, g_2} .

La construction est facilitée par le fait qu'il existe sur $T_1 S$ un feuilletage $\mathcal{L}$ de codimension 1 et de classe C^∞ qui est transverse à ϕ_g . Une façon de choisir un tel $\mathcal{L}$ consiste à utiliser le flot horocyclique stable h^τ sur $T_1 S = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ (qui correspond à l'action à gauche des matrices strictement triangulaires supérieures). On vérifie simplement que $\mathcal{L} = h^\tau(\mathcal{F}_g^u)$ est bien transverse à ϕ_g dès que τ est non nul.

On peut utiliser $\mathcal{L}$, ϕ_g et la (G, T) -structure transverse pour recouvrir $V = T_1 S$ par un nombre fini d'ouverts V_i difféomorphes à $T_i \times]0, 1[$ tels que :

- i) T_i est un ouvert de $T = P_1 \times P_1$ qui évite la diagonale,
- ii) $\{*\} \times]0, 1[$ est dans une feuille de ϕ_g ,
- iii) $T_i \times \{t\}$ est dans une feuille de $\mathcal{L}$.

Les changements de cartes sont "à variables séparées", c'est-à-dire du type :

$$(x, t) \in T_i \times]0, 1[\mapsto (\gamma_{ij}x, \theta_{ij}(t)) \in T_j \times]0, 1[$$

où $\gamma_{ij} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et où θ_{ij} est un difféomorphisme local. Il est possible de changer de coordonnée sur T_i en utilisant un élément γ_i de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ envoyant T_i sur $\gamma_i(T_i)$. Les γ_{ij} deviennent alors $\gamma'_{ij} = \gamma_j \gamma_{ij} \gamma_i^{-1}$. On s'assure facilement qu'on peut toujours faire un tel changement de coordonnées de façon à pouvoir supposer que tous les γ_{ij} sont en fait dans le groupe d'holonomie $R_g(\pi_1(T_1 S))$.

Conjuguons la partie transverse des cartes par l'homéomorphisme $H = (h_{g_1, g}, h_{g_2, g})$ de $P_1 \times P_1$. Plus précisément, introduisons dans chaque V_i les nouvelles coordonnées :

$$(H(x), t) \in H(T_i) \times]0, 1[$$

qui ne dépendent que continûment des anciennes. Il est immédiat que les nouveaux changements de cartes sont du type :

$$(y, t) \in H(T_i) \times]0, 1[\mapsto (H\gamma_{ij}H^{-1}(y), \theta_{ij}(t)) \in H(T_j) \times]0, 1[.$$

Nous savons que H conjugue $R_{g, g}$ et $R_{g_1, g}$ et que tous les γ_{ij} sont dans le groupe d'holonomie $R_{g, g}(\pi_1(T_1 S))$. En particulier $H\gamma_{ij}H^{-1}$ est encore un élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Ainsi, nous avons introduit sur $V = T_1 S$ un autre atlas le munissant d'une autre structure différentiable (mais bien sûr définissant la même variété topologique). Dans cette nouvelle

structure, ϕ_g est encore un feuilletage de classe C^∞ , muni d'une (G, T) -structure dont l'holonomie est, par construction, R_{g_1, g_2} . Puisque deux variétés fermées différentiables de dimension 3 qui sont homéomorphes sont difféomorphes, il existe un difféomorphisme entre ces deux structures différentiables (qui n'est qu'un homéomorphisme homotope à l'identité de $T_1 S$). En considérant l'image réciproque de ϕ_g par ce difféomorphisme, on obtient un feuilletage ϕ_{g_1, g_2} sur la variété différentiable $T_1 S$ (avec sa structure standard). Nous affirmons que ϕ_{g_1, g_2} satisfait aux propriétés requises par la proposition. En effet, la structure transverse de ϕ_{g_1, g_2} est par construction d'holonomie R_{g_1, g_2} et l'image de l'application développante est le complémentaire de l'image par H de la diagonale de $P_1 \times P_1$.

L'unicité de ϕ_{g_1, g_2} s'obtient exactement de la même façon que dans la partie 1. Deux feuilletages de dimension 1 ayant les propriétés de la proposition ont même pseudogroupe d'holonomie et ce sont des classifiants de leurs pseudogroupes. Il existe alors une équivalence d'homotopie entre les deux feuilletages que l'on transforme en conjugaison de classes C^∞ comme en 1.3.

Insistons sur le fait que l'unicité de ϕ_{g_1, g_2} montre en particulier que celui-ci ne dépend pas du choix de la métrique g qui a servi de point de départ à la construction. On pourrait d'ailleurs s'en assurer directement.

2.2. Fin de la preuve du théorème B.

Nous séparons ce qui reste à montrer du théorème B en deux propositions.

PROPOSITION 2.2.1. — *Tout flot ϕ_{g_1, g_2}^t paramétrant ϕ_{g_1, g_2} est un flot d'Anosov dont les feuilletages stable et instable faibles sont C^∞ -isotopes à $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$ respectivement.*

Preuve. — Nous savons qu'il existe un homéomorphisme $k = k(g; g_1, g_2)$ de $T_1 S$ envoyant les orbites de ϕ_g sur celles de ϕ_{g_1, g_2} . Il est clair que k envoie les feuilletages stable et instable faibles de ϕ_g sur deux feuilletages $\mathcal{F}_{g_1, g_2}^s$ et $\mathcal{F}_{g_1, g_2}^u$ contenant ϕ_{g_1, g_2} et qui sont de classe C^∞ (et même transversalement projectifs).

Si l'on choisit $g = g_1$, la construction de $\phi_{g_1, g}$ que nous avons donnée montre que $k = k(g_1; g_1, g_2)$ est alors de classe C^∞ le long des feuilles de $\mathcal{F}_g^s$

et que toutes les dérivées de k le long des feuilles de $\mathcal{F}_g^s$ varient continûment transversalement à $\mathcal{F}_g^s$.

Fixons donc un choix de paramétrage ϕ_{g_1, g_2}^t de classe C^∞ pour ϕ_{g_1, g_2} . Le conjugué de ϕ_{g_1, g_2}^t par $k = k(g_1; g_1, g_2)$ est un paramétrage de ϕ_g , de classe C^∞ le long des feuilles de $\mathcal{F}_g^s$ et dont les dérivées dans les feuilles varient continûment transversalement à $\mathcal{F}_g^s$. Puisque nous savons que le flot géodésique de g est de type Anosov, tout paramétrage de classe C^∞ de ϕ_g est encore de type Anosov. On a en fait mieux (voir 3.3, remarque 3.3.1). Si ϕ_g^t est un paramétrage du type précédent, i.e. de classe C^∞ le long de $\mathcal{F}_g^s$, alors il existe un sous-fibré E^{ss} de rang 1, contenu dans $\mathcal{F}_g^s$, invariant par $d\phi_g^t$ (qui est défini et de classe C^∞ dans les feuilles de $\mathcal{F}_g^s$) et contracté exponentiellement par $d\phi_g^t$. Utilisant encore la différentiabilité partielle de $k(g_1; g_1, g_2)$, on obtient par image directe un sous-fibré de rang 1 (encore noté E^{ss}) contenu dans $\mathcal{F}_{g_1, g_2}^s$, invariant par $d\phi_{g_1, g_2}^t$ et contracté exponentiellement. On procède de même avec $k(g_2; g_1, g_2)$ pour construire un fibré fort E^{uu} pour ϕ_{g_1, g_2}^t . Ainsi ϕ_{g_1, g_2}^t est bien un flot d'Anosov.

Il reste à vérifier que les feuilletages stable et instable faibles de ϕ_{g_1, g_2} sont bien C^∞ -conjugués aux feuilletages $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$ respectivement. Ceci résulte presque immédiatement de la construction. Le feuilletage stable faible $\mathcal{F}_{g_1, g_2}^s$ de ϕ_{g_1, g_2} est un feuilletage transversalement projectif qui n'a bien entendu aucune feuille compacte. Ainsi, après une isotopie de classe C^∞ , on peut supposer qu'il est transverse à la fibration en cercles de T_1S et donc qu'il est défini par une représentation de $\pi_1(S)$ dans le groupe des difféomorphismes du cercle [Th1]. Il est immédiat que cette représentation n'est autre que ρ_{g_1} . Mais la suspension de ρ_{g_1} est le feuilletage stable faible $\mathcal{F}_{g_1}^s$. Ainsi $\mathcal{F}_{g_1, g_2}^s$ et $\mathcal{F}_{g_1}^s$ sont bien isotopes. On procède de même pour $\mathcal{F}_{g_1, g_2}^u$.

PROPOSITION 2.2.2. — *Un flot tangent à ϕ_{g_1, g_2} ne peut préserver une forme de volume que si g_1 et g_2 sont isométriques par une isométrie isotope à l'identité.*

Preuve. — Lorsqu'un flot préserve une forme de volume, le Jacobien de l'application de Poincaré de toute orbite périodique est égal à 1.

Dans notre cas, ϕ_{g_1, g_2} , de même que ϕ_g , possède une orbite périodique pour chaque classe d'homotopie libre γ de courbes fermées de S .

Pour ϕ_g , la différentielle de l'application de Poincaré en un point périodique est facile à calculer. Dans une base adaptée à E^{ss} , E^{uu} , cette

différentielle est diagonale

$$\begin{pmatrix} \exp(-1_g(\gamma)) & 0 \\ 0 & \exp(+1_g(\gamma)) \end{pmatrix}$$

où $1_g(\gamma)$ désigne la période de l'orbite ou, de manière équivalente, la g -longueur de la géodésique fermée de g homotope à γ .

Pour ϕ_{g_1, g_2} , le calcul de la transformation de Poincaré résulte du précédent car nous savons que les feuilletages stable et instable faibles de ϕ_{g_1, g_2} sont respectivement $\mathcal{F}_{g_1}^s$ et $\mathcal{F}_{g_2}^u$, à isotopie de classe C^∞ près. On obtient donc encore une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \exp(-1_{g_1}(\gamma)) & 0 \\ 0 & \exp(+1_{g_2}(\gamma)) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si ϕ_{g_1, g_2} préserve une forme de volume, on a $1_{g_1}(\gamma) = 1_{g_2}(\gamma)$ pour toute classe d'homotopie libre de courbe fermée γ . Il est bien connu que ceci entraîne que g_1 et g_2 sont isométriques par une isométrie isotope à l'identité, i.e. qu'un point de l'espace de Teichmüller est déterminé par la longueur des géodésiques fermées (voir par exemple [Th2]).

Remarque 2.2.3. — Considérons un paramétrage ϕ_{g_1, g_2}^t de ϕ_{g_1, g_2} et soit $\mathcal{F}_x^{ss}$ une feuille du feuilletage stable fort correspondant et $\tilde{\mathcal{F}}_x^{ss}$ un relevé dans le revêtement universel $\tilde{T}_1 S$. L'application développante $\mathcal{D} = \tilde{T}_1 S \rightarrow P_1 \times P_1$ a une image qui évite l'image par H de la diagonale qui est aussi le graphe de l'homéomorphisme h_{g_1, g_2} . L'image par $\mathcal{D}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_x^{ss}$ est donc contenue dans un ensemble du type $(P_1 - \{h_{g_1, g_2}(\tau)\}) \times \{x\}$. Ainsi, toute feuille de $\mathcal{F}^{ss}$ est équipée d'une structure affine naturelle, invariante par le flot. Cette structure affine dépend continûment de x mais pas différentiablement dès que g_1 et g_2 ne définissent pas le même point de l'espace de Teichmüller. En effet, si la structure affine variait différentiablement, l'homéomorphisme h_{g_1, g_2} serait différentiable. Il est cependant connu que h_{g_1, g_2} ne peut être différentiable (et même absolument continu) que si g_1 et g_2 définissent le même point de l'espace de Teichmüller [Su].

En revanche, la structure projective sous-jacente à la structure affine de $\mathcal{F}_x^{ss}$ varie de manière C^∞ car $\mathcal{D}$ est de classe C^∞ . Nous verrons plus loin que c'est ce qui caractérise les flots quasi-fuchsien : l'existence de structures projectives sur les variétés stable et instable fortes qui varient de manière C^∞ .

Remarque 2.2.4. — Soit Γ un groupe qui possède deux plongements i_1 et i_2 dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ comme sous-groupes discrets co-compacts. Les

variétés $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})/i_k(\Gamma)$ ($k = 1, 2$) sont difféomorphes et supportent chacun un flot algébrique ϕ_k . En procédant exactement de la même manière que ci-dessus, on peut accoupler ces deux flots pour en construire un troisième dont les feuilletages stable et instable faibles sont respectivement C^∞ -conjugués au feuilletage stable faible de ϕ_1 et au feuilletage instable faible de ϕ_2 . Il suffit pour cela d'utiliser le fait qu'il existe un homéomorphisme $\tilde{h}_{1,2}$ du revêtement universel de $\tilde{P}_1$ de P_1 qui conjugue les actions de Γ sur $\tilde{P}_1$ données par i_1 et i_2 . En fait, la projection de $i_k(\Gamma)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est un sous-groupe discret co-compact qui contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion, c'est-à-dire de type $\rho_{g_k}(\pi_1(S))$ où g_k ($k = 1, 2$) est une métrique à courbure -1 sur une surface fermée S [RVa]. Par conséquent, les flots obtenus par accouplement de deux représentations i_1 et i_2 sont commensurables avec les flots quasi-fuchsien ϕ_{g_1, g_2} : ils sont C^∞ -conjugués après revêtements finis. Pour cette raison, nous conviendrons d'élargir la notion de flot quasi-fuchsien à ces nouveaux exemples.

3. Structures affines et projectives sur les variétés stables et instables.

3.1. La dérivée schwarziennne et les structures projectives.

Nous commençons ce paragraphe par un rappel élémentaire. Soit f un difféomorphisme de classe C^3 , respectant l'orientation, entre deux ouverts de $P_1 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et soit x un point du domaine de définition de f . Il existe un unique difféomorphisme projectif h (i.e. du type $h(t) = \frac{at+b}{ct+d}$) de P_1 tel que :

$$f(x) = h(x), \quad f'(x) = h'(x), \quad f''(x) = h''(x).$$

La dérivée troisième $(h^{-1} \circ f)'''(x)$ est appelée *dérivée schwarziennne* de f en x et se note $S(f)(x)$. En formule, on a :

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, il est commode d'introduire la différentielle quadratique $s(f)$ définie par :

$$s(f) = S(f)dx^2.$$

Il résulte très simplement de la définition précédente que si f_1 et f_2 sont deux difféomorphismes locaux de $\mathbf{R}$ respectant l'orientation, on a :

$$s(f_1 \circ f_2) = f_2^* s(f_1) + s(f_2)$$

où $f_2^* s(f_1)$ désigne bien entendu l'image réciproque de la différentielle quadratique $s(f_1)$ par f_2 . Autrement dit :

$$f_2^* s(f_1) = S(f_1) \circ f_2 \cdot (f_2')^2 dx^2.$$

Les difféomorphismes projectifs sont caractérisés par l'équation différentielle $s(f_1) = 0$. Par conséquent, si f_1 est projectif, on a :

$$s(f_1 \circ f_2) = s(f_2).$$

Il y a donc identification entre la donnée d'une différentielle quadratique sur un intervalle de $\mathbf{R}$ et la donnée d'une structure projective sur cet intervalle. En effet, si une différentielle quadratique $a(x)dx^2$ est donnée sur l'intervalle I , l'équation différentielle $S(f) = a$ a des solutions locales qui sont des difféomorphismes locaux entre I et un ouvert de P_1 . Deux de ces difféomorphismes diffèrent par composition au but par une application projective. On a donc bien une structure projective sur I . La construction inverse est aussi claire.

On peut procéder de même avec les structures affines. Si f est un difféomorphisme respectant l'orientation entre deux ouverts de $\mathbf{R}$ et si x est un point du domaine de f , il existe une unique application affine h telle que $h(x) = f(x)$ et $h'(x) = f'(x)$. On pose alors $N(f)(x) = (h^{-1} \circ f)''(x)$ et on introduit la forme différentielle $n(f) = N(f)dx$. La formule de composition est encore :

$$n(f_1 \circ f_2) = f_2^* n(f_1) + n(f_2).$$

De même que précédemment, la donnée d'une structure affine sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est équivalente à celle d'une forme différentielle sur I .

3.2. Synchronisation du flot.

Plaçons-nous dans les hypothèses suivantes. Le flot d'Anosov ϕ^t sur la variété fermée V de dimension 3 est tel que le feuilletage stable faible $\mathcal{F}^s$ est de classe C^∞ (et orienté). Le champ de vecteurs associé à ϕ^t est toujours noté X .

LEMME 3.2.1. — *Il existe une 1-forme différentielle ω non singulière, de classe C^∞ , qui définit le feuilletage $\mathcal{F}^s$ et telle que :*

$$\mathcal{L}_X \omega = u \cdot \omega$$

où u est une fonction strictement négative.

Preuve. — Cette affirmation est à rapprocher du fait connu que l'on peut toujours supposer que la constante C intervenant dans la définition d'un flot d'Anosov est égale à 1.

Soit ω_0 une 1-forme non singulière, de classe C^∞ , définissant $\mathcal{F}^s$. Bien sûr, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la forme $(\phi^t)^*\omega_0$ définit aussi $\mathcal{F}^s$. On pose alors, pour $\tau \in \mathbf{R}$:

$$\omega_\tau = \int_0^\tau (\phi^t)^*\omega_0 dt.$$

En calculant la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X\omega_\tau$, on trouve :

$$\mathcal{L}_X\omega_\tau = (\phi^\tau)^*\omega_0 - \omega_0.$$

La définition même des flots d'Anosov montre que si $\tau > 0$ est assez grand, la forme ω_τ satisfait la condition requise par le lemme.

COROLLAIRE 3.2.2. — *Il existe un changement de paramétrage ψ^t de ϕ^t tel que, pour le flot d'Anosov ψ^t , le fibré stable fort E^{ss} soit de classe C^∞ .*

Preuve. — Soit ω une forme comme dans le lemme précédent et Y le champ de vecteurs parallèles à X tel que $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$ i.e. $Y = -\frac{1}{u}X$. Comme ω est une forme intégrable, il existe une 1-forme ω_1 telle que $\frac{u}{d}\omega = \omega \wedge \omega_1$. Puisque :

$$\mathcal{L}_Y\omega = i_Y d\omega = i_Y\omega \wedge \omega_1 = -\omega_1(Y)\omega = -\omega,$$

on a :

$$\omega_1(Y) = 1.$$

Par conséquent, l'intersection des noyaux de ω et de ω_1 est un sous-fibré de rang 1 et de classe C^∞ , invariant par le flot ψ^t engendré par Y . La définition des flots d'Anosov permet de montrer simplement que les seuls sous-fibrés de rang 1 invariants sont les fibrés stable et instable forts ainsi que $\mathbf{R}.Y$. Il en résulte, dans notre cas, que le fibré stable fort de ψ^t n'est autre que l'intersection des noyaux de ω et de ω_1 ; il est donc de classe C^∞ .

Nous dirons que le flot ψ^t obtenu par ce corollaire est *synchronisé* par rapport au feuilletage stable faible. On comparera cette notion à [Pa], [PaPo].

Remarque 3.2.3. — Supposons que le flot d'Anosov initial ϕ^t préserve une forme de volume Ω . Si ω_s est une 1-forme non singulière définissant $\mathcal{F}^s$, il existe une unique forme ω_u définissant $\mathcal{F}^u$ pour laquelle :

$$\omega_s \wedge \omega_u = i_X \Omega.$$

Si Y est le champ de vecteurs parallèles à X tel que $\mathcal{L}_Y \omega_s = -\omega_s$, on a nécessairement $\mathcal{L}_Y \omega_u = \omega_u$. La démonstration du corollaire précédent montre que le flot d'Anosov ψ^t engendré par Y a des fibrés stable et instable forts de classe C^∞ . En utilisant notre théorème principal de [Gh3], on en déduit que ψ^t est C^∞ -conjugué à un flot algébrique dont on a modifié le paramétrage. Nous obtenons ainsi une autre preuve du théorème A. Cependant, cette preuve nous paraît moins intéressante que celle proposée au paragraphe 1, car elle utilise [Gh3].

3.3. Pincement et changement de paramétrage.

Commençons par nous convaincre d'une propriété déjà utilisée de nombreuses fois dans cet article; si l'on change de paramétrage un flot d'Anosov, le nouveau flot obtenu est encore un flot d'Anosov. Fixons toujours ϕ^t un flot d'Anosov sur V et soient E^{ss} et E^{uu} les sous-fibrés correspondants. Un flot ψ^t , reparamétrage de ϕ^t , est du type :

$$\psi^t(x) = \phi^{u(x,t)}(x)$$

où $u : V \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^∞ vérifiant une relation de type cocycle exprimant que ψ^t est un flot. La différentielle de ψ^t est donnée par :

$$d\psi^t(v) = d\phi^{u(x,t)}(v) + d_x u(-, t)(v) \cdot X.$$

On cherche le fibré stable fort F^{ss} de ψ^t comme l'ensemble des vecteurs du type $v_{ss} + \xi(v_{ss}) \cdot X$ où $v_{ss} \in E^{ss}$ et ξ désigne une forme linéaire inconnue sur le fibré E^{ss} . La condition d'invariance de F^{ss} par $d\psi^t$ s'écrit :

$$((\phi^{u(x,t)})^* \xi_x - \xi_x)(v_{ss}) = d_x u(-, t)(v_{ss}).$$

Pour chaque t fixé,

$$\xi_x \mapsto (\phi^{u(x,t)})^* \xi_x$$

définit un opérateur sur l'espace de Banach des formes linéaires continues sur E^{ss} . La définition des flots d'Anosov montre qu'une puissance assez grande de cet opérateur est une contraction. Par ailleurs, les opérateurs associés à deux valeurs de t commutent évidemment comme il ressort de la

relation de cocycle satisfaite par $u(x, t)$. L'équation fonctionnelle considérée a donc une solution continue unique et indépendante de t . Nous avons donc trouvé un sous-fibré F^{ss} invariant par ψ^t et en bijection canonique avec E^{ss} par :

$$v_{ss} \in E^{ss} \rightarrow v_{ss} + \xi(v_{ss})X \in F^{ss}.$$

Il est maintenant facile de vérifier que $d\psi^t$ contracte exponentiellement les vecteurs de F^{ss} car $d\phi^t$ contracte les vecteurs de E^{ss} . On procède bien sûr de la même façon avec E^{uu} .

Remarque 3.3.1. — Pour construire F^{ss} , nous n'avons pas utilisé le fait que $u(x, t)$ est de classe C^∞ . Il suffit que, pour tout t , la fonction $u(-, t)$ soit différentiable le long des feuilles de $\mathcal{F}^s$ et que ces différentielles varient continûment transversalement à $\mathcal{F}^s$. Nous avons utilisé ce fait lors de la démonstration du théorème B pour montrer que ϕ_{g_1, g_2}^t est un flot d'Anosov.

Dans l'introduction, nous avons défini des coefficients $\lambda_{uu}(x, t)$ et $\lambda_{ss}(x, t)$ associés à un flot d'Anosov ϕ^t et à des choix de normes sur E^{ss} et E^{uu} . Il résulte de la discussion précédente que si l'on calcule les coefficients $\lambda'_{uu}(x, t)$ et $\lambda'_{ss}(x, t)$ relatifs à ψ^t et aux normes correspondantes sur F^{ss} et F^{uu} (via les isomorphismes indiqués plus haut entre E^{ss} et F^{ss} ainsi que E^{uu} et F^{uu}), on a simplement :

$$\lambda'_{uu}(x, t) = \lambda_{uu}(x, u(x, t))$$

$$\lambda'_{ss}(x, t) = \lambda_{ss}(x, u(x, t)).$$

Ainsi ϕ^t est α -pincé si et seulement si ψ^t est α -pincé.

Remarquons que pour le calcul du pincement d'un flot d'Anosov, on utilise des normes sur E^{ss} et E^{uu} . On pourrait tout aussi bien utiliser une métrique riemannienne sur V de classe C^0 . Par approximation, on peut toujours supposer cette métrique de classe C^∞ , quitte à augmenter arbitrairement peu la valeur de α .

3.4. Une structure projective le long de $\mathcal{F}^{ss}$ invariante par le flot.

Nous abordons maintenant la preuve du théorème C. Nous considérons donc un flot d'Anosov ϕ^t de classe C^∞ sur la variété V pour lequel $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe C^∞ . Après reparamétrage, nous pouvons supposer

que ϕ^t est synchronisé par rapport au feuilletage stable et donc que E^{ss} est de classe C^∞ .

Nous commençons par montrer l'existence de structures projectives sur les feuilles du feuilletage stable fort $\mathcal{F}^{ss}$, invariantes par ϕ^t .

Fixons une métrique riemannienne sur V et soit h^τ le flot unitaire positif de classe C^∞ paramétrant $\mathcal{F}^{ss}$. Toute feuille de $\mathcal{F}^{ss}$ est alors identifiée à une droite $\mathbf{R}$ par ce paramétrage τ . Bien sûr, le flot ϕ^t ne préserve pas ce paramétrage de $\mathcal{F}^{ss}$. D'après ce que nous avons vu, faire choix d'une structure projective sur les feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$ revient à choisir une différentielle quadratique sur chaque orbite de h^τ . Cette différentielle quadratique est donnée par une fonction $a : V \rightarrow \mathbf{R}$; sur chaque orbite de h^τ , c'est $a(\tau)d\tau^2$. Nous dirons que la structure projective est de classe C^k si la fonction a est de classe C^k .

PROPOSITION 3.4.1. — *Il existe une unique structure projective sur les feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$, dépendant continûment du point et invariante par ϕ^t . Cette structure est de classe C^1 si ϕ^t est α -pincé avec $\alpha < 2$.*

Preuve. — Le difféomorphisme ϕ^t envoie $\mathcal{F}_x^{ss}$ sur $\mathcal{F}_{\phi^t x}^{ss}$ qui sont deux droites paramétrées par τ . On peut donc introduire deux fonctions numériques sur V :

i) La dérivée $\mu_t(x)$ de ϕ^t en x , considérée comme application de $\mathcal{F}_x^{ss}$ vers $\mathcal{F}_{\phi^t x}^{ss}$. On a bien sûr :

$$\mu_t(x) \leq C \exp(-\lambda_{ss} t)$$

(avec les notations précédentes, on a $\mu_t(x) = \exp(-\lambda_{ss}(x, t))$).

ii) La dérivée schwarziennne $v_t(x)$ de ϕ^t en x , encore considérée comme application de $\mathcal{F}_x^{ss}$ vers $\mathcal{F}_{\phi^t x}^{ss}$.

Comme nous l'avons vu, nous cherchons une fonction $a : V \rightarrow \mathbf{R}$ telle que la structure projective qu'elle définit sur $\mathcal{F}^{ss}$ soit invariante par ϕ^t . La condition à écrire est :

$$a(x) - \mu_t(x)^2 a \circ \phi^t(x) = v_t(x).$$

On interprète, pour t fixé, cette équation comme celle d'un point fixe pour l'opérateur A_t défini sur l'espace des fonctions continues sur V par :

$$A_t(a)(x) = v_t(x) + \mu_t(x)^2 a \circ \phi^t(x).$$

On note que tous ces opérateurs A_t commutent car $v_t(x)$ et $\mu_t(x)$ vérifient des relations de cocycle évidentes. L'existence d'une unique solution de

classe C^0 est claire car A_t est une contraction pour t assez grand :

$$\begin{aligned} \|A_t(a_1) - A_t(a_2)\|_0 &= \sup_{x \in V} |A_t(a_1)(x) - A_t(a_2)(x)| \\ &\leq \sup_{x \in V} (\mu_t(x))^2 \|a_1 - a_2\|_0. \end{aligned}$$

L'existence d'une solution de classe C^1 résultera de l'hypothèse de pincement. Introduisons une métrique riemannienne de classe C^∞ sur V de façon à pouvoir définir la semi-norme suivante sur l'espace des fonctions de classe C^1 :

$$\|a\|_1 = \sup_{x \in V} \|da(x)\|.$$

On a alors :

$$A_t(a_1) - A_t(a_2) = \mu_t^2(a_1 \circ \phi^t - a_2 \circ \phi^t)$$

$$d(A_t(a_1) - A_t(a_2)) = d(\mu_t^2)(a_1 \circ \phi^t - a_2 \circ \phi^t) + \mu_t^2(da_1 - da_2) \circ d\phi^t.$$

Faisons maintenant l'hypothèse que ϕ^t est α -pincé avec $\alpha < 2$. Il en résulte qu'il est possible de choisir une métrique riemannienne et une constante $k_t < 1$ pour t assez grand tels que :

$$\mu_t(x)^2 \|d\phi^t(x)\| \leq k_t < 1.$$

On a donc, quitte à modifier $k_t < 1$ et avec une constante $K_t > 0$:

$$\|A_t(a_1) - A_t(a_2)\|_0 \leq k_t \|a_1 - a_2\|_0$$

$$\|A_t(a_1) - A_t(a_2)\|_1 \leq k_t \|a_1 - a_2\|_1 + K_t \|a_1 - a_2\|_0.$$

Il suffit alors de remarquer que si l'on définit une norme C^1 par :

$$|||a||| = \|a\|_1 + \frac{1}{\varepsilon} \|a\|_0,$$

alors pour t fixé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que A_t soit une contraction de la norme $||| \cdot |||$. Il en résulte que l'équation fonctionnelle étudiée a une unique solution de classe C^1 .

Remarque importante 3.4.2. — Supposons que l'on cherche une structure affine sur les feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$ invariante par ϕ^t . Nous sommes amenés à chercher une 1-forme différentielle le long des feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$ (et non plus une différentielle quadratique). Il est facile de s'assurer que la technique indiquée plus haut fonctionne sans aucune hypothèse. Pour tout flot d'Anosov de classe C^∞ , il existe une unique structure affine sur les feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$, continue et invariante par ϕ^t . Ce fait est bien connu des

experts. L'argument de complétude décrit au paragraphe 1.3 s'applique et les feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$ sont ainsi des droites affines complètes.

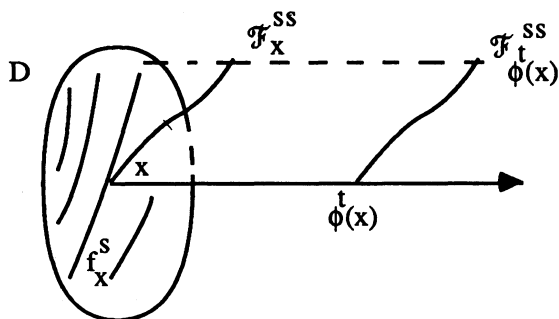
Cependant, et même sous des conditions de pincement, cette structure affine peut ne dépendre que continûment du point. Nous avons déjà noté ce phénomène pour les flots quasi-fuchsien : la structure affine ne varie que continûment mais la structure projective sous-jacente varie de manière C^∞ . Dans la preuve précédente, c'est le caractère *quadratique* de la différentielle $a(\tau)d\tau^2$ qui introduisait un facteur $\mu_t(x)^2$ qui contracte suffisamment pour permettre une contraction des normes C^1 (sous hypothèse de pincement).

3.5. Une structure projective transverse pour $\mathcal{F}^u$.

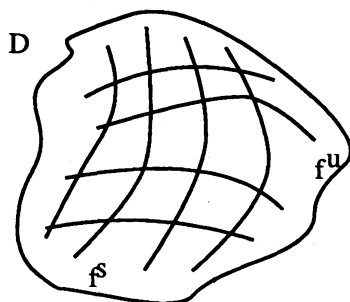
Dans le paragraphe précédent, nous avons équipé chaque feuille de $\mathcal{F}^{ss}$ d'une structure projective sous l'hypothèse que ϕ^t est α -pincé avec $\alpha < 2$. Nous nous plaçons ici dans les hypothèses du théorème C, c'est-à-dire que nous supposons que ϕ^t est α -pincé avec $\alpha < 2$ et que $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ sont de classe C^∞ .

Nous allons construire une *structure transverse projective* pour le feuilletage $\mathcal{F}^u$ de codimension 1.

Considérons un disque D transverse au feuilletage ϕ de dimension 1. Les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ tracent sur D des feuilletages de classe C^∞ notés f^s et f^u . Puisque nous venons d'équiper chaque feuille de $\mathcal{F}^{ss}$ d'une structure projective et ceci de manière invariante par ϕ^t , les feuilles de f^s sont elles aussi naturellement projectives.



Par ailleurs, sur D , l'holonomie de f^u définit des difféomorphismes locaux entre feuilles de f^s .



Nous nous proposons de montrer que tous ces difféomorphismes locaux sont projectifs. Toutes les structures projectives sur les transversales à $\mathcal{F}^u$ que sont les $\mathcal{F}_x^{ss}$ sont donc compatibles et on aura ainsi établi l'existence d'une structure projective transverse pour $\mathcal{F}^u$ invariante par holonomie.

Fixons un point x de D et v un vecteur tangent à la feuille f_x^u de f^u passant par x . Paramétrons un voisinage de x dans f_x^u par $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \gamma(t) \in f_x^u$ de telle sorte que $\gamma(0) = x$ et $\frac{\partial}{\partial t} \gamma(t)_{t=0} = v$. Soit $h_t : f_{\gamma(0)}^s \rightarrow f_{\gamma(t)}^s$ l'application localement définie par l'holonomie de f^u . Puisqu'il s'agit d'un difféomorphisme local entre variétés projectives, la dérivée schwarzienne $s(h_t)$ est une différentielle quadratique sur $f_{\gamma(0)}^s$. Les structures que nous avons construites étant de classe C^1 (par l'hypothèse de pincement), nous pouvons considérer :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} s(h_t)_{t=0} \right)(x).$$

C'est une forme quadratique sur l'espace tangent à f_x^s en x . Si l'on change le vecteur v en λv , il est clair que cette forme quadratique est multipliée par λ . En résumé, nous avons construit, pour tout x de D , une application :

$$Q_x = T_x f_x^s \times T_x f_x^u \rightarrow \mathbf{R}$$

qui est quadratique en la première variable, linéaire en la seconde, et qui dépend continûment de x . Bien sûr, cette construction est invariante par le pseudogroupe d'holonomie de ϕ . Nous allons voir que ceci force Q_x à être identiquement nul. Fixons une métrique riemannienne sur V et soient X^{ss} , X^{uu} les champs unitaires tangents à E^{ss} , E^{uu} et positivement orientés. L'application Q peut alors être évaluée sur X^{ss} et X^{uu} (projetés sur un

disque transverse à D). On obtient alors une fonction continue $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie évidemment :

$$q(\phi^t(x)) = \exp(-2\lambda_{ss}(x, t)) \exp(\lambda_{uu}(x, t)) q(x).$$

Par l'hypothèse de pincement, on a :

$$|q(\phi^t(x))| < |q(x)|$$

pour $t > 0$ et $q(x) \neq 0$. Il résulte de ceci que la valeur maximale de $|q(x)|$ ne peut qu'être nulle, c'est-à-dire que q est identiquement nulle.

Ainsi, toutes les dérivées schwarziennes $s(h_t)$ sont nulles et nous avons bien établi l'existence d'une structure projective transverse invariante, de classe C^1 , pour le feuilletage $\mathcal{F}^u$ de codimension 1.

On procéderait bien entendu de manière complètement analogue pour $\mathcal{F}^s$.

Avec nos hypothèses, la structure projective transverse pour $\mathcal{F}^u$ est en fait de classe C^∞ . Ceci résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.5.1. — *Soit ϕ^t un flot d'Anosov de classe C^∞ tel que $\mathcal{F}^u$ est de classe C^∞ . Si $\mathcal{F}^u$ admet une structure transverse projective de classe C^0 , alors cette structure est en fait de classe C^∞ .*

Remarque. — Rappelons que nous disons qu'une structure projective est de classe C^k si la différentielle quadratique correspondante $a(\tau)d\tau^2$ est de classe C^k . Sur une transversale donnée à $\mathcal{F}^u$, la carte projective est alors de classe C^{k+3} car elle est solution de l'équation différentielle $S(f) = a$.

Preuve. — C'est un cas particulier d'un théorème établi dans [GhTs]. Nous en donnons ici une preuve simplifiée car nous avons affaire à un feuilletage d'Anosov. Soit $\mathcal{T}$ la réunion disjointe d'un nombre fini de transversales à $\mathcal{F}^u$ qui coupent toutes les feuilles de $\mathcal{F}^u$ et soit $\mathcal{P}$ le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}^u$ agissant sur $\mathcal{T}$. La structure transverse munit $\mathcal{T}$ de cartes locales à valeurs dans P_1 , de classe C^1 (en fait de classe C^4 d'après la remarque précédente), telles que dans ces coordonnées le pseudogroupe $\mathcal{P}$ opère de manière projective. Soit $U \subset \mathcal{T}$ l'ouvert formé des points au voisinage desquels les cartes locales dans P_1 sont de classe C^∞ . On montre successivement que :

i) U est invariant par $\mathcal{P}$, c'est-à-dire qu'il correspond à un ouvert saturé pour $\mathcal{F}^u$.

ii) U contient tous les points fixes de $\mathcal{P}$. En effet, si $\gamma \in \mathcal{P}$ fixe le point x de $\mathcal{T}$, on sait que $\gamma'(x) \neq 1$ (car $\mathcal{F}^u$ est un feuilletage d'Anosov). Il en résulte que γ est localement C^∞ -conjugué à une application linéaire $t \mapsto \lambda t$ en 0 (avec $\lambda \neq 1$) (théorème de Sternberg [St]). La structure projective au voisinage de 0 est alors donnée par un C^1 -difféomorphisme local $\theta(t)$ qui est tel que $\tau \mapsto \theta(\lambda\theta^{-1}(\tau))$ est projectif au voisinage de $\theta(0)$. En composant au but θ avec une autre application projective, on peut supposer que $\theta(0) = 0$ et $\theta(\lambda\theta^{-1}(\tau)) = \lambda\tau$, ou encore $\theta(\lambda\tau) = \lambda\theta(\tau)$. Il en résulte que $\theta'(\lambda\tau) = \theta'(\tau)$ et $\theta'(\lambda^n\tau) = \theta'(\tau)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En faisant tendre n vers $\pm\infty$, on trouve que θ est linéaire et donc de classe C^∞ . Ainsi, au voisinage du point x , la structure projective est de classe C^∞ .

iii) On a $U = \mathcal{T}$, i.e. la structure projective est de classe C^∞ partout. Le fermé complémentaire $\mathcal{T} - U$ correspondrait, s'il était non vide, à un fermé F non vide de V saturé par $\mathcal{F}^u$ qui ne contiendrait aucune orbite périodique de ϕ^t par ii). Dans le cas où $\mathcal{F}^u$ a toutes ses feuilles denses (cas transitif) un tel fermé F ne peut évidemment exister. Sinon, le fait que $\mathcal{F}^u$ n'a pas de feuilles compactes, associé au théorème de Sacksteder [Sa], montre que tout fermé saturé non vide de V contient une feuille d'holonomie linéaire non triviale et un fermé F ayant les propriétés ci-dessus ne peut donc pas exister.

4. Démonstration des théorèmes C et D.

L'essentiel du théorème C est déjà démontré. Nous savons que si ϕ^t est α -pincé avec $\alpha < 2$ et si $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe C^∞ , alors $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont transversalement projectifs. Par conséquent ϕ , qui est l'intersection de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$, admet une $(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), P_1 \times P_1)$ -structure transverse. La fin de la preuve est plus technique et de moindre intérêt : nous allons analyser le groupe d'holonomie de cette structure pour pouvoir montrer que ϕ est en fait un flot quasi-fuchsien, à revêtement fini près.

Nous avons rédigé les preuves des théorèmes C et D de manières indépendantes bien que le théorème C permette d'obtenir une preuve simplifiée du théorème D.

4.1. Le théorème C : flots d'Anosov pincés
dont les feuilletages stable et instable faibles sont de classe C^∞ .

Nous supposons donc que ϕ^t est un flot α -pincé sur V avec $\alpha < 2$ et que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe C^∞ . La structure transverse de ϕ est alors modélisée sur le produit $P_1 \times P_1$. Il est en fait commode de passer au revêtement universel et de considérer le produit $\tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1$ de deux copies du revêtement universel de P_1 , muni de l'action produit de $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R}) \times \widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})$. On a donc une application développante :

$$\mathcal{D} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1$$

où $\tilde{V}$ désigne toujours le revêtement universel de V . De même, on a un morphisme d'holonomie :

$$R : \pi_1(V) \rightarrow \widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R}) \times \widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R}).$$

Si l'on compose $\mathcal{D}$ avec la première (resp. seconde) projection, on obtient l'application développante correspondant à la structure projective transverse de $\mathcal{F}^u$ (resp $\mathcal{F}^s$).

Notons $\tau \in \tilde{P}_1 \rightarrow \tau + 1 \in \tilde{P}_1$ un générateur du groupe du revêtement $\tilde{P}_1 \rightarrow P_1$.

PROPOSITION 4.1.1. — *Deux cas sont possibles :*

a) ou bien $\mathcal{D}$ est une fibration (triviale) au-dessus d'un "carré" du type :

$$]\tau, \tau + 1[\times]\tau', \tau' + 1[\subset \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1.$$

b) ou bien $\mathcal{D}$ est une fibration (triviale) au-dessus d'une "bande" de $\tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1$ du type :

$$\{(\tau, \tau') \in \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1 \mid h(\tau) < \tau' < h(\tau) + 1\}$$

où $h : \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_1$ est un homéomorphisme tel que $h(\tau + 1) = h(\tau) + 1$.

Nous utiliserons deux lemmes.

LEMME 4.1.2. — Notons $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$ (resp $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$) le relevé de $\mathcal{F}^{ss}$ (resp $\mathcal{F}^{uu}$) dans $\tilde{V}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss}$ (resp $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{uu}$) la feuille passant par le point $\tilde{x}$. L'image par $\mathcal{D}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss}$ (resp $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{uu}$) est un ensemble du type $]\tau, \tau + 1[\times \{\tau'\}$ (resp $\tau \times]\tau', \tau' + 1[$).

Preuve. — Nous avons déjà vu qu'il existe une unique structure affine continue le long de $\mathcal{F}^{ss}$ invariante par ϕ^t et que chaque feuille est

une droite affine complète. Nous avons vu aussi qu'il existe une unique structure projective continue invariante par ϕ^t : c'est celle donnée par $\mathcal{D}$. Il en résulte que $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^{ss})$ est un ouvert de $\tilde{P}_1 \times \{\tau'\}$ projectivement isomorphe à une droite affine complète, c'est-à-dire un intervalle $] \tau, \tau + 1[$.

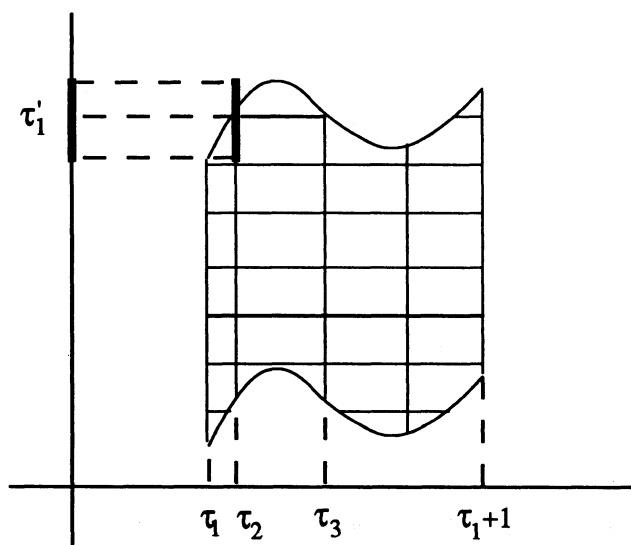
LEMME 4.1.3. — *L'espace des feuilles du relevé $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (resp $\tilde{\mathcal{F}}^u$) de $\mathcal{F}^s$ (resp $\mathcal{F}^u$) à $\tilde{V}$ est une variété séparée (difféomorphe à $\mathbb{R}$).*

Preuve. — Soit $\tilde{x}$ un point de $\tilde{V}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^s$ la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ passant par $\tilde{x}$. On note $U(\tilde{x})$ la réunion des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ passant par les points de $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^s$. Cet ouvert $U(\tilde{x})$ est une réunion de feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ et, d'après le lemme 0.1, l'image $\mathcal{D}(U(\tilde{x}))$ est du type

$$\{(\tau, \tau') \in \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1 \mid \tau_1 < \tau < \tau_1 + 1, \ h(\tau) < \tau' < h(\tau) + 1\}$$

où $h :]\tau, \tau + 1[\rightarrow \tilde{P}_1$ est une fonction continue car $\mathcal{D}(U(\tilde{x}))$ est ouvert. Par ailleurs, la restriction de $\mathcal{D}$ à $U(\tilde{x})$ est une fibration (triviale) au-dessus de son image.

Nous affirmons d'abord que h est monotone. Il en résultera que l'espace des feuilles de la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ à $U(\tilde{x})$ est l'intervalle $]h(\tau_1), h(\tau_1 + 1) + 1[$ et qu'il est donc séparé. Si h n'était pas monotone, on pourrait trouver $\tau'_1 \in \tilde{P}_1$ tel que l'une des composantes connexes $I =]\tau_2, \tau_3[$ de l'ouvert $\{\tau \in \tilde{P}_1 \mid (\tau, \tau'_1) \in \mathcal{D}(U(\tilde{x}))\}$ ait ses deux bornes dans $] \tau_1, \tau_1 + 1[$.



Soit $\tilde{y}$ un point de $U(\tilde{x})$ tel que $\mathcal{D}(\tilde{y}) \in I \times \{\tau'_1\}$. Nous savons que la projection $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{y}}^{ss})$ est du type $] \tau_4, \tau_4 + 1[\times \{\tau'_1\}$ et l'une au moins des deux bornes de I , par exemple τ_2 , n'est pas une borne de $] \tau_4, \tau_4 + 1[$. Il existe donc un point $\tilde{z}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{y}}^{ss}$ tel que $\mathcal{D}(\tilde{z}) = (\tau_2, \tau'_1)$. Ce point $\tilde{z}$ est bien entendu dans l'adhérence de $U(\tilde{x})$. Puisque $U(\tilde{x})$ est une réunion de feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^u$, il en est de même pour l'adhérence $\bar{U}(\tilde{x})$ de $U(\tilde{x})$.

Par conséquent, la feuille $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{z}}^{uu}$ est toute entière contenue dans $\bar{U}(\tilde{x})$. L'adhérence de $\mathcal{D}(U(\tilde{x}))$ contient donc $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{z}}^{uu})$ qui est du type $\{\tau_2\} \times J$ où J est un intervalle ouvert contenant τ'_1 . Mais ceci est impossible car l'adhérence de $\mathcal{D}(U(\tilde{x}))$ n'est autre que $\{(\tau, \tau') \mid \tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + 1, h(\tau) \leq \tau' \leq h(\tau) + 1\}$ et $\tau'_1 = h(\tau_2)$ ou $h(\tau_2) + 1$. Ceci établit l'affirmation suivant laquelle h est monotone.

Supposons maintenant que deux feuilles $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ne soient pas séparées dans l'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et montrons que $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2$. Si $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ sont des points de $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ respectivement, les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ passant par $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}_1}^{uu}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}_2}^{uu}$ définissent des voisinages de $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ dans l'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et ne peuvent donc être disjoints. Il existe donc un point $\tilde{x}$ de $\tilde{V}$ tel que $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ appartiennent tous les deux à $U(\tilde{x})$. Puisque nous avons montré que l'espace des feuilles de la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ à $U(\tilde{x})$ est séparé, les points $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ sont dans la même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$, c'est-à-dire que $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2$. Ceci établit le lemme.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 4.1.1.

Considérons d'abord la composition $pr_1 \circ \mathcal{D} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{P}_1$, où pr_1 désigne la première projection. Bien sûr, $pr_1 \circ \mathcal{D}$ transite à travers l'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ qui est $\mathbf{R}$ d'après le lemme 0.2. Ainsi $pr_1 \circ \mathcal{D}$ est une fibration (triviale) de $\tilde{V}$ sur un intervalle ouvert I de $\tilde{P}_1$. L'ensemble $\mathcal{D}(\tilde{V})$ est alors de la forme :

$$\{(\tau, \tau') \in \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1 \mid \tau \in I, h(\tau) < \tau' < h(\tau) + 1\}$$

où h est continue et monotone d'après ce qui précède. En renversant les rôles de $\mathcal{F}^{ss}$ et $\mathcal{F}^{uu}$, on voit que $\mathcal{D}(\tilde{V})$ est aussi du type :

$$\{(\tau, \tau') \in \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1 \mid \tau' \in J, h'(\tau') < \tau < h'(\tau') + 1\}.$$

Le lecteur vérifiera que les seuls ouverts de $\tilde{P}_1 \times \tilde{P}_1$ ayant cette propriété sont ceux indiqués dans la proposition 4.1.1, quitte à changer l'orientation des $\tilde{P}_1$, ce qui revient à changer de générateur pour le revêtement

$\tilde{P}_1 \rightarrow P_1$. (On notera que les homéomorphismes h et h' sont inverses l'un de l'autre).

Enfin, le fait que $\mathcal{D}$ soit une fibration sur son image est clair car il est possible de relever $\{\tau\} \times]h(\tau), h(\tau) + 1[$ et $]h'(\tau'), h'(\tau') + 1[\times \{\tau'\}$ dans $\mathcal{F}^{uu}$ et $\mathcal{F}^{ss}$ respectivement et il est donc possible de relever n'importe quel chemin polygonal de $\mathcal{D}(\tilde{V})$ alternativement vertical et horizontal.

Pour terminer la démonstration du théorème C, nous traitons séparément les cas a) et b) de la proposition.

PROPOSITION 4.1.4. — *Dans le cas a) de la proposition 4.1.1, le flot ϕ^t est la suspension, à temps de retour variable, d'un difféomorphisme linéaire du tore T^2 .*

Preuve. — La structure transverse de ϕ est alors modelée sur le produit de deux droites affines $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sur lequel opère le produit $\text{Aff}(\mathbf{R}) \times \text{Aff}(\mathbf{R})$ de deux copies du groupe affine. De ce point de vue, la structure est complète. Pour les mêmes raisons qu'en 1.3.1, le morphisme d'holonomie est injectif de sorte que $\pi_1(V)$ est un groupe résoluble. Dans [Ar] et [Pl] les flots d'Anosov sur les variétés fermées de dimension 3 à groupe fondamental résoluble sont classés : ce sont les suspensions de difféomorphismes d'Anosov du tore T^2 . Dans notre cas, le tore T^2 hérite d'une structure affine complète, i.e. affinement isomorphe à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Par ailleurs, l'application de premier retour sur ce tore T^2 est bien entendu affine de sorte que ϕ^t est bien C^∞ -conjugué à la suspension à temps variable d'un difféomorphisme linéaire du tore T^2 .

PROPOSITION 4.1.5. — *Dans le cas b) de la proposition, le flot ϕ^t est C^∞ -conjugué à un revêtement fini d'un flot quasi-fuchsien.*

Preuve. — Considérons les morphismes :

$$\text{pr}_i \circ R : \pi_1(V) \rightarrow \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R}) \quad (i = 1, 2).$$

Ce sont les morphismes d'holonomie des structures transversalement projectives pour $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ qui sont complètes (i.e. $\text{pr}_i \circ \mathcal{D}$ est une fibration (triviale) de $\tilde{V}$ sur $\tilde{P}_1$).

On établit successivement les faits suivants :

i) $\text{pr}_i \circ R$ est injectif. En effet, dans le cas contraire aucune feuille de $\mathcal{F}^s$ (ou de $\mathcal{F}^u$) ne serait simplement connexe ce qui contredit le fait bien

connu que les feuilles de $\mathcal{F}^s$ (ou $\mathcal{F}^u$) ne contenant pas d'orbite périodique sont des plans.

ii) $\text{pr}_i \circ R(\pi_1(V))$ est *discret* dans $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$. Un sous-groupe de $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$ est discret, dense ou résoluble. Puisque nous savons que $\pi_1(V)$ n'est pas résoluble, il s'agit de montrer que $\text{pr}_i \circ R(\pi_1(V))$ n'est pas dense. Sinon, on trouverait pour tout $\varepsilon > 0$ un élément γ de $\text{pr}_i \circ R(\pi_1(V))$ fixant un point x de $\tilde{P}_1$ avec $1 < \gamma'(x) < 1 + \varepsilon$. Mais ceci est impossible car nous savons que l'ensemble des holonomies linéaires d'un feuilletage tel que $\mathcal{F}^u$ est discret (car il n'y a qu'un nombre fini d'orbites périodiques de ϕ^t de périodes inférieures à un nombre donné).

iii) $\text{pr}_i \circ R(\pi_1(V))$ est un sous-groupe *co-compact* dans $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$. En effet, nous savons que $\tilde{V}$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^3$ de sorte que $\pi_1(V)$ est de dimension cohomologique 3. Un sous-groupe discret du groupe contractile $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$ ne peut être de dimension cohomologique 3 que s'il est co-compact.

En d'autres termes, ϕ a même structure transverse qu'un flot quasi-fuchsien (éventuellement au sens élargi donné dans la remarque 2.2.4). On conclut avec la même méthode que nous avons employée plusieurs fois : les flots sont des classifiants de leurs pseudogroupes d'holonomie et l'équivalence d'homotopie feuilletée se déforme en conjugaison de classe C^∞ .

Ceci achève la preuve du théorème C.

4.2. Démonstration du théorème D : déformation de groupes fuchsien.

Soit g une métrique riemannienne de courbure -1 sur la surface fermée S . Le feuilletage instable $\mathcal{F}_g^u$ de T_1S est transverse aux fibres de la fibration en cercles de T_1S : c'est la suspension de la représentation :

$$\rho_g : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R}).$$

Soit $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(S^1)$ une représentation C^1 -proche de ρ_g . Le feuilletage $\mathcal{F}_\rho$ obtenu par suspension de ρ est C^1 -proche de $\mathcal{F}_g^u$. En particulier, $\mathcal{F}_\rho$ est transverse à $\mathcal{F}_g^s$ et il existe un paramétrage ϕ^t de l'intersection $\mathcal{F}_g^u \cap \mathcal{F}_\rho$ qui est C^1 -proche du flot géodésique de g . Ce flot est alors un flot d'Anosov α -pincé avec $\alpha < 2$ dont les feuilletages stable et instable faibles sont nécessairement $\mathcal{F}_g^s$ et $\mathcal{F}_\rho$; il sont de classe C^∞ .

Bien sûr, la stabilité structurelle du flot géodésique de g montre que ϕ^t est topologiquement équivalent au flot géodésique de g . Par conséquent, les feuilletages stables faibles $\mathcal{F}_g^s$ et $\mathcal{F}_\rho$ sont topologiquement conjugués. En d'autres termes, ρ et ρ_g sont topologiquement conjugués : c'est la *stabilité structurelle topologique* de ρ_g .

Si l'on veut étudier $\mathcal{F}_\rho$ d'un point de vue différentiable, on peut utiliser le paragraphe 3.5 qui permet de conclure à l'existence d'une structure projective de classe C^∞ sur le cercle S^1 telle que l'image de ρ soit formée de difféomorphismes projectifs.

Il nous reste à vérifier deux faits.

LEMME 4.2.1. — *La structure projective obtenue sur S^1 est isomorphe à celle de la droite projective P_1 .*

Preuve. — Décrivons d'abord la nature du groupe des automorphismes projectifs d'une structure quelconque σ sur le cercle S^1 . Soit $\mathcal{D}$ l'application développante du revêtement universel $\tilde{S}^1$ vers $\tilde{P}_1$. Soit $\text{Aut}^+(S^1, \sigma)$ le groupe des automorphismes de σ respectant l'orientation et $\widetilde{\text{Aut}}^+(S^1, \sigma)$ le groupe des relevés des éléments de $\text{Aut}^+(S^1, \sigma)$ à $\tilde{S}^1$. On a bien sûr une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \widetilde{\text{Aut}}^+(S^1, \sigma) \rightarrow \text{Aut}^+(S^1, \sigma) \rightarrow 1$$

et un morphisme injectif :

$$H : \widetilde{\text{Aut}}^+(S^1, \sigma) \rightarrow \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$$

dont l'image est formée d'éléments préservant $\mathcal{D}(\tilde{S}^1)$. On vérifie alors la propriété suivante. Le centralisateur d'un élément non central de $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ est abélien. On en déduit l'alternative :

i) ou bien $\widetilde{\text{Aut}}^+(S^1, \sigma)$ est abélien,

ii) ou bien $H(i(1))$ est dans le centre de $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il est un élément du groupe d'automorphismes du revêtement $\tilde{P}_1 \rightarrow P_1$. Dans ce cas $\mathcal{D}(\tilde{S}^1)$ est nécessairement $\tilde{P}_1$ tout entier et (S^1, σ) est isomorphe à un revêtement fini à n feuillets de P_1 . Le groupe $\text{Aut}^+(S^1, \sigma)$ contient alors un sous-groupe central $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui opère librement sur S^1 .

Revenons à la structure projective (S^1, σ) que nous avons construite grâce à ρ . Bien sûr, $\text{Aut}^+(S^1, \sigma)$ ne peut pas être abélien, car il contient $\pi_1(S)$. On est donc dans le deuxième cas et nous affirmons alors que $n = \pm 1$, c'est-à-dire que (S^1, σ) est isomorphe à P_1 . En effet, nous savons déjà, grâce

à l'information topologique sur ρ , que pour tout $\gamma \neq 1$ de $\pi_1(S)$, l'élément $\rho(\gamma)$ a exactement deux points fixes, l'un attractif et l'autre répulsif. Si n était différent de ± 1 , les points fixes répulsifs seraient des réunions d'orbites de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on aurait donc strictement plus d'un point fixe répulsif.

Ainsi, à conjugaison de classe C^∞ près, l'image de ρ est contenue dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. La preuve du théorème D sera achevée par le lemme suivant :

LEMME 4.2.2. — *La représentation ρ est C^∞ -conjuguée à une injection de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ comme sous-groupe discret co-compact, c'est-à-dire à une représentation du type $\rho_{g'}$ où g' est une métrique à courbure -1 sur S .*

Preuve. — Nous savons que $\rho_g(\pi_1(S))$ est discret et donc que $\rho_g(\pi_1(S))$ opère librement et proprement sur l'espace des triplets de points distincts du cercle et que le quotient est compact (homéomorphe à $T_1 S$, voir [Gr]). Puisque ρ et ρ_g sont topologiquement conjuguées, cette même propriété est satisfaite par ρ . Il en résulte que $\rho(\pi_1(S))$ est aussi discret et co-compact dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (après une conjugaison de classe C^∞ bien entendu).

4.3. Quelques remarques.

Soit $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. La suspension de A donne un flot d'Anosov ϕ^t sur une variété T_A^3 , fibrée en tores au-dessus du cercle. Les feuilletages stable et instable faibles $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont bien sûr de classe C^∞ .

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de classe C^∞ de T_A^3 qui est suffisamment C^1 -proche de $\mathcal{F}^s$, l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}^u$ donne un flot d'Anosov dont $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^u$ sont les feuilletages stable et instable faibles et qui vérifie les hypothèses du théorème C. Il en résulte que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}^u$ est C^∞ -conjugué à ϕ et donc que $\mathcal{F}$ est C^∞ -conjugué à $\mathcal{F}^s$.

Nous avons ainsi retrouvé le résultat principal de [GhSe] : les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ de T_A^3 sont C^∞ -structurellement stables. L'avantage de cette démonstration est que nous n'utilisons pas ici le difficile théorème de M. Herman concernant la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.

Si par contre on utilise ce théorème d'Herman, on obtient un autre cas particulier de la conjecture mentionnée dans l'introduction, *sans hypothèse*

de conservation de volume ni de pincement. Nous ne faisons qu'en esquisser la preuve, probablement bien connue des experts.

PROPOSITION. — Soit ϕ^t un flot d'Anosov de classe C^∞ sur T_A^3 . On suppose que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe C^∞ . Alors ϕ^t est C^∞ -conjugué à la suspension (de temps de retour variable) du difféomorphisme linéaire A de T^2 . En particulier, ϕ^t préserve une forme de volume.

Preuve. — On sait que ϕ^t est la suspension d'un C^∞ -difféomorphisme Φ du tore T^2 , topologiquement conjugué à A . Les traces f^s et f^u de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur T^2 sont des feuilletages de classe C^∞ topologiquement conjugués à des feuilletages linéaires dont les directions sont les directions propres de A . Les pentes étant des nombres algébriques quadratiques, le théorème de M. Herman s'applique : f^s et f^u sont C^∞ -conjugués à des feuilletages linéaires, c'est-à-dire que f^s et f^u sont définis par des formes fermées non singulières ω^s et ω^u de classe C^∞ et uniques à constantes multiplicatives près. On a donc $\Phi^*\omega^s = \lambda_s\omega^s$ et $\Phi^*\omega^u = \lambda_u\omega^u$ et bien sûr $\lambda_s\lambda_u = 1$ car sinon la forme d'aire $\omega_s \wedge \omega_u$ sur T^2 serait dilatée ou contractée. Si l'on utilise des primitives locales de ω_s et ω_u comme coordonnées locales sur T^2 , on trouve une structure affine sur T^2 pour laquelle le difféomorphisme Φ est affine (et préserve l'aire). Il est facile de conclure.

A. Katok m'a fait remarquer qu'en utilisant les résultats de Katznelson et Ornstein à la place de ceux de Herman, on peut affaiblir l'hypothèse de la proposition et ne supposer qu'une différentiabilité de classe C^2 pour les feuilletages stable et instable faibles.

Terminons cet article par une question naturellement soulevée par le théorème D. Soit V une variété fermée de dimension 3 admettant une métrique à courbure -1 . Le groupe fondamental $\pi_1(V)$ se plonge alors dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, groupe des isométries directes de l'espace hyperbolique; il opère donc sur la sphère de Riemann $S^2 \approx \mathbb{CP}^1$. On a donc un morphisme :

$$\rho : \pi_1(V) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \subset \mathrm{Diff}_+^\infty(S^2).$$

Le théorème de Mostow affirme en particulier que $\rho : \pi_1(V) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est rigide. De même que pour les surfaces, le théorème de stabilité structurelle d'Anosov montre que si $\rho' : \pi_1(V) \rightarrow \mathrm{Diff}_+^\infty(S^2)$ est C^1 -proche de ρ , alors ρ' est topologiquement conjuguée à ρ . Peut-on affirmer que ρ' est en fait C^∞ -conjuguée à ρ ?

BIBLIOGRAPHIE

- [An] D.V. ANOSOV, Geodesic flow on compact manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. A.M.S. Translations, 1969.
- [Ar] P. ARMANDARIZ, Codimension one Anosov flows on manifolds with solvable fundamental group, Thèse Univ. Ispapalapa, Mexico.
- [Av] A. AVEZ, Anosov diffeomorphisms, in Proc. Int. Symp. on Topological dynamics, Benjamin, 1968, 17–51.
- [BeFoL] Y. BENOIST, P. FOULON, F. LABOURIE, Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables, prépublication, 1990.
- [Bo] R. BOWEN, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture Notes in Maths. Springer n° 470, 1975.
- [FeKat] R. FERES, A. KATOK, Invariant tensor fields of dynamical systems with pinched Lyapunov exponents and rigidity of geodesic flows, Erg. Th. & Dyn. Sys. 9, (1989), 427–432.
- [Fe] R. FERES, Geodesic flows on manifolds of negative curvature with smooth horospheric foliations, preprint, 1990.
- [Fri] D. FRIED, Transitive Anosov flows and Pseudo-Anosov maps, Topology, 22, n° 3 (1983), 299–303.
- [FraWi] J. FRANKS, R. WILLIAMS, Anomalous Anosov flows, Lecture Notes in Maths., Springer n° 819, 158–174.
- [GhSe] E. GHYS, V. SERGIESCU, Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages, Topology, 19 (1980), 179–197.
- [GhTs] E. GHYS, T. TSUBOI, Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1, Ann. Inst. Fourier, 38 (1) (1988), 215–244.
- [Gh1] E. GHYS, Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 4 (1984), 67–80.
- [Gh2] E. GHYS, Actions localement libres du groupe affine, Invent. Math., 82 (1985), 479–526.
- [Gh3] E. GHYS, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup., 20 (1987), 251–270.
- [Go] S. GOODMAN, Dehn surgery on Anosov flows, Geometric dynamics, Lecture Notes in Maths., Springer n° 1007, 300–307.
- [Gr] M. GROMOV, Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group, texte non publié, S.U.N.Y., vers 1977.
- [HuKat] S. HURDER, A. KATOK, Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows, Pub. I.H.E.S., 72 (1990), 5–61.
- [HanTh] M. HANDEL, W. THURSTON, Anosov flows on new 3-manifolds, Inv. Math., vol. 59 (1980), 95–103.
- [Hae] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, Astérisque, 116 (1984), 70–97.
- [Has] B. HASSELBLATT, Bootstrapping regularity of the Anosov splitting, to appear in Proc. A.M.S.
- [Kan] M. KANAI, Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, Ergodic Theory & Dynam. Sys., 8 (1988), 215–240.

- [O] J.-P. OTAL, Le spectre marqué des surfaces à courbure négative, *Annals of Maths.*, 131 (1990), 151–162.
- [PaPo] W. PARRY, M. POLLICOTT, Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, *Astérisque*, n° 187-188, S.M.F., 1990.
- [PITh] J. PLANTE, W. THURSTON, Anosov flows and the fundamental group, *Topology*, 11 (1972), 147–150.
- [Pa] W. PARRY, Synchronisation of canonical measures for hyperbolic attractors, *Commun. Math. Phys.*, 106 (1986), 267–275.
- [Pl] J. PLANTE, Anosov flows, transversely affine foliations and a conjecture of Verjovsky, *J. London Math. Soc.*, (2) 23 (1981), 359–362.
- [RVa] F. RAYMOND, T. VASQUEZ, 3-manifolds whose universal coverings are Lie groups, *Topology and its App.*, vol. 12 (1981), 161–179.
- [Sa] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudogroups, *Ann. of Math.*, 87 (1965), 79–102.
- [St] S. STERNBERG, Local C^n -transformations of the real line, *Duke Math. J.*, 24, 94–102.
- [Su] D. SULLIVAN, Discrete conformal groups and measurable dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6 (1982), 53–73.
- [Th1] W. THURSTON, Foliations on 3-manifolds which are circle bundles, Ph. D. Thesis, Berkeley, 1972.
- [Th2] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, *Princeton Lecture Notes*, 1976.
- [To] P. TOMTER, Anosov flows on infrahomogeneous spaces, *Proc. Symp. Pure Maths.*, 14 (1970), 299–328.
- [Ve] A. VERJOVSKY, Codimension one Anosov flows, *Bol. Soc. Matem. Mex.*, 19 (1974).
- [Wo] J. WOLF, Spaces of constant curvature, *Publish or Perish*.

Etienne GHYS,
 Ecole Normale Supérieure de Lyon
 Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
 U.M.R. 128 CNRS
 46, Allée d'Italie
 F-69364 Lyon Cedex 07.