J. reine angew. Math. 468 (1995), 113—138

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{C})$

Par *Étienne Ghys* à Lyon

---

1. Introduction

L'un des premiers *théorèmes de rigidité* remonte à E. Calabi et E. Vesentini. Un cas particulier s'énonce de la manière suivante [2]. Soit X la boule unité de $\mathbb{C}^n$ et Γ un groupe discret de biholomorphismes de X opérant sans points fixes et tel que le quotient $M = X/\Gamma$ soit une variété compacte. Alors, si $n \neq 1$, la variété complexe M est *rigide*: toute structure complexe proche de la structure naturelle est isomorphe à celle-ci. Le cas où $n = 1$ est bien entendu une exception car les surfaces de Riemann compactes de type hyperbolique (i.e. revêtues par le disque de Poincaré) ont un «espace de modules» non trivial et il est inutile d'insister ici sur l'intérêt de cet *espace de Teichmüller*.

Quelques années plus tard, M.S. Raghunathan obtenait un résultat analogue dans un contexte non kählérien [35]. Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe sans facteur localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{C})$ (par exemple $SL(n, \mathbb{C})$ pour $n \geqq 3$) et Γ un sous-groupe discret co-compact de G. Alors la variété complexe $M = G/\Gamma$ est rigide.

Parallèlement à ces travaux sur les structures complexes, A. Selberg et A. Weil étudièrent les déformations des réseaux des groupes de Lie. Rappelons le résultat principal de A. Weil [41]. Soit G un groupe de Lie semi-simple réel sans facteur compact ou localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$ et soit Γ un sous-groupe discret co-compact de G. Alors le plongement i de Γ dans G est rigide dans le sens où tout morphisme de Γ dans G proche de i (sur une partie génératrice finie de Γ) est conjugué à i. Ici encore, le cas exceptionnel de $SL(2, \mathbb{R})$ correspond aux déformations non triviales des groupes fuchsiens co-compacts, i.e. aux déformations des surfaces de Riemann de type hyperbolique. Ces résultats locaux ont par la suite été globalisés, en particulier par G.D. Mostow et G.A. Margulis. On pourra consulter [22] et [33] pour un survol de cette théorie.

Dans ce travail, nous étudions le cas laissé en suspens par M.S. Raghunathan. Soit Γ un sous-groupe discret co-compact de $SL(2, \mathbb{C})$ et $M = SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$. Nous savons d'après Weil-Mostow que le plongement de Γ dans G est rigide mais la variété complexe M est-elle rigide? Nous montrons qu'il n'en est rien en général et nous décrivons toutes les déformations de M en explicitant son *espace de Kuranishi*.

Signalons le résultat analogue de I. Nakamura qui détermine l'espace de Kuranishi des variétés complexes du type G/Γ où G est un groupe de Lie complexe *résoluble* de dimension 3 et Γ est un sous-groupe discret co-compact [32]. Ce dernier cas est cependant plus élémentaire puisqu'il est possible de donner la liste complète de tous les sous-groupes Γ qui interviennent.

Outre le fait que les variétés $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$ présentent ce phénomène de rigidité du sous-groupe discret et de flexibilité de la structure complexe, il convient de remarquer que ces espaces homogènes ont un intérêt géométrique particulier. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe des isométries directes de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3$ de dimension 3 et agit librement transitivement sur les repères orthonormés directs de $\mathbb{H}^3$. Par conséquent, si V est une variété hyperbolique compacte de dimension 3, son fibré des repères orthonormés directs, de dimension 6, est naturellement identifié à une variété complexe de dimension 3 de la forme $M = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$. Ainsi l'étude des déformations des variétés complexes M est intimement liée à la géométrie réelle de la variété V. On sait aujourd'hui que les variétés hyperboliques de dimension 3 sont très abondantes (voir par exemple [40]) et ceci nous permettra d'obtenir de nombreux exemples.

Cet article trouve son origine dans [9] lequel l'étude de systèmes dynamiques holomorphes de type Anosov nous avait conduit à considérer certaines déformations particulières de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$, non triviales dès que le premier nombre de Betti de Γ est non nul. Il était dès lors naturel de chercher à déterminer complètement l'espace de Kuranishi de ces variétés complexes.

Après l'acceptation de cet article, nous avons appris l'existence d'un travail récent de C. S. Rajan [36] qui montre que les variétés qui nous intéressent ici ne sont pas rigides dès que le premier nombre de Betti de Γ est non nul. C'est un cas particulier de nos résultats qui est d'ailleurs précisément celui que nous avions considéré indépendamment dans [9]. Nous remercions J. Millson pour nous avoir signalé cette référence.

2. Énoncé des résultats

Nous désignons toujours par Γ un sous-groupe discret co-compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et nous notons M la variété complexe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$, de dimension complexe 3. Soit:

$$u : \Gamma \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

un morphisme quelconque. On peut alors définir une action à droite de Γ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ par biholomorphismes:

$$(x,\gamma) \in SL(2,\mathbb{C}) \times \Gamma \mapsto u(\gamma^{-1})x\gamma \in SL(2,\mathbb{C}).$$

Si cette action de Γ est libre et totalement discontinue, nous dirons que u est *admissible* et nous noterons $M(u,\Gamma)$ l'espace quotient qui est alors une variété complexe de dimension 3. Bien sûr, le morphisme trivial est admissible et la variété associée n'est autre que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$.

Remarquons que si deux morphismes u_1 et u_2 sont conjugués par un élément de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, ils sont simultanément admissibles ou non admissibles. Remarquons aussi que Γ est le groupe fondamental de M et qu'il est donc de type fini. Nous dirons que u est proche du morphisme trivial si l'image d'une partie génératrice finie fixée est formée de matrices proches de l'identité. Le lemme suivant sera démontré au paragraphe 3.

Lemme 2.1. *Si u est un morphisme suffisamment proche du morphisme trivial, alors il est admissible et la variété $M(u,\Gamma)$ est compacte et C^∞ difféomorphe à M.*

Soit $\mathscr{R}_\Gamma = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ l'espace des morphismes de Γ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Il s'agit d'un ensemble algébrique sur lequel nous reviendrons avec plus de détails plus tard. Le lemme 2.1 montre qu'il existe une déformations de la structure complexe de M paramétrée par le germe de $\mathscr{R}_\Gamma$ au voisinage du morphisme trivial u_0.

Nous pouvons maintenant énoncer nos résultats principaux.

Théorème A. *Toute structure complexe sur M, suffisamment proche de la structure initiale, est biholomorphiquement équivalente à $M(u,\Gamma)$ pour un certain morphisme u proche du morphisme trivial. Plus précisément, l'espace de Kuranishi de M est le germe de l'espace $\mathscr{R}_\Gamma$ au voisinage du morphisme trivial.*

Le second théorème affirme que les variétés qui nous intéressent ici ne sont biholomorphes que dans les cas «évidents».

Théorème B. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets co-compacts de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *et soient $u_1 : \Gamma_1 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et $u_2 : \Gamma_2 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ deux morphismes admissibles. Alors les variétés complexes $M(u_1,\Gamma_1)$ et $M(u_2,\Gamma_2)$ sont biholomorphes si et seulement si il existe une conjugaison interne θ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et un morphisme $\varepsilon : \Gamma_1 \to \{\pm \mathrm{Id}\}$ tels que $\Gamma_2 = (\varepsilon.\theta)(\Gamma_1)$ et $u_1(\gamma) = u_2(\varepsilon(\gamma).\theta(\gamma))$ pour tout γ de Γ_1.*

Ces théorèmes n'auraient aucun intérêt s'il n'existait pas de morphisme non trivial u proche du morphisme trivial, c'est-à-dire si le germe de $\mathscr{R}_\Gamma$ au voisinage de u_0 ne contenait qu'un point! C'est d'ailleurs ce qui se passe si on considère le cas des réseaux de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ pour $n \geqq 3$ .... Notons $b_1(\Gamma)$ le premier nombre de Betti de Γ, c'est-à-dire le rang de son abélianisé (modulo torsion). Il se trouve qu'il existe des exemples de variétés hyperboliques réelles de dimension 3 dont le premier nombre de Betti est un entier arbitraire (voir [25] ou 6.2), contrairement au cas des réseaux dans les groupes de Lie de rangs supérieurs [23], [34] .... Si $b_1(\Gamma) > 0$, il existe des morphismes non triviaux $\Gamma \to \mathbb{C}$ et on peut donc construire des morphismes non triviaux $\Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ arbitrairement proches du morphisme trivial dont l'image est contenue dans un groupe à un paramètre.

Théorème C. *Si $b_1(\Gamma) = 0$, tout morphisme de Γ dans* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, *proche du morphisme trivial, est lui-même trivial.*

Si $b_1(\Gamma) = 1$, tout morphisme de Γ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, *proche du morphisme trivial, est à image abélienne.*

Pour tout entier $k \geqq 2$, il existe des exemples de sous-groupes discrets co-compacts Γ tels que $b_1(\Gamma) = k$ et pour lesquels il existe des morphismes de Γ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *à images non abéliennes, arbitrairement proches du morphisme trivial.*

Le paragraphe 3 décrit quelques propriétés générales de la géométrie de $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$. Les trois paragraphes 4, 5, 6 démontrent successivement les théorèmes A, B et C; chacun d'entre eux peut (presque) être lu de manière indépendante.

3. La géométrie de $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$

L'algèbre de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$ sera considérée comme l'algèbre des champs de vecteurs invariants par translations à droite sur $SL(2,\mathbb{C})$; elle est isomorphe à l'algèbre $sl(2,\mathbb{C})$ des matrices de trace nulle. La variété $M = SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$ est holomorphiquement parallélisable; son fibré tangent est isomorphe à $M \times sl(2,\mathbb{C})$.

Nous conviendrons d'appeler *métrique holomorphe* sur une variété complexe un champ holomorphe de formes quadratiques (complexes) dans le fibré tangent.

Lorsqu'une métrique holomorphe est partout non dégénérée, on peut la considérer comme l'analogue complexe d'une métrique riemannienne, c'est-à-dire qu'il est possible de définir une connexion de Levi-Civita complexe, un tenseur de courbure, des géodésiques etc. Bien entendu, les géodésiques sont des courbes *holomorphes* dont le vecteur tangent est parallèle. Une métrique holomorphe est *complète* si ses géodésiques locales se prolongent en des géodésiques globales définies sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Il est clair qu'une variété complexe ne possède en général pas de métrique holomorphe non triviale mais, dans le cas qui nous intéresse, toute forme quadratique sur $sl(2,\mathbb{C})$ définit naturellement une métrique holomorphe sur $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$.

Parmi les formes quadratiques sur $sl(2,\mathbb{C})$, il convient de privilégier la *métrique de Killing* définie par:

$$K(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x).\operatorname{ad}(y)) = 4\operatorname{tr}(xy)\,.$$

Cette forme est non dégénérée et invariante par la représentation adjointe, c'est-à-dire qu'elle définit une métrique holomorphe sur $SL(2,\mathbb{C})$ invariante par les translations à droite et à gauche. Si u est un morphisme admissible, la forme de Killing permet donc de définir une métrique holomorphe sur $M(u,\Gamma)$.

La connexion de Levi-Civita ∇ de cette métrique est calculée dans [28]: si x et y sont deux éléments de $sl(2,\mathbb{C})$, on a:

$$\nabla_x y = \frac{1}{2}[x,y]\,.$$

Le tenseur de courbure est donné par:

$$R(x,y,z,t) = \frac{1}{4}K([x,y],[z,t])\,.$$

Si x et y sont orthogonaux et de norme 1 (par rapport à K), on obtient, après un calcul élémentaire:

$$R(x,y,x,y) = -\frac{1}{8}\,.$$

Ainsi, la *courbure sectionnelle de K est constante* (égale à $-1/8$ mais la valeur précise de cette constante n'a bien sûr pas d'intérêt car elle est liée au choix qui a été fait dans la définition de K). *Les variétés complexes $M(u, \Gamma)$ qui nous intéressent dans cet article sont donc des variétés possédant une métrique holomorphe à courbure constante.*

Réciproquement, toute métrique holomorphe complète, de courbure constante non nulle, sur une variété complexe simplement connexe de dimension 3 est isométrique à un multiple de la métrique de Killing sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Nous ne démontrerons pas ce fait car il n'est que la complexification du théorème analogue qui décrit la métrique de Killing sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et dont on trouvera la preuve dans [20], [28], [42].

On peut aussi observer que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est la «sphère unité» dans $\mathbb{C}^4$ d'équation $ad - bc = 1$ et la métrique de Killing n'est autre que la restriction de la «métrique holomorphe plate» sur $\mathbb{C}^4$.

Voici encore quelques faits concernant cette métrique de Killing qui nous seront utiles par la suite.

• *Les géodésiques de la métrique de Killing émanant de l'élément neutre* Id *sont les groupes à un paramètre de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (voir par exemple [27] pour le cas réel).

• *Les isométries de la métrique de Killing de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *sont les translations gauche/droite suivies éventuellement de l'isométrie* $g \mapsto g^{-1}$.

Considérons en effet une isométrie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. On peut la composer par une translation à droite pour qu'elle fixe Id et sa différentielle en ce point est alors une isométrie de la forme K. Observons que l'image de la représentation adjointe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est d'indice 2 dans le groupe d'isométries de la forme de Killing. En composant l'isométrie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ considérée par une conjugaison interne, puis éventuellement par l'isométrie $g \mapsto g^{-1}$, on peut donc supposer que la différentielle en Id est l'identité. Cette isométrie est alors l'identité sur chaque sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, c'est-à-dire partout.

Il importe de rappeler ici que la dimension 3 est très particulière. Pour chaque entier n, il existe une variété complexe simplement connexe, munie d'une métrique holomorphe complète à courbure constante non nulle. Cette variété est unique à isométrie près et son groupe d'isométries est isomorphe à $\mathrm{O}(n+1, \mathbb{C})$. Comme il est bien connu, ce groupe est simple sauf pour $n = 3$ auquel cas il est localement isomorphe à $\mathrm{O}(3, \mathbb{C}) \times \mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ ou encore à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Autrement dit, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est la complexification de la sphère de dimension 3 et les translations gauche/droite correspondent aux parallélismes de Clifford usuels de cette sphère. C'est cette particularité de la dimension 3 qui nous permet de construire ces déformations $M(u, \Gamma)$.

Toute variété complexe W de dimension 3 munie d'une métrique holomorphe à courbure constante non nulle est *localement* isométrique à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ muni d'un multiple de la métrique de Killing; on peut donc trouver un atlas de W formé de cartes à valeurs dans $X = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et tel que les changements de cartes soient dans le groupe G des isométries de X. Nous sommes donc en présence d'une (G, X)-*structure*, dont la théorie est décrite par exemple dans [39] et qui s'applique au cas plus général d'un groupe quelconque G agissant analytiquement et fidèlement sur une variété quelconque X. Dans une telle situation, il existe une application (dite de *développement*) D du revêtement universel $\tilde{W}$ de W vers X qui est un difféomorphisme local et un morphisme (dit d'*holonomie*) du groupe fondamental Γ de W dans G tel que, pour tout γ de Γ et tout x de $\tilde{W}$:

$$D(\gamma(x)) = H(\gamma).D(x).$$

L'application D peut être composée avec l'action d'un élément de G et l'holonomie H n'est définie qu'à conjugaison près. Dans le cas particulier où D est un difféomorphisme, on dit que la structure est *complète* et on la retrouve en faisant le quotient de X par $H(\Gamma)$ qui agit alors de manière libre et totalement discontinue. Pour le type de structure qui nous intéresse ici, la complétude est équivalente à celle de la métrique holomorphe considérée.

Un principe général qui remonte à Ehresmann (voir aussi [41]) et qui est énoncé en toute généralité dans [39] est le suivant:

Proposition 3.1. *Soit W une variété compacte équipée d'une (G, X)-structure et $H_0: \Gamma \to G$ son holonomie. Si H est un morphisme suffisamment proche de H_0 alors il existe une structure proche de la structure initiale dont l'holonomie est H. Deux (G, X)-structures proches de la structure initiale sont isomorphes par un difféomorphisme proche de l'identité si et seulement si leurs holonomies sont conjuguées par un petit élément de G.*

Appliquons cette proposition au cas de la métrique de Killing de $M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\Gamma$. Cette variété est équipée d'une (G, X)-structure où $X = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ agit par translations gauche/droite sur X (en fait, il faudrait remplacer G par son quotient par $(\pm \mathrm{Id}, \pm \mathrm{Id})$ qui agit trivialement). L'holonomie H_0 de cette structure (complète) a la particularité qu'elle n'agit que par translations à droite:

$$H_0(\gamma) = (\mathrm{Id}, \gamma).$$

La proposition 3.1 montre donc que les (G, X)-structures proches sont (à isomorphisme proche de l'identité près) en bijection avec les classes de conjugaison de morphismes de Γ dans $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, proches de H_0. Le théorème de Weil-Mostow montre que la seconde composante de H_0 est rigide. Il résulte donc de ces considérations générales que si u est un morphisme de Γ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ proche du morphisme trivial, il existe une structure $M(u, \Gamma)$, bien définie à isomorphisme près, dont l'holonomie est donnée par:

$$H(\gamma) = (u(\gamma), \gamma).$$

Cette remarque, dans le contexte réel, se trouve dans [8], [10]. Bien entendu, la structure $M(u, \Gamma)$ que nous venons de définir n'est pas a priori complète. Cependant, nous savons que $M(u, \Gamma)$ est une variété complexe munie d'une métrique holomorphe à courbure constante.

Une métrique riemannienne sur une variété compacte est nécessairement complète mais il n'en est pas nécessairement de même pour une métrique holomorphe. Cette difficulté est due à la non compacité du groupe orthogonal complexe; elle est analogue au cas des métriques lorentziennes. Dans cette direction, il faut cependant citer les résultats de [4], [18], [24] selon lesquels une métrique lorentzienne à courbure constante sur une variété compacte est nécessairement complète. Nous ignorons si ce résultat est valable dans le contexte des métriques holomorphes à courbure constante. Le lemme 2.1 peut cependant être considéré comme un résultat local allant dans ce sens; on peut le paraphraser en disant que *la* structure associée au morphisme u suffisamment proche du morphisme trivial est complète.

Nous démontrons maintenant le lemme 2.1.

Équipons $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ d'une métrique *riemannienne* m invariante à droite quelconque. Il est bien connu que la distance d associée à m vérifie:

$$A^{-1} d(\mathrm{x}, \mathrm{Id}) \leqq \ln(1 + \|\mathrm{x} - \mathrm{Id}\|) \leqq A\, d(\mathrm{x}, \mathrm{Id})$$

pour une certaine constante $A \geqq 1$ et pour tout x de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Choisissons d'autre part une partie génératrice finie de Γ et soit l la *métrique des mots* correspondante sur Γ. Puisque Γ est co-compact dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, on a, pour tout γ de Γ:

$$B^{-1} l(\gamma) - C \leqq d(\gamma, \mathrm{Id}) \leqq B\, l(\gamma) + C$$

pour certaines constantes $B \geqq 1$ et $C \geqq 0$. Soit u un morphisme de Γ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tel que tous les éléments de la partie génératrice choisie ainsi que leurs inverses ont une image par u de norme inférieure à $\exp(\eta)$. Nous allons montrer que si η est assez petit, l'action correspondante de Γ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est libre et totalement discontinue. Évidemment, pour tout γ de Γ, on a:

$$\|u(\gamma)\| \leqq \exp(\eta\, l(\gamma))\,.$$

Soit K un compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et considérons l'ensemble des γ tels que l'image de K par γ rencontre K. Il s'agit de montrer que cet ensemble et fini. Écrivons:

$$u(\gamma)^{-1} \mathrm{x} \gamma = \mathrm{y}$$

avec x et y dans K. On a donc:

$$\|\gamma\| \leqq D \|u(\gamma)\|$$

où D est une constante qui ne dépend que du compact K. En comparant ces inégalités, on trouve:

$$A^{-1} d(\gamma, \mathrm{Id}) \leqq \ln(1 + \|\gamma - \mathrm{Id}\|) \leqq \ln\bigl(2 + D \exp(\eta\, l(\gamma))\bigr)\,,$$

$$A^{-1}\bigl(B^{-1} l(\gamma) - C\bigr) \leqq \ln\bigl(2 + D \exp(\eta\, l(\gamma))\bigr)\,. \tag{1}$$

Si $\eta < A^{-1} B^{-1}$ cette inégalité donne une borne supérieure pour $l(\gamma)$ (qui dépend de D, c'est-à-dire du compact K). Puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de γ tels que $l(\gamma)$ soit inférieur à une constante donnée, nous avons bien montré que si η est assez petit l'action correspondante de Γ est totalement discontinue.

Il faut encore montrer que si η est assez petit, l'action de Γ n'a pas de point fixe, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de γ non trivial tel que:

$$u(\gamma) = \mathrm{x} \gamma \mathrm{x}^{-1}$$

pour un certain x de $SL(2, \mathbb{C})$. Fixant un domaine fondamental compact K pour l'action de Γ sur $SL(2, \mathbb{C})$ par translations à droite, on peut mettre x sous la forme $x_0 \gamma_0$ avec x_0 dans K et γ_0 dans Γ. Autrement dit, quitte à conjuguer γ on peut toujours se ramener au cas où x est dans K. On peut alors choisir η suffisamment petit pour que l'inégalité 1 (pour ce choix particulier de K) implique que l'entier $l(\gamma)$ est nul, c'est-à-dire que γ est trivial.

Il reste à vérifier que la variété quotient est C^∞ difféomorphe à $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$. Soit u_t une courbe paramétrée par $t \in [0,1]$ dans l'espace des morphismes de Γ vers $SL(2,\mathbb{C})$ qui relie le morphisme trivial u_0 et $u = u_1$ (rappelons qu'un ensemble algébrique est localement connexe par arcs différentiables). En utilisant cette famille de morphismes, on construit une action à droite de Γ sur $SL(2,\mathbb{C}) \times [0,1]$. Cette action est libre et totalement discontinue si tous les u_t envoient les générateurs de Γ (et leurs inverses) sur les matrices de norme inférieure à $\exp(\eta)$ et si η est suffisamment petit. Le quotient est une variété W munie d'une submersion sur l'intervalle $[0,1]$ dont la fibre au dessus de 0 est la variété compacte $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$. Il résulte du théorème de Ehresmann sur les submersions que cette dernière est une fibration localement triviale au voisinage de 0 et que toutes les fibres voisines de celle de 0 sont compactes et difféomorphes. Ceci établit le lemme 2.1.

Bien que cela ne soit pas logiquement nécessaire pour la suite, nous rappelons que $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$ n'est *pas* une variété kählérienne. Une façon de s'en convaincre est de constater qu'il existe des 1-formes invariantes à droite sur $SL(2,\mathbb{C})$ qui ne sont pas fermées, de sorte que la variété compacte M possède des 1-formes holomorphes non fermées; ceci est impossible sur une variété kählérienne. On peut aussi faire appel au résultat de [3] qui entraîne que les sous-groupes discrets co-compacts de $SL(2,\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes au groupe fondamental d'une variété kählérienne. Enfin, on peut observer que la variété M n'est même pas symplectique. Toute variété fermée orientable de dimension 3 est parallélisable. Par conséquent, si Γ est sans torsion, la variété $M = SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$ est difféomorphe à $V \times SU(2)$ où V est le quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ par Γ. Il en résulte que le cube de toute classe de $H^2(M; \mathbb{R})$ est nul et ceci est bien sûr contradictoire avec l'existence d'une structure symplectique sur M. Lorsque Γ contient des éléments d'ordre fini, on considère un sous-groupe d'indice fini sans torsion et le même argument fonctionne dans un revêtement fini.

4. L'espace de Kuranishi de $SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$

Cohomologie de $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$. Notre premier but sera de calculer divers groupes de cohomologie qui nous seront utiles dans la détermination de l'espace de Kuranishi. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $M = SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$.

Théorème 4.1. *Le plongement du faisceau $\mathbb{C}$ des fonctions localement constantes dans $\mathcal{O}$ induit un isomorphisme entre $H^1(M;\mathbb{C})$ et $H^1(M;\mathcal{O})$.*

Nous commençons par un lemme élémentaire. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions holomorphes globalement définies sur $SL(2, \mathbb{C})$. L'action de Γ sur $SL(2, \mathbb{C})$ par translations à droite fait de $\mathcal{H}$ un Γ-module.

Lemme 4.2. *$H^1(M;\mathcal{O})$ et $H^1(\Gamma;\mathcal{H})$ sont canoniquement isomorphes.*

Rappelons d'abord le résultat suivant, extrait de [30], pages 22–23.

Soit Y le quotient d'un espace X par l'action d'un groupe Γ agissant librement et proprement sur X. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur Y et $\hat{\mathscr{F}}$ son image réciproque dans X. On a alors des morphismes canoniques, pour $p \geqq 0$:

$$H^p(\Gamma; H^0(X; \hat{\mathscr{F}})) \to H^p(Y; \mathscr{F})$$

qui sont des isomorphismes si les groupes de cohomologie $H^p(X; \hat{\mathscr{F}})$ sont nuls pour $p > 0$.

On considère le cas où $X = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et $Y = M$ et où $\mathscr{F}$ est le faisceau $\mathcal{O}$.

Remarquons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est une variéte de Stein puisqu'elle est isomorphe à la variété algébrique affine d'équation $ad - bc = 1$ dans $\mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$. Le théorème de Cartan montre donc que $H^p(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}); \hat{\mathcal{O}}) = 0$ pour $p > 0$ (voir par exemple [12]).

Le lemme résulte donc du fait que $H^0(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}); \hat{\mathcal{O}})$ coïncide bien sûr avec $\mathscr{H}$.

On remarquera aussi que le groupe $H^1(M; \mathbb{C})$ est isomorphe au groupe $H^1(\Gamma; \mathbb{C})$; c'est un cas particulier (extrêmement élémentaire) du théorème de de Rham.

Puisque $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est une variété de Stein, toute fonction holomorphe sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ se prolonge à $\mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$. L'anneau $\mathscr{H}$ s'identifie donc au quotient de l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^4$ (de coordonnées a, b, c, d) par l'idéal engendré par le polynôme $ad - bc - 1$. Remarquons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ opère linéairement sur $\mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$ par multiplication à droite, en préservant bien sûr la sous-variété $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Pour $k \geqq 0$, soit $\mathscr{H}_k$ le sous-espace de $\mathscr{H}$ formé des fonctions holomorphes qui sont la restriction d'un polynôme de $\mathbb{C}^4$ de degré inférieur ou égal à k. La suite $\mathscr{H}_k$ est bien sûr croissante, invariante par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, et sa réunion est dense dans $\mathscr{H}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Par le théorème de réductibilité complète de H. Weyl, on peut trouver pour chaque $k \geqq 1$ un supplémentaire $\mathscr{P}_k$ de $\mathscr{H}_{k-1}$ dans $\mathscr{H}_k$, invariant par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On pose $\mathscr{P}_0 = \mathscr{H}_0$. Ainsi la somme directe des $\mathscr{P}_k$ est dense dans $\mathscr{H}$.

Il n'est probablement pas difficile d'établir que tout élément f de $\mathscr{H}$ s'écrit de manière unique comme une série convergente $\sum_{k \geqq 0} f_k$ où f_k est dans $\mathscr{P}_k$ mais nous n'utiliserons pas ceci. Nous nous contenterons d'observer que $\mathrm{SU}(2)$ est la sphère de dimension 3 et l'analyse harmonique classique des fonctions sur une sphère montre que si f est un élément de $\mathscr{H}$, il existe une unique suite f_k ($k \geqq 0$) avec f_k dans $\mathscr{P}_k$ telle que, en restriction à $\mathrm{SU}(2)$, la fonction f est la somme $\sum_{k \geqq 0} f_k$. Les projections ainsi obtenues de $\mathscr{H}$ sur les espaces $\mathscr{P}_k$ sont données par les formules intégrales habituelles; elles sont $\mathrm{SU}(2)$-équivariantes et donc $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-équivariantes (par le «truc de Weyl»).

On observera par ailleurs que les seuls éléments de $\mathscr{H}$ invariants par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sont les fonctions constantes de sorte qu'aucun des espaces $\mathscr{P}_k$ avec $k \geqq 1$ ne contient de vecteur (non nul) fixe par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Lemme 4.3. *Pour tout $k \geqq 1$, le premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma; \mathscr{P}_k)$ est nul.*

C'est un cas particulier d'un théorème de M.S. Raghunathan dont voici l'énoncé [34].

Soit G un groupe de Lie simple non compact et

$$\varrho : G \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$$

une représentation linéaire de G sans vecteur fixe commun (non nul). Soit Γ un sous-groupe discret co-compact de G. Alors le premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma; \mathbb{R}^N)$ du Γ-module $\mathbb{R}^N$ défini par ϱ est nul sauf peut-être si G est localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n,1)$ ou $\mathrm{SU}(n,1)$ et si le plus haut poids de ϱ est un multiple de celui de la représentation canonique de G.

Dans le cas qui nous intéresse, G est $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et il est donc localement isomorphe à $\mathrm{SO}(3,1)$. Si l'on considère une représentation:

$$\varrho : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$$

comme une représentation réelle à valeurs dans $\mathrm{GL}(2N, \mathbb{R})$, le plus haut poids de celle-ci est de la forme $l(e_1 + e_2)$ (avec $l \geqq 1$) où e_1 et e_2 désignent la base standard du dual de la sous-algèbre de Cartan standard de la complexification de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ [7]. Quant au plus haut poids de la représentation canonique, il est égal à e_1. Le lemme résulte donc du théorème de M.S. Raghunathan (voir aussi [16]).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4.1. On remarque d'abord que $\mathscr{P}_0$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et que le plongement de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{H}$ scinde d'une manière $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-équivariante. Il en résulte que l'application:

$$H^1(\Gamma; \mathbb{C}) \to H^1(\Gamma; \mathscr{H})$$

est injective. Pour la surjectivité, on remarque d'abord que la cohomologie de M à coefficients dans $\mathcal{O}$ est de dimension finie. Les cocycles de Γ à valeurs dans $\mathscr{H}$ sont des morphismes croisés du groupe de type fini Γ dans $\mathscr{H}$; ils sont donc munis d'une topologie naturelle. La dimension finie de la cohomologie entraîne que si une suite de cocycles cohomologues tend vers 0, la classe qu'ils représentent est nulle. Considérons donc un cocycle c quelconque et soit c_k sa projection sur $\mathscr{P}_k$; c'est un morphisme croisé à valeurs dans $\mathscr{P}_k$ et la suite

$$c - \sum_{i=0}^{k} c_i$$

tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini. D'après le lemme 4.3, chacun des c_i est un cobord si $i \geqq 1$ et il résulte donc de l'observation précédente que c est cohomologue à c_0 qui est un morphisme croisé à valeurs dans $\mathscr{P}_0$, c'est-à-dire un morphisme usuel de Γ dans $\mathbb{C}$. Nous avons bien établi que $H^1(\Gamma; \mathscr{H})$ et $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$ sont canoniquement isomorphes ou, de manière équivalente, que $H^1(M; \mathcal{O})$ et $H^1(M; \mathbb{C})$ sont canoniquement isomorphes. Ceci établit le théorème 4.1.

Corollaire 4.4. *Le plongement du faisceau $\mathbb{C}$ des fonctions localement constantes dans $\mathcal{O}$ induit un isomorphisme entre $H^2(M; \mathbb{C})$ et $H^2(M; \mathcal{O})$.*

La variété M est holomorphiquement parallélisable; son fibré tangent est canoniquement isomorphe à $M \times \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Le faisceau des germes de 3-formes holomorphes sur M est donc isomorphe à $\mathcal{O}$. La dualité de Serre montre alors que $H^1(M;\mathcal{O})$ et $H^2(M;\mathcal{O})$ sont en dualité.

Nous avons déjà observé que Γ opère par isométries sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ de dimension réelle 3. Si Γ est sans torsion, le quotient V est une variété compacte orientable de dimension 3. Si Γ possède de éléments de torsion, le quotient est cependant une variété homologique rationnelle et les groupes $H^p(V;\mathbb{C})$ et $H^p(\Gamma;\mathbb{C})$ sont isomorphes (voir par exemple [13]). D'autre part, M est l'espace total d'un SU(2)-fibré principal au dessus de V de sorte que $H^p(V;\mathbb{C})$ et $H^p(M;\mathbb{C})$ sont isomorphes pour $p = 1, 2$. La dualité de Poincaré appliquée à V montre alors que $H^1(M;\mathbb{C})$ et $H^2(M;\mathbb{C})$ sont en dualité.

L'isomorphisme donné par le théorème 4.1 entraîne donc l'isomorphisme annoncé entre $H^2(M;\mathbb{C})$ et $H^2(M;\mathcal{O})$, bien sûr induit par l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{O}$.

Convenons de dire qu'un germe de champ de vecteurs sur M est constant s'il est à coefficients constants par rapport au parallélisme holomorphe de M.

Corollaire 4.5. *Soit Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$. Alors le plongement du faisceau des germes de champs constants dans Θ induit un isomorphisme entre $H^1(M;\mathbb{C}) \otimes \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ et $H^1(M;\Theta)$.*

En effet, le faisceau Θ est isomorphe à $\mathcal{O} \otimes \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Détermination de l'espace de Kuranishi. Nous commençons par quelques rappels généraux concernant l'espace de Kuranishi. On pourra consulter [5] et [6] pour plus d'informations.

Si M est une variété complexe compacte et S est un espace $\mathbb{C}$-analytique pointé en s, une *déformation* de M paramétrée par (S, s) est un couple (π, i) où:

- π est un morphisme lisse et propre d'un espace analytique E à valeurs dans S.
- i est un isomorphisme entre l'image inverse $\pi^{-1}(s)$ et M.

Le théorème de Kuranishi garantit l'existence, pour toute variété complexe compacte M, d'une déformation (π_M, i_M) paramétrée par un espace analytique S_M pointé en s_M et possédant la propriété «verselle» suivante [21]:

Pour toute déformation (π, i), paramétrée par (S, s), il existe un voisinage S' de s dans S, un morphisme $\mathbb{C}$-analytique ϕ de (S', s) dans (S_M, s_M) et un isomorphisme Φ de $\pi^{-1}(S')$ vers $\pi_M^{-1}(f(S'))$ tel que $\pi_M \circ \Phi = \phi \circ \pi$ et $i = i_M \circ \Phi$.

De plus, toute structure complexe sur M suffisamment proche de la structure initiale est isomorphe à l'une des fibres $\pi^{-1}(x)$ avec x voisin de s_M.

Le germe d'espace analytique pointé (S_M, s_M) est appelé *l'espace de Kuranishi* de M; son espace tangent de Zariski en s_M s'identifie naturellement au premier groupe de cohomologie $H^1(M;\Theta)$ de M à valeurs dans le faisceau Θ des germes de champs de vecteurs holomorphes de M.

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas où $M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\Gamma$ et nous déterminons l'espace de Kuranishi correspondant, que nous noterons $\mathscr{K}_\Gamma$.

Nous avons décrit explicitement au paragraphe 2 une déformation de M paramétrée par la variété algébrique $\mathscr{R}_\Gamma$ pointée au morphisme trivial u_0. D'après la propriété verselle, à cette déformation correspond un germe de morphisme $\mathbb{C}$-analytique:

$$\phi : \mathscr{R}_\Gamma \to \mathscr{K}_\Gamma$$

qui envoie u_0 sur le point base de $\mathscr{K}_\Gamma$.

Le théorème suivant est une reformulation du théorème A.

Théorème 4.6. *L'application ϕ est un isomorphisme local au voisinage de u_0.*

Commençons par établir que *l'application ϕ est injective au voisinage de u_0.*

Il est bien connu que l'espace tangent de Zariski à un espace de représentations tel que $\mathscr{R}_\Gamma$ en un point u est le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma; \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))$ où l'on considère $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ comme un Γ-module via la représentation adjointe de $u(\Gamma)$ (voir par exemple [11]). En particulier, si u est le morphisme trivial u_0, l'espace tangent de Zariski à $\mathscr{R}_\Gamma$ en u_0 est ce groupe de cohomologie pour la représentation triviale, c'est-à-dire $H^1(\Gamma; \mathbb{C}) \otimes \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ou, de manière équivalente, le premier groupe de cohomologie de M à valeurs dans le faisceau des germes de champs de vecteurs constants.

L'espace tangent de Zariski à $\mathscr{K}_\Gamma$ en son point base est isomorphe à $H^1(M; \Theta)$. La différentielle de ϕ est induite par le plongement du faisceau des germes de champs constants dans le faisceau Θ des champs holomorphes. Nous avons vu en 4.5 que ce plongement induit un isomorphisme en cohomologie et cette différentielle est donc un isomorphisme entre les espaces tangents de Zariski. Il en résulte bien que ϕ est localement injective.

Nous montrons maintenant que *l'application ϕ est surjective au voisinage de u_0.*

Nous allons d'abord introduire quelques notations, inspirées de [6]. Nous définissons un faisceau A de groupes non abéliens sur M. Soit U un ouvert de M. On considère les biholomorphismes $w : W \to W'$ où W et W' sont des ouverts de $M \times \mathbb{C}$ contenant $U \times \{0\}$ tels que w est l'identité sur $U \times \{0\}$ et préserve chaque fibre $U \times \{z\}$. On obtient $A(U)$ en identifiant deux tels biholomorphismes s'ils coïncident au voisinage de $U \times \{0\}$. Ces $A(U)$ forment un faisceau de groupes non abéliens (pour la composition). L'intérêt de ce faisceau tient au fait que:

$H^1(M, A)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes de germes de déformations de M paramétrées par $(\mathbb{C}, 0)$ ([6], page 4–10).

Pour $k \geqq 1$, et U ouvert de M, notons $A_k(U)$ le sous-groupe de $A(U)$ formé des éléments tangents à l'identité jusqu'à l'ordre $k-1$ le long de $U \times \{0\}$. On obtient donc une filtration de A par des sous-faisceaux A_k. On note Q_k le quotient de A par A_{k+1} et A_k le quotient de A_k par A_{k+1}. On remarquera que A_k est un faisceau de groupes abéliens naturellement isomorphe à Θ et qu'on a une suite exacte de faisceaux:

$$0 \to A_{k+1} \to Q_{k+1} \to Q_k \to 1$$

telle que A_{k+1} est contenu dans le centre de Q_{k+1}.

Soit $\mathscr{P}$ un sous-pseudogroupe du pseudogroupe des biholomorphismes locaux de M. On peut alors définir la notion de déformation dans $\mathscr{P}$; il s'agit de déterminer les atlas dont les changements de cartes sont dans $\mathscr{P}$. Pour formaliser ceci, on introduit un sous-faisceau $A_{\mathscr{P}}$ de A de la façon suivante. Un élément w de $A(U)$ est dans $A_{\mathscr{P}}(U)$ si la restriction de w à chaque fibre $M \times \{z\}$ est un élément de $\mathscr{P}$ (dépendant de z). L'intérêt de ce faisceau de groupes non abéliens réside dans le fait que $H^1(M, A_{\mathscr{P}})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes de germes de déformations de M dans $\mathscr{P}$, paramétrés par $(\mathbb{C}, 0)$. La preuve est exactement la même que lorsque $\mathscr{P}$ est le pseudogroupe de tous les biholomorphismes locaux.

Par exemple, on peut considérer le pseudogroupe $\mathscr{P}^g$ (resp. $\mathscr{P}^d$) (resp. $\mathscr{P}^{gd}$) formé des biholomorphismes locaux de M qui se relèvent dans $SL(2, \mathbb{C})$ en une translation à gauche (resp. à droite) (resp. le composé d'une translation à gauche et à droite). Les déformations de M dans $\mathscr{P}^{gd}$ correspondent bien sûr aux déformations de la $(SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}), SL(2, \mathbb{C}))$-structure que nous avons décrite en 3. Nous avons vu en 3.1 que ces déformations sont paramétrées par le germe de $\mathscr{R}_\Gamma$ en son point base. Quant aux déformations de M dans $\mathscr{P}^d$, elles sont paramétrées par les déformations du plongement de Γ dans $SL(2, \mathbb{C})$; elles sont donc triviales d'après le théorème de Weil-Mostow. Enfin, les déformations de M dans $\mathscr{P}^g$ sont paramétrées par les déformations du morphisme trivial de Γ dans $SL(2, \mathbb{C})$; c'est-à-dire par le germe de $\mathscr{R}_\Gamma$.

Pour simplifier les notations, notons A^g, A^d, A^{gd} les faisceaux $A_{\mathscr{P}^g}$, $A_{\mathscr{P}^d}$, $A_{\mathscr{P}^{gd}}$ respectivement. On obtient donc:

$H^1(M, A^{gd})$ est isomorphe à $H^1(M, A^g)$; il s'identifie naturellement à l'ensemble des germes en 0 de courbes holomorphes définies sur un voisinage de 0, à valeurs dans $\mathscr{R}_\Gamma$ et envoyant 0 sur le morphisme trivial u_0.

On voit donc la signification du théorème A; *il s'agit de démontrer que toute déformation de la structure complexe de M peut se réaliser dans le sous-pseudogroupe $\mathscr{P}^g$ des biholomorphismes locaux qui se relèvent en des translations à gauche.*

On définit de la même façon que précédemment la filtration de A^g par les sous-faisceaux A_k^g ainsi que les quotients Q_k^g et A_k^g. On remarquera que A_k^g est isomorphe au faisceau des germes de champs de vecteurs que nous avons appelés constants sur M.

L'espace des sections globales de A est l'espace des germes de courbes holomorphes dans le groupe des biholomorphismes de M, envoyant 0 sur l'identité. Cet espace coïncide avec l'espace des germes de courbes holomorphes dans $SL(2, \mathbb{C})$ envoyant 0 sur l'identité (en considérant les translations à gauche de $SL(2, \mathbb{C})$ sur M). En d'autres termes, le plongement de A^g dans A induit une bijection au niveau des sections globales. De même, on interprète

$Q_k^g(M)$ comme un espace de jets d'ordre k et on obtient que le plongement de Q_k^g dans Q_k induit une bijection entre les espaces de sections globales.

Nous pouvons maintenant démontrer l'autre moitié du théorème 4.6.

On montre d'abord que pour tout k, le plongement de Q_k^g dans Q_k induit un isomorphisme entre les premiers ensembles de cohomologie. Pour $k = 1$, c'est précisément le corollaire 4.5. Le passage de k à $k+1$ se fait grâce au lemme des cinq appliqué aux suites exactes suivantes:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(Q_k^g) & \to & H^1(A_{k+1}^g) & \to & H^1(Q_{k+1}^g) & \to & H^1(Q_k^g) & \to & H^2(A_{k+1}^g) \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle i_3} & & \downarrow{\scriptstyle i_4} & & \downarrow{\scriptstyle i_5} \\ H^0(Q_k) & \to & H^1(A_{k+1}) & \to & H^1(Q_{k+1}) & \to & H^1(Q_k) & \to & H^2(A_{k+1}) \end{array}.$$

Par hypothèse de récurrence i_4 est un isomorphisme. Nous avons déjà vu que les flèches i_1, i_2, i_5 sont des isomorphismes. Il en résulte que i_3 est un isomorphisme, comme annoncé. On remarquera que nous avons appliqué le lemme des cinq dans un contexte où les suites exactes mettent en jeu des *ensembles pointés* de cohomologie. Cependant il faut considérer $H^1(Q_{k+1})$ comme un ensemble sur lequel opère le groupe abélien $H^1(A_{k+1})$ et le lecteur adaptera facilement le lemme des cinq dans ce cas.

Pour montrer que ϕ est surjective, nous considérons d'abord un germe en 0 d'une courbe holomorphe l définie sur un voisinage de 0, à valeurs dans $\mathscr{K}_\Gamma$ et envoyant 0 sur le point base. Nous allons montrer que l se relève en une courbe l' dans $\mathscr{R}_\Gamma$ telle que $l = \phi \circ l'$. La courbe l donne un élément de $H^1(M, A)$ dont on peut considérer les projections successives l_k dans $H^1(M, Q_k)$. D'après ce que nous venons de voir, on peut trouver une suite d'éléments l'_k de $H^1(M, Q_k^g)$ qui s'envoient sur l_k et qui sont compatibles entre eux dans le sens où la projection de l'_{k+1} dans $H^1(M, Q_k^g)$ est l'_k. Autrement dit, les l'_k déterminent un élément $\mathbf{l}'$ de $H^1(M, A^g)$ où A^g désigne la limite projective des Q_k^g. L'interprétation des éléments de $H^1(M, A^g)$ est facile; il s'agit de courbes formelles $\mathbf{l}'$ dans $\mathscr{R}_\Gamma$ issues du point u_0. Nous avons donc trouvé une solution formelle à notre problème. L'existence d'une solution convergente résulte alors directement d'un théorème général de M. Artin [1]. Ainsi, nous avons bien montré que tout germe de courbe dans $\mathscr{K}_\Gamma$ se relève dans $\mathscr{R}_\Gamma$. De manière plus générale, en remplaçant le germe de $\mathbb{C}$ en 0 par un germe d'espace analytique quelconque (S, s), on montre de la même façon que tout germe de morphisme de (S, s) vers $\mathscr{K}_\Gamma$ se relève dans $\mathscr{R}_\Gamma$. Ceci établit que ϕ est surjective et termine la démonstration du théorème 4.6, équivalent au théorème A.

5. Classification des déformations de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\Gamma$

Démonstration du théorème B. Rappelons d'abord que le théorème de Mostow affirme que tout isomorphisme entre deux sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ se prolonge en un automorphisme continu de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. A conjugaison près, il n'y a que deux tels automorphismes:

$$\mathrm{g} \mapsto \mathrm{g} \quad \text{ou} \quad \bar{\mathrm{g}}.$$

Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets co-compacts de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et $\vartheta: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un isomorphisme. Il résulte des rappels précédents qu'il existe un automorphisme continu θ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et un morphisme $\varepsilon: \Gamma_1 \to \{\pm \mathrm{Id}\}$ tels que $\vartheta = \varepsilon.\theta_{|\Gamma_1}$.

Soient maintenant $u_1: \Gamma_1 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et $u_2: \Gamma_2 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ deux morphismes admissibles. Si $u_1 = u_2 \circ \varepsilon.\vartheta$, il est clair que $\theta: \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ passe au quotient en un difféomorphisme de $M(u_1, \Gamma_1)$ vers $M(u_2, \Gamma_2)$, holomorphe ou antiholomorphe suivant que θ est holomorphe ou antiholomorphe.

Le contenu du théorème B est qu'on obtient ainsi tous les cas où les variétés du type $M(u, \Gamma)$ sont biholomorphes.

Nous commençons maintenant la preuve du théorème B et nous choisissons donc deux sous-groupes discrets co-compacts Γ_1 et Γ_2 de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et deux morphismes admissibles $u_1: \Gamma_1 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et $u_2: \Gamma_2 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un biholomorphisme $\psi: M(u_1, \Gamma_1) \to M(u_2, \Gamma_2)$. En relevant au revêtement universel, on obtient un biholomorphisme Ψ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et un isomorphisme ϑ entre Γ_1 et Γ_2 tels que, pour tout γ de Γ_1 et tout x de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$:

$$\Psi\big(u_1(\gamma^{-1})\mathrm{x}\gamma\big) = u_2\big(\vartheta(\gamma^{-1})\big)\Psi(\mathrm{x})\vartheta(\gamma).$$

Nous venons de décrire la structure des isomorphismes ϑ entre sous-groupes discrets co-compacts de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et nous avons vu qu'il leur est associé un isomorphisme θ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Dans le cas qui nous intéresse, puisque Ψ est holomorphe, il préserve l'orientation naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ de sorte que l'automorphisme θ est holomorphe et non pas antiholomorphe. Il résulte de ces considérations que pour démontrer le théorème B, quitte à composer ψ avec un biholomorphisme du type de ceux construits précédemment, on peut se ramener à étudier le cas où $\Gamma_1 = \Gamma_2 (= \Gamma)$ et où θ est l'identité. En d'autres termes, nous supposons l'existence d'un biholomorphisme Ψ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tel que, pour tout γ de Γ et tout x de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$:

$$\Psi\big(u_1(\gamma^{-1})\mathrm{x}\gamma\big) = u_2(\gamma^{-1})\Psi(\mathrm{x})\gamma, \tag{2}$$

et *nous nous proposons de montrer que Ψ est en fait une translation à gauche par un certain élément* g *de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Ceci montrera que les deux morphismes admissibles u_1 et u_2 sont conjugués par g et établira ainsi le théorème B. Remarquons que nous aurons en fait montré un résultat plus fort puisque nous aurons non seulement décrit les cas où il existe des biholomorphismes entres ces variétés $M(u, \Gamma)$ mais nous aurons également décrit explicitement tous ces biholomorphismes.

Nous allons analyser l'espace $\mathscr{H}$ des fonctions holomorphes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ vers $\mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$. Il existe une action linéaire naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathscr{H}$; l'action de l'élément $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3)$ sur la fonction holomorphe f produit la fonction holomorphe $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3) \cdot f$ définie par:

$$(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3) \cdot f(x) = \mathrm{g}_1 f(\mathrm{g}_2^{-1} x \mathrm{g}_3)\mathrm{g}_3^{-1}.$$

Puisque $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est contenu dans $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$, le biholomorphisme Ψ que nous étudions peut être considéré comme un élément de $\mathscr{H}$ et la condition d'équivariance 2 peut se traduire par le fait que $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3) \cdot \Psi = \Psi$ pour $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3)$ dans le sous-groupe $\hat{\Gamma}$ de

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

constitué des éléments de la forme $(u_1(\gamma), u_2(\gamma), \gamma)$ avec γ dans Γ.

Admettons un instant les deux lemmes qui suivent:

Lemme 5.1. *Si un élément f de $\mathscr{H}$ est fixe par un sous-groupe de*

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

il est aussi fixe par la clôture de Zariski de ce sous-groupe.

Lemme 5.2. *La clôture de Zariski de $\hat{\Gamma}$ contient le sous-groupe* $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Il en résulte que le biholomorphisme Ψ vérifie, pour tout x et g de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$:

$$\Psi(\mathrm{x}) = \Psi(\mathrm{xg})\,\mathrm{g}^{-1}.$$

Autrement dit, Ψ commute avec toutes les translations à droite. C'est donc une translation à gauche, comme annoncé. Il nous suffit donc de démontrer ces deux lemmes.

Pour *démontrer le lemme* 5.1, nous utilisons une méthode analogue à celle de 4.1. Toute fonction holomorphe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$ vers $\mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$ se prolonge en une fonction holomorphe définie globalement sur $\mathbb{C}^4$. Pour tout entier k, soit $\mathscr{H}_k$ le sous-espace de $\mathscr{H}$ formé des restrictions à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{C}^4$ vers $\mathbb{C}^4$, de degré inférieur ou égal à k. Les sous-espaces $\mathscr{H}_k$ forment une famille croissante de sous-espaces de dimension finie, invariants par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Soit $\mathscr{P}_k$ un supplémentaire de $\mathscr{H}_{k-1}$ dans $\mathscr{H}_k$, invariant par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. En restriction à la sphère $\mathrm{SU}(2)$, tout élément f de $\mathscr{H}$ peut alors s'écrire d'une unique manière comme une série convergente $\sum_{k \geq 0} f_k$ avec f_k dans $\mathscr{P}_k$ et les projections ainsi obtenues de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{P}_k$ sont $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-équivariantes. Par conséquent, si un élément f est fixe par un sous-groupe, chaque f_k est également fixe par ce sous-groupe. Le lemme résulte alors de la description bien connue des représentations linéaires de dimension finie d'un groupe de Lie semi-simple complex tel que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, qui entraîne en particulier que celles-ci sont algébriques et donc que le groupe d'isotropie d'un vecteur est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Ceci établit le lemme 5.1.

Nous démontrons maintenant le lemme 5.2. Soit Z la clôture de Zariski de $\hat{\Gamma}$. L'intersection de Z avec $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est un sous-groupe invariant par conjugaison par Γ et donc par sa clôture algébrique dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, i.e. par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tout entier (car un sous-groupe co-compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est bien sûr dense au sens de Zariski). Par l'absurde, nous supposons donc que Z rencontre $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ trivialement.

La projection de $Z \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur le troisième facteur est un sous-groupe algébrique contenant Γ; c'est donc $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tout entier. Puisque $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est un groupe de Lie simple, cette surjection scinde, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme algébrique $\tau = (\tau_1, \tau_2): \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tel que tous les éléments de la forme $(\tau_1(\mathrm{g}), \tau_2(\mathrm{g}), \mathrm{g})$ avec g dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sont dans Z. Remarquons qu'un morphisme algébrique de SL(2, $\mathbb{C}$) dans lui-même est soit trivial, soit une conjugaison interne. On a donc plusieurs cas à étudier:

• Si τ_1 et τ_2 sont triviaux, le groupe Z contient $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ce qui contredit le fait que nous supposons que Z rencontre $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ trivialement.

• Si τ_1 est non trivial et τ_2 est trivial, le lemme 5.1 montre que, pour tout g et x de SL(2, $\mathbb{C}$), on a:

$$\Psi(xg) = \tau_1(g^{-1})\Psi(x)g.$$

Ceci signifierait que Ψ conjugue l'action de SL(2, $\mathbb{C}$) sur lui même par translations à gauche et l'action de SL(2, $\mathbb{C}$) sur lui même donnée par $g \cdot x = \tau_2(g^{-1})xg$. Ceci est impossible car la première action est libre alors que la seconde ne l'est pas.

• Le cas où τ_1 est non trivial et où τ_2 est trivial se traite de manière symétrique au précédent.

• Dans le cas où τ_1 et τ_2 sont des isomorphismes, nous affirmons que Z est nécessairement semi-simple. En effet, Z se projette surjectivement sur chaque facteur et chacune des trois projections du radical de Z est donc un sous-groupe distingué résoluble de SL(2, $\mathbb{C}$), donc trivial. On a donc trois sous-cas:

(i) Z est $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tout entier. C'est impossible car nous supposons que Z rencontre $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ trivialement.

(ii) Z est isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Puisque nous supposons que Z rencontre trivialement $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, c'est que la projection de Z sur le produit des deux premiers facteurs est surjective et donc un isomorphisme. Dans ce cas, il existe un automorphisme τ de SL(2, $\mathbb{C}$) tel que Z est l'ensemble des éléments de la forme $(g, h, \tau(g))$ ou l'ensemble des éléments de la forme $(g, h, \tau(h))$. Cela signifie que lorsque l'on a choisi les morphismes τ_1 et τ_2, on aurait pu faire un autre choix pour lequel τ_1 ou τ_2 est trivial. Nous sommes donc ramenés à un cas précédent.

(iii) Z est isomorphe à SL(2, $\mathbb{C}$) et coïncide donc avec l'ensemble des éléments du type $(\tau_1(g), \tau_2(g), g)$ avec g dans SL(2, $\mathbb{C}$). En particulier, les éléments de $\hat{\Gamma}$ sont dans ce groupe, et on a, pour tout γ de Γ:

$$u_1(\gamma) = \tau_1(\gamma) \quad \text{et} \quad u_2(\gamma) = \tau_2(\gamma).$$

À conjugaison près, on aurait donc $u_1(\gamma) = \gamma$ (et de même pour u_2). Ceci est impossible car ce morphisme n'est évidemment pas admissible (l'action correspondante de Γ sur SL(2, $\mathbb{C}$) n'étant pas libre).

Ceci achève la preuve du lemme 5.2 et donc du théorème B.

Les tenseurs holomorphes sur $M(u, \Gamma)$. Dans ce paragraphe, nous analysons plus précisément la structure de ces variétés complexes, en déterminant par exemple les champs de vecteurs holomorphes.

Nous fixons un morphisme admissible:

$$u : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) .$$

Si W est une variété holomorphe de dimension n et si:

$$\sigma : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$$

est une représentation linéaire ($d \geqq 1$), on peut construire un fibré vectoriel holomorphe E_σ de fibré $\mathbb{C}^d$ au dessus de W, associé au fibré tangent à W, par la représentation σ. Les sections holomorphes de ce fibré seront appelées les *tenseurs holomorphes de type* σ. Par exemple, les champs de vecteurs holomorphes, les formes différentielles holomorphes, ou encore les métriques holomorphes sont de tels tenseurs, pour un choix convenable de σ.

Nous nous proposons ici de déterminer tous les tenseurs holomorphes sur les variétés complexes $M(u, \Gamma)$.

Dans le cas où $W = M(u, \Gamma)$, le fibré E_σ est le quotient de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^d$ par l'action de Γ où l'élément γ opère sur l'élément (c, v) de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^d$ par:

$$(\mathrm{x}, v) \mapsto \big(u(\gamma)^{-1} \mathrm{x} \gamma, \sigma \circ \mathrm{Ad} \circ u(\gamma^{-1})(v)\big)$$

où:

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}\big(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})\big) \simeq \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$$

désigne la représentation adjointe. Supposons que l'on dispose d'un vecteur v de $\mathbb{C}^d$ fixe par $\sigma \circ \mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$; on obtient alors un tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$. A priori, ces tenseurs sont particuliers puisque leurs relevés à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sont invariants par les translations à droite. Le théorème suivant affirme cependant que tous les tenseurs holomorphes sont de ce type.

Théorème 5.3. *Tout tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$ se relève dans le revêtement universel* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *en un tenseur invariant à droite par* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *et à gauche par* $u(\Gamma)$.

Cela signifie, en particulier, que tout tenseur holomorphe est localement homogène. Avant de commencer la preuve de ce théorème, nous en donnons deux corollaires.

Par exemple, les champs de vecteurs holomorphes sur $M(u, \Gamma)$ correspondent aux éléments de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ fixes par $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$. Puisqu'un tel vecteur fixe est nécessairement fixe par la clôture de Zariski de $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, on obtient facilement le corollaire suivant, dans lequel p désigne la projection de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$:

Corollaire 5.4. *Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas abélien, la variété $M(u, \Gamma)$ ne possède aucun champ de vecteurs holomorphe non nul.*

Si $p \circ u(\Gamma)$ est abélien mais non trivial, l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $M(u, \Gamma)$ est de dimension 1.

Si $p \circ u(\Gamma)$ est trivial, l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $M(u, \Gamma)$ est de dimension 3.

De même, nous pouvons décrire les métriques holomorphes sur $M(u, \Gamma)$. Nous savons déjà que $M(u, \Gamma)$ possède une métrique de Killing mais, plus généralement, si q est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ invariante par $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$, on peut construire une métrique holomorphe sur $M(u, \Gamma)$, encore notée q. Puisqu'une forme sur $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ invariante par $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$ est aussi invariante par sa clôture de Zariski, il n'est pas difficile de vérifier le corollaire suivant:

Corollaire 5.5. *Les métriques holomorphes sur $M(u, \Gamma)$ correspondent aux formes quadratiques sur* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *invariantes par* $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$:

Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas abélien, les multiples de la forme de Killing K sont les seules formes invariantes par $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$.

Si $p \circ u(\Gamma)$ est non trivial mais contenu dans un sous-groupe à un paramètre engendré par (l'exponentielle d') un vecteur non nul v de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, *les formes invariantes par* $\mathrm{Ad} \circ u(\Gamma)$ *forment l'espace de dimension* 2 *constitué des formes du type*:

$$q_{\alpha, \beta}(x, y) = \alpha K(x, y) + \beta K(x, v) K(y, v) \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}) .$$

Si $p \circ u(\Gamma)$ est trivial, toutes les formes bilinéaires symétriques sur $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *sont invariantes par* $\mathrm{Ad} \circ (\Gamma) \ldots .$

La preuve du théorème 5.3 est très proche de celle du théorème B. Nous fixons un type de tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$, c'est-à-dire une représentation

$$\sigma : \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) .$$

Un tenseur holomorphe de type σ sur $M(u, \Gamma)$ se relève dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ en un tenseur holomorphe, défini par une application holomorphe $\Psi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$ qui vérifie la condition d'équivariance suivante:

$$\Psi\big(u(\gamma)^{-1} \mathrm{x} \gamma\big) = \sigma \circ \mathrm{Ad} \circ u(\gamma^{-1})\big(\Psi(\mathrm{x})\big)$$

pour tout γ de Γ.

Nous allons analyser l'espace $\mathscr{H}$ des fonctions holomorphes de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ vers $\mathbb{C}^d$. On dispose d'une représentation linéaire naturelle de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ par automorphismes de $\mathscr{H}$: l'action de l'élément $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$ du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sur l'élément f de $\mathscr{H}$ est la fonction holomorphe $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \cdot f$ définie par:

$$(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \cdot f(\mathrm{x}) = \sigma \circ \mathrm{Ad}(\mathrm{g}_1)\big(f(\mathrm{g}_1^{-1} \mathrm{x} \mathrm{g}_2)\big) .$$

La condition d'équivariance ci-dessus se traduit par le fait que Ψ est fixe par le sous-groupe $\bar{\Gamma}$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ formé des éléments du type $\big(u(\gamma), \gamma\big)$ avec $\gamma \in \Gamma$.

On montre, de la même façon que dans le lemme 5.1, que Ψ est fixe par la clôture de Zariski de $\bar{\Gamma}$. Pour démontrer le théorème 5.3, il suffit donc de vérifier le lemme suivant, analogue au lemme 5.2:

Lemme 5.6. *La clôture de Zariski de $\bar{\Gamma}$ contient* $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

La preuve est bien sûr analogue à celle de 5.2, mais plus simple. Notons en effet Z cette clôture de Zariski. La projection de Z sur le second facteur est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ contenant Γ. Par conséquent, Z se projette surjectivement sur le second facteur.

De même, l'intersection R de Z avec $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est triviale ou bien coïncide avec $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Pour démontrer le lemme, il s'agit donc de montrer que R ne peut être trivial.

Dans le cas contraire, la projection de Z sur le premier facteur serait injective et nous avons vu que la projection de Z sur le second facteur est surjective. Il en résulterait que $\bar{\Gamma}$ est le graphe d'un isomorphisme algébrique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

À conjugaison près, nous serions donc dans le cas où le morphisme u est donné par $u(\gamma) = \gamma$. C'est la contradiction cherchée car ce morphisme n'est pas admissible.

Nous avons donc montré le théorème 5.3.

Pour terminer ce paragraphe, nous complétons le théorème B par une description des applications holomorphes non nécessairement bijectives entre variétés de la forme $M(u, \Gamma)$.

Théorème 5.7. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets co-compacts de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *et u_1, u_2 deux morphismes admissibles de Γ_1 et Γ_2 respectivement dans* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. *Toute application holomorphe surjective de $M(u_1, \Gamma_1)$ sur $M(u_2, \Gamma_2)$ est un revêtement.*

La description que nous avons faite des métriques holomorphes montre que si une telle métrique est non dégénérée en un point, elle est non dégénérée partout. Soit donc ϕ une application holomorphe surjective de $M(u_1, \Gamma_1)$ sur $M(u_2, \Gamma_2)$. L'image réciproque de la métrique de Killing par ϕ est non dégénérée en tous les points où la différentielle de ϕ est de rang 3 et il existe de tels points car ϕ est surjective. Cette différentielle est donc de rang 3 partout et ϕ est un revêtement. Il ne serait pas difficile de décrire la structure de tous ces revêtements.

Nous n'avons pas essayé d'analyser le cas où ϕ n'est pas surjective et non constante. Il est facile de vérifier que l'image d'un tel ϕ est nécessairement un sous-ensemble analytique totalement isotrope pour la métrique de Killing et il est probable que de tels objets n'existent pas.... Citons à ce propos l'article [14] dans lequel il est montré que $M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\Gamma$ ne contient aucun sous-ensemble analytique de codimension 1. K. Oeljeklaus nous a par ailleurs signalé qu'on ignore si M contient des courbes holomorphes autres que les courbes elliptiques qui proviennent des orbites compactes de l'action à gauche sur M des sous-groupes de Cartan (conjugués au sous-groupe diagonal et isomorphes à $\mathbb{C}^*$) (voir aussi [15]).

6. Quelques exemples

Nous regroupons dans ce paragraphe un certain nombre de remarques et d'exemples.

Nous commençons par une observation élémentaire qui justifie le rôle des variétés hyperboliques réelles de dimension 3 dans ce contexte. Soit V une variété riemannienne de dimension 3 et M le fibré de ses repères orthonormés directs. Comme il est bien connu, le fibré tangent à M est canoniquement trivialisé, i.e. décomposé sous la forme

$$M \times (\mathrm{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3)$$

où $\mathrm{so}(3)$ correspond aux vecteurs verticaux et $\mathbb{R}^3$ aux vecteurs horizontaux [19]. Remarquons qu'il existe un isomorphisme naturel I entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{so}(3)$ qui envoie un vecteur sur l'endomorphisme antisymétrique qui est le produit vectoriel avec ce vecteur. C'est (à une constante multiplicative près) le seul isomorphisme qui conjugue la représentation naturelle de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ et la représentation adjointe sur $\mathrm{so}(3)$.

On obtient alors une structure complexe sur $\mathrm{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3$ par

$$\sqrt{-1}(x, y) = \left(-I^{-1}(y), I(x)\right).$$

On obtient ainsi une structure presque-complexe sur M.

Proposition 6.1. *Cette structure presque complexe est intégrable si et seulement si la variété riemannienne V est à courbure constante -1.*

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $I_1 = I(\mathbf{e}_1)$; $I_2 = I(\mathbf{e}_2)$; $I_3 = I(\mathbf{e}_3)$. Notons que $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ agit sur M en préservant la structure presque complexe, de sorte qui si cette dernière est intégrable, les vecteurs I_1, I_2, I_3 définissent trois champs de vecteurs holomorphes sur M. Il en résulte que les champs de vecteurs

$$\mathbf{e}_1 = \sqrt{-1}\, I_1, \quad \mathbf{e}_2 = \sqrt{-1}\, I_2, \quad \mathbf{e}_3 = \sqrt{-1}\, I_3$$

sont aussi holomorphes. Les crochets de ces champs sont évidemment donnés par:

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = -[I_i, I_j] \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).$$

Ainsi, la 2-forme de courbure est celle qui, lorsqu'on l'évalue sur le bivecteur $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est le produit vectoriel avec $-\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$. La courbure sectionnelle est facile à calculer ([27]):

$$R(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \left(-(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \wedge \mathbf{e}_i\right).\mathbf{e}_j = -\|\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\|^2 = -1.$$

La courbure sectionnelle est donc -1. Nous avons déjà noté la réciproque, due à la structure complexe naturelle sur le groupe des isométries directes de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3$.

On observera que si l'on multiplie l'isomorphisme I par une constante k la condition d'intégrabilité devient que la courbure sectionnelle est $-k^2$ de sorte que le signe négatif de la courbure a un sens intrinsèque.

Si V est une variété fermée orientée de dimension 3, son anneau de cohomologie rationnelle est complètement décrit par sa forme d'intersection:

$$H^1(M,\mathbb{Q}) \times H^1(M,\mathbb{Q}) \times H^1(M,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

qui est une forme trilinéaire alternée. D'après [38], toute forme trilinéaire alternée rationnelle est la forme d'intersection d'une certaine variété fermée. Grâce au puissant théorème d'hyperbolisation de Thurston ([40]), on peut même construire des variétés *hyperboliques* dont l'anneau de cohomologie est donné:

Lemme 6.2. *Pour toute variété fermée de dimension* 3, *il existe une variété hyperbolique fermée de dimension* 3 *ayant même anneau de cohomologie rationnelle.*

En effet, d'après [31], toute variété de dimension 3 contient un nœud homotope à zéro dont le complémentaire est hyperbolique, c'est-à-dire possède une métrique hyperbolique complète de volume fini. On peut alors faire une chirurgie de Dehn sur ce nœud et un théorème de W. Thurston garantit que toutes les variétés fermées ainsi obtenues sont hyperboliques, sauf peut-être un nombre fini [40]. Il est par ailleurs clair que toutes ces variétés, sauf une, ont le même anneau de cohomologie rationnelle que la variété initiale.

En particulier, le premier nombre de Betti des groupes Γ qui nous intéressent peut prendre toutes les valeurs.

Nous commençons maintenant la *démonstration du théorème* C, relatif à la structure de la variété algébrique $\mathscr{R}_\Gamma$ des morphismes de Γ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ au voisinage du morphisme trivial u_0.

Le cas où le *premier nombre de Betti* $b_1(\Gamma)$ *s'annule* est facile. Nous avons déjà signalé que l'espace tangent de Zariski à $\mathscr{R}_\Gamma$ en u_0 est le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma; \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$. Par conséquent si le premier nombre de Betti de Γ est nul, le morphisme trivial est un point isolé de $\mathscr{R}_\Gamma$ (car un ensemble analytique se plonge localement dans son espace tangent de Zariski).

Nous étudions maintenant le second cas du théorème C.

Théorème 6.3. *Si le premier nombre de Betti* $b_1(\Gamma)$ *est égal à* 1, *alors tout morphisme* $u: \Gamma \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *suffisamment proche du morphisme trivial est à image abélienne.*

Soit u_t un germe de courbe holomorphe dans l'espace $\mathscr{R}_\Gamma$ des morphismes tel que $u_0 = \mathrm{id}$. Nous allons montrer que tous les u_t sont à images abéliennes et ceci établira le théorème.

Soit $A: \Gamma \to \mathbb{C}$ un morphisme non trivial, de sorte que tout autre morphisme est un multiple de A.

Nous allons montrer, par récurrence sur l'entier k, qu'il existe des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ tels que, pour tout γ, on ait:

$$u_t(\gamma) = \exp\big(A(\gamma)(t a_1 + t^2 a_2 + \cdots + t^k a_k) + o(t^k)\big).$$

Pour $k = 1$, écrivons:

$$u_t(\gamma) = \exp\big(t B(\gamma) + o(t)\big).$$

Puisque u_t est un morphisme, B est un morphisme de Γ vers $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, donc de la forme $A a_1$ pour un certain a_1 de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Ceci établit notre assertion quand $k = 1$. Supposons-la établie jusque l'entier $k - 1$ et écrivons:

$$u_t(\gamma) = \exp\big(A(\gamma)(t a_1 + t^2 a_2 + \cdots + t^{k-1} a_{k-1}) + t^k A_k(\gamma) + o(t^{k+1})\big).$$

Écrivons que u_t est un morphisme et utilisons la formule de Campbell-Hausdorff:

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + 1/2[x, y] + 1/12[[x, y], y] + \cdots).$$

En développant, on obtient que A_k est un morphisme de Γ vers $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ car tous les crochets intermédiaires s'annulent. Ainsi, A_k est de la forme $A a_k$ pour un certain a_k de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ et ceci établit l'assertion pour tout k.

Il en résulte que si γ est dans le premier groupe dérivé de Γ (donc dans le noyau de A), la courbe $u_t(\gamma)$ a toutes ses dérivées nulles en 0. On a donc $u_t(\gamma) = \mathrm{Id}$ pour tout γ dans ce premier groupe dérivé. Ceci signifie précisément que u_t est à image abélienne et établit le théorème.

Nous construisons maintenant des *morphismes à images non abéliennes*, par une méthode inspirée de [26].

Choisissons une variété hyperbolique réelle compacte V de dimension 3 qui contient au moins deux surfaces plongées orientables Σ_1, Σ_2, disjointes et dont les classes d'homologie sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. L'existence de telles variétés résulte de 6.2 mais on peut aussi utiliser une construction arithmétique, décrite dans [25].

Soit M le fibré des repères de V; c'est un espace homogène de la forme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret co-compact de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ qui est le groupe fondamental de M ou de V.

Soit $\tilde{V}$ le revêtement infini cyclique associé à Σ_1. Dans ce revêtement, la surface Σ_1 se relève en une collection de surfaces disjointes Σ_1^i (avec $i \in \mathbb{Z}$) de sorte que le générateur τ du groupe du revêtement envoie Σ_1^i sur Σ_1^{i+1}. Les lacets tracés sur Σ_2 ne rencontrent pas Σ_1 et se relèvent donc en des lacets dans $\tilde{V}$. On obtient donc une famille de surfaces Σ_2^i dans $\tilde{V}$ où l'on convient que Σ_2^i est dans le domaine bordé par Σ_1^i et Σ_1^{i+1}. On notera que Σ_1^i disconnecte $\tilde{V}$, contrairement à Σ_2^i.

Nous allons construire explicitement des morphismes de Γ dans le groupe B des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Le groupe Γ est une extension:

$$1 \to \pi_1(\tilde{V}) \to \Gamma \xrightarrow{i_1} \mathbb{Z} \to 1\,,$$

où i_1 désigne le nombre d'intersection avec Σ_1. Pour chaque entier relatif k, le nombre d'intersection avec Σ_2^k définit un morphisme:

$$j_k : \pi_1(\tilde{V}) \to \mathbb{Z}\,.$$

Soit λ un nombre complexe quelconque. On définit un morphisme:

$$b_\lambda : \gamma \in \pi_1(\tilde{V}) \mapsto \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(k\lambda) j_k(\gamma) \in \mathbb{R}$$

qui, pour chaque γ, est bien sûr une somme finie. Soit t un élément quelconque de Γ tel que $i_1(t) = 1$. La conjugaison par t préserve $\pi_1(\tilde{V})$ et vérifie:

$$b_\lambda(t\gamma t^{-1}) = \exp(\lambda)\, b_\lambda(\gamma)\,.$$

On peut alors définir un morphisme u_λ de Γ vers B de la manière suivante. Un élément γ de Γ s'écrit de manière unique sous la forme $\gamma_0\, t^k$ où γ_0 est dans $\pi_1(\tilde{V})$ et $k = i_1(\gamma)$. On pose alors:

$$u_\lambda(\gamma) = \begin{pmatrix} \exp(1/2\lambda i_1(\gamma)) & b_\lambda(\gamma_0)\exp(-1/2\lambda i_1(\gamma)) \\ 0 & \exp(-1/2\lambda i_1(\gamma)) \end{pmatrix}.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il s'agit bien d'un morphisme de groupes dont l'image est non abélienne si λ est non nul puisque l'image est alors Zariski dense dans B. Bien sûr, u_λ est proche du morphisme trivial si λ est proche de 0. Ceci établit donc la dernière partie du théorème C.

Les morphismes que nous venons de construire sont particuliers dans le sens où leur image est *résoluble* et n'est pas Zariski dense dans $SL(2,\mathbb{C})$. Voici une méthode de construction de morphismes dont l'image est Zariski dense. Soit V une variété hyperbolique réelle fermée de dimension 3 contenant une surface plongée Σ qui la disconnecte en deux composantes V_1 et V_2. Supposons que chaque composante contienne à son tour deux surfaces plongées disjointes telles que les cinq surfaces ainsi considérées soient homologiquement indépendantes. L'existence de tels exemples résulte de 6.2 ou de [25]. Le groupe fondamental Γ de V est la somme amalgamée des groupes fondamentaux de chaque composante, amalgamée sur le groupe fondamental de Σ. Par une simple généralisation de la construction précédente, on construit un morphisme du groupe fondamental de la première composante à valeurs dans B, trivial sur les lacets de Σ. De même, on construit un morphisme du groupe fondamental de la seconde composante à valeurs dans le groupe B_- des matrices triangulaires inférieures, trivial sur le bord Σ. En amalgamant ces deux morphismes, on obtient un morphisme non trivial de Γ dans $SL(2,\mathbb{C})$ dont l'image est évidemment Zariski dense.

Il faut cependant remarquer que les morphismes que nous venons de construire ne sont pas injectifs.

Pour terminer cet article, nous allons montrer que dans certains cas, la variété $\mathscr{R}_\Gamma$, c'est-à-dire l'espace de Kuranishi de $SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$ peut présenter une *singularité*. Pour cela, nous allons expliciter le cône quadratique tangent à $\mathscr{R}_\Gamma$. Comme il est bien connu, ce cône est donné par l'annulation de la première obstruction ([5]):

$$H^1(M,\Theta) \times H^1(M,\Theta) \to H^2(M,\Theta)$$

donnée par le «cup-crochet». Dans le cas qui nous intéresse, nous savons que:

$$H^1(M,\Theta) \simeq H^1(M,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \quad H^2(M,\Theta) \simeq H^2(M,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}).$$

Le cup-crochet n'est pas difficile à expliciter. Il s'agit de la forme quadratique sur $H^1(M,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ à valeurs dans $H^2(M,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ dont la forme bilinéaire associée est donnée par:

$$\Delta(c_1 \otimes x_1, c_2 \otimes x_2) = (c_1 \cup c_2) \otimes [x_1, x_2].$$

On remarquera que les tenseurs élémentaires $c \otimes x$ sont isotropes pour cette forme quadratique. Le cône quadratique tangent à $\mathscr{R}_\Gamma$ ne dépend donc que de la structure de l'anneau de cohomologie de V; il est entièrement décrit par une forme trilinéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension $b_1(\Gamma)$ et cette forme peut être quelconque. Dès que la forme quadratique associée est non triviale, le cône quadratique tangent à $\mathscr{R}_\Gamma$ est non trivial, c'est-à-dire distinct de $H^1(M,\mathbb{C})$ tout entier. Dans ce cas, $\mathscr{R}_\Gamma$ présente donc une singularité en son point base.

Si π est le groupe fondamental d'une variété compacte kählérienne et G un groupe algébrique défini sur $\mathbb{C}$, la variété des morphismes de π dans G a la propriété qu'au voisinage d'un point quelconque, elle est biholomorphiquement équivalente à son cône quadratique tangent [11]. Dans le cas qui nous intéresse, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$ n'est pas une variété kählérienne et M. Kapovich et J. Millson ont effectivement construit récemment des exemples de groupes Γ pour lesquels cette propriété n'est pas satisfaite pour $\mathscr{R}_\Gamma$ ([17]).

Bibliographie

[1] *M. Artin*, On solutions to analytic equations, Inv. Math. **5** (1968), 277–291.
[2] *E. Calabi, E. Vesentini*, On compact locally symmetric Kahler manifolds, Ann. Math. **71** (1960), 472–507.
[3] *J. Carlson, D. Toledo*, Quadratic presentations and Kähler groups, preprint.
[4] *Y. Carrière*, Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines, Inv. Math. **95** (1989), 615–628.
[5] *A. Douady*, Variétés et espaces mixtes, déformations régulières, obstruction primaire à la déformation, exposés au séminaire Cartan, 13ème année (1960–61).
[6] *A. Douady*, Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, séminaire Bourbaki 17ème année (1964–65), exposé 277.
[7] *W. Fulton, J. Harris*, Representation theory, Grad. Texts Math. **129**, Springer Verlag, 1991.
[8] *É. Ghys*, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables et instables sont différentiables, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 251–270.
[9] *É. Ghys*, Holomorphic Anosov systems, Inv. Math. **119** (1995), 585–614.
[10] *W. M. Goldman*, Nonstandard Lorentz space forms, J. Diff. Geom. **21** (1985), 301–308.
[11] *W. M. Goldman, J. J. Millson*, The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds, Publ. Math. IHÉS **67** (1988), 43–96.
[12] *R.C. Gunning*, Introduction to holomorphic functions of several variables, vol. III, Homological theory, Brooks/Cole Publishing Company, 1990.
[13] *A. Haefliger*, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, in: Structures transverses des feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque **116** (1984), 70–97.
[14] *A.T. Huckleberry, G.A. Margulis*, Invariant analytic hypersurfaces, Inv. Math. **71** (1983), 235–240.

[15] *A.T. Huckleberry, J. Winkelmann*, Subvarieties of parallelizable manifolds, Math. Ann. **295** (1993), 469–483.
[16] *H.-C. Im Hof, E.A. Ruh*, The vanishing of cohomology associated to discrete subgroups of complex simple Lie groups, Osaka J. Math. **19** (1982), 669–675.
[17] *M. Kapovich, J. Millson*, On the deformation theory of representations of fundamental groups of compact hyperbolic 3-manifolds, Preprint.
[18] *B. Klinger*, Complétude des variétés Lorentziennes à courbure constante, Preprint.
[19] *S. Kobayashi, K. Nomizu*, Foundations of differential geometry, Volume 1, Interscience tracts in pure and applied mathematics **15** (1963), New York–London, John Wiley & Sons.
[20] *R. Kulkarni, F. Raymond*, 3-dimensional Lorentz space forms and Seifert fiber spaces, J. Diff. Geom. **21** (1985), 231–268.
[21] *M. Kuranishi*, On the locally complete families of complex manifolds, Ann. Math. **75** (1962), 536–577.
[22] *G.A. Margulis*, Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Erg. Math. 3. Folge **17** (1991), Springer-Verlag.
[23] *Y. Matsushima*, On Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds, Osaka Math. J. **14** (1962), 1–20.
[24] *G. Mess*, Lorentz spacetimes of constant curvature, preprint.
[25] *J. Millson*, On the first Betti number of constant negatively curved manifolds, Ann. Math. **104** (1976), 235–247.
[26] *J. Millson*, A remark on Raghunathan's vanishing theorem, Topology **24** (1985), 495–498.
[27] *J. Milnor*, Morse theory, Ann. math. stud. **51**, Princeton University Press, 1969.
[28] *J. Milnor*, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Adv. Math. **21** (1976), 293–329.
[29] *G.D. Mostow*, Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, Publ. Math. IHÉS **34** (1968), 53–104.
[30] *D. Mumford*, Abelian varieties, Oxford University Press, 1970.
[31] *R. Myers*, Simple knots in compact orientable 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 75–91.
[32] *I. Nakamura*, Complex parallelisable manifolds and their small deformations, J. Diff. Geom. **10** (1975), 85–112.
[33] *P. Pansu*, Sous-groupes discrets des groupes de Lie: rigidité, arithméticité, séminaire Bourbaki 46ème année (1993–94), exposé 778.
[34] *M.S. Raghunathan*, On the first cohomology of discrete subgroups of semi-simple Lie groups, Amer. J. Math. **87** (1965), 103–139.
[35] *M.S. Raghunathan*, Vanishing theorems for cohomology groups associated to discrete subgroups of semi-simple Lie groups, Osaka Math. J. **3** (1966), 243–256; corrections ibid. **16** (1979), 295–299.
[36] *C.S. Rajan*, Deformations of complex structures on $\Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ and cohomology of local systems, Proc. (Math. Sci.) Indian Acad. Sci. **104** (1994), 389–395.
[37] *A. Selberg*, Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces, in: Proc. 15th Scandinavian Math. Cong. (Oslo 1968), Springer Lect. Notes Math. **118** (1970), 99–120.
[38] *D. Sullivan*, On the intersection ring of compact three manifolds, Topology **14** (1975), 275–277.
[39] *W. Thurston*, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University lecture notes, 1977.
[40] *W. Thurston*, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.
[41] *A. Weil*, On discrete subgroups of Lie groups, I, II, Ann. Math. **72** (1960), 369–384; ibid. **75** (1962), 578–602.
[42] *J. Wolf*, Spaces of constant curvature, 3rd ed., Publish or Perish, Boston 1974.

École Normale Supérieure de Lyon, UMR128 du CNRS, 46, Allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07

Eingegangen 12. Oktober 1994, in revidierter Fassung 5. Mai 1995