

Poincaré et son disque

par

Étienne GHYS



1 Un monde imaginaire

HENRI POINCARÉ n'a pas inventé la géométrie non euclidienne. Même le fameux *disque de Poincaré* existait avant lui. Pourtant, il a fait un usage si époustouffant de cette géométrie et de son groupe d'isométries que le nom *disque de Poincaré* n'est certainement pas usurpé. Le but de ce chapitre n'est pas de décrire l'histoire de la géométrie non euclidienne, car de nombreux ouvrages excellents y sont déjà consacrés (voir [16, 23, 28, 46, 47, 50], parmi mes préférés). J'aurais aimé proposer une visite guidée du disque, mais il est beaucoup trop vaste et je n'en ai moi-même exploré qu'une petite partie. Je voudrais plutôt convier le lecteur à une promenade. Le risque d'une marche aléatoire dans le plan euclidien est de revenir sans cesse au point de départ de manière récurrente, mais ce risque n'existe pas en géométrie non euclidienne ! Nous verrons qu'un chemin aléatoire dans le disque ne fait pas beaucoup de détours et mène presque sûrement quelque part. Mon but principal est d'essayer de transmettre une intuition géométrique de cet objet qui est passé progressivement, en moins de deux siècles, du statut de contre-exemple dont l'existence même était douteuse à celui d'un concept central qui a envahi presque toutes les mathématiques.

Ce texte n'est bien sûr pas destiné aux experts. J'ai par contre essayé de le rendre accessible à un étudiant de licence (motivé). Pour ceux qui voudraient en savoir plus, je propose une copieuse bibliographie – prétexte pour présenter quelques-uns de mes livres favoris.

Faisons d'abord connaissance avec une géométrie non euclidienne en utilisant la description imagée qu'en fait Poincaré dans la *Science et l'hypothèse* [60, chap. 3] :

« *LE MONDE NON EUCLIDIEN.*

Supposons [...] un monde renfermé dans [un grand cercle] et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint [le cercle] où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon [du cercle] limite ; soit r la distance du point considéré au centre de [ce cercle]. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.

Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.

Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera [du cercle] limite.

Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher [du cercle] limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre [le cercle] limite.

Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. [...] Qu'on me permette pour abrégé le langage, d'appeler un pareil mouvement déplacement non euclidien.

Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous. [Si ces êtres imaginaires] fondent une géométrie, [...] ce sera la géométrie non euclidienne. »

C'est dans ce monde « ni contradictoire ni inimaginable » que nous allons nous promener.

Voici une citation de Coxeter montrant combien cette géométrie est bien « réelle » pour les mathématiciens [23] :

*« When Hamlet exclaims (in Act II, Scene II) "I could be bounded in a nutshell and count myself a king of infinite space" he is providing a poetic anticipation of Poincaré's inversive model of the infinite hyperbolic plane, using a circular "nutshell" for the Absolute. »*¹

Le lecteur est donc prévenu que ce monde est vaste. . .



¹Quand Hamlet s'exclame (Acte II, scène II) « Je pourrais être enfermé dans une coquille de noix et me considérer comme le roi d'un espace infini », il donne une anticipation poétique du modèle inversif de Poincaré du plan hyperbolique infini, en utilisant une « coquille » circulaire comme absolu.

2 Quelques formules

Avant de commencer notre promenade, il faut mettre en place quelques définitions, notations et formules qui ne feront que paraphraser la description imagée de Poincaré.

On note $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans le plan complexe. Si v est un vecteur tangent à \mathbf{D} en un point z , de norme euclidienne $\|v\|_{\text{eucl}}$, sa *norme hyperbolique*² $\|v\|_{\text{hyp}}$ est définie par

$$\|v\|_{\text{hyp}} = \frac{1}{1 - |z|^2} \|v\|_{\text{eucl}}.$$

Ceci permet de définir la *longueur hyperbolique* d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{D}$ par

$$\text{long}_{\text{hyp}}(\gamma) = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|_{\text{hyp}} dt,$$

et la *distance hyperbolique* (ou distance de Poincaré) $\text{dist}_{\text{hyp}}(z_0, z_1)$ entre deux points z_0 et z_1 du disque comme le minimum des longueurs hyperboliques des courbes joignant z_0 et z_1 . Le *disque de Poincaré* est l'espace métrique ainsi obtenu.

Pourquoi choisir ce facteur $1/(1 - |z|^2)$ plutôt qu'un autre ? Tout simplement car c'est le facteur « évident » qui garantit que l'objet que nous venons de définir est *homogène*. Si α est un réel et a un élément de \mathbf{D} , la transformation de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ définie par

$$f_{\alpha,a}(z) = \exp(i\alpha) \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

préserve le disque unité (vérifiez!). L'ensemble de ces transformations forme un groupe que nous rencontrerons souvent dans ce chapitre. Notons pour l'instant que ce groupe opère *transitivement* sur le disque : étant donné deux points quelconques de \mathbf{D} , l'un des éléments du groupe envoie le premier point sur le second (vérifiez!). La dérivée de $f_{\alpha,a}$ est

$$f'_{\alpha,a}(z) = \exp(i\alpha) \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2},$$

d'où il résulte que

$$\frac{|df_{\alpha,a}(z)|}{1 - |f_{\alpha,a}(z)|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

(vérifiez encore...). En d'autres termes, la *métrique de Poincaré* est invariante par le groupe des $f_{\alpha,a}$ et le disque est bien homogène : *son groupe d'isométries opère transitivement* et tous ses points sont équivalents.

Nous verrons plus loin que cette homogénéité est une propriété cruciale qui caractérise « presque » le disque de Poincaré. Pour l'instant, nous allons utiliser l'homogénéité pour obtenir sans effort certaines formules dont nous aurons besoin.

²C'est, semble-t-il, Klein qui est responsable de la terminologie *géométrie hyperbolique*. Il y a bien sûr de bonnes raisons pour ce choix mais on ne peut que regretter l'usage trop fréquent du mot « hyperbolique » en mathématiques, avec des sens bien différents.

Il est facile de trouver la courbe la plus courte (au sens hyperbolique) joignant le point 0 de \mathbf{D} au point r situé sur l'axe $[0, 1[\subset \mathbf{D}$. Il suffit en effet d'observer que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{D}$ joint 0 à r , la projection radiale $|\gamma| : [0, 1] \rightarrow [0, 1[\subset \mathbf{D}$ joint également 0 à r , et que sa longueur hyperbolique est plus petite que celle de γ (car la composante radiale d'un vecteur est plus courte que ce vecteur). Ainsi, l'unique courbe minimisant la longueur hyperbolique entre 0 et r est le rayon $[0, r]$ de longueur hyperbolique

$$\int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \text{Argth}(r).$$

Cette longueur tend bien vers l'infini lorsque r tend vers 1, comme Poincaré nous l'explique dans sa présentation imagée.

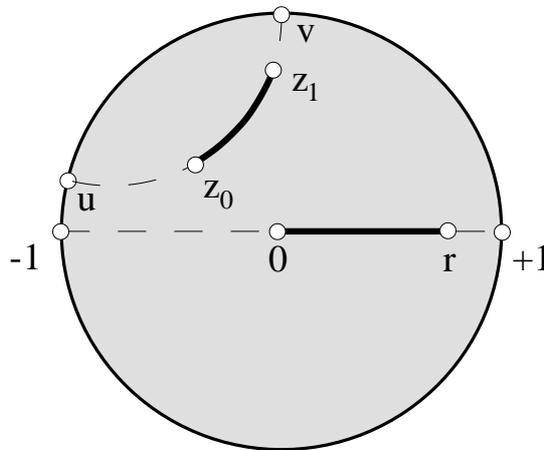


FIG. 1 – Géodésiques du disque

Pour trouver les *géodésiques* de \mathbf{D} , c'est-à-dire les courbes qui minimisent les longueurs hyperboliques à extrémités fixes, il suffit de faire agir le groupe d'isométries. Deux points z_0 et z_1 étant donnés, on peut trouver une isométrie qui envoie le premier sur 0 et le second sur un point de l'axe réel positif, comme précédemment. La géodésique cherchée est donc l'image d'un segment radial par une isométrie ; c'est un arc de cercle orthogonal au cercle unité (ou un segment radial). Pour s'en convaincre, le lecteur devra se souvenir (ou vérifier lui-même, ou encore, consulter [4, 23]) qu'une homographie

$$z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\} \mapsto \frac{Az + B}{Cz + D} \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

(avec A, B, C, D nombres complexes tels que $AD - BC \neq 0$) envoie un cercle sur un cercle (de la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$) et préserve l'angle d'intersection entre deux cercles. Ainsi, un diamètre du disque unité est envoyé par une isométrie $f_{\alpha, a}$ sur un arc de cercle orthogonal au cercle unité (ou sur un autre diamètre).

De même, il est facile d'utiliser l'homogénéité pour établir la formule donnant la distance entre deux points z_0 et z_1 . Nous savons déjà que

$$\text{dist}_{\text{hyp}}(0, r) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \text{Argth}(r)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{0 - (-1)}{0 - (1)} \cdot \frac{r - 1}{r - (-1)} \right) \right|$$

où l'on reconnaît $[-1 : 1 : 0 : r]$, *birapport* de quatre points de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Je rappelle que le birapport de quatre points distincts x, y, z, t est défini comme

$$[x : y : z : t] = \frac{z - x}{z - y} \cdot \frac{t - y}{t - x}$$

et que pour toute homographie f , on a

$$[f(x) : f(y) : f(z) : f(t)] = [x : y : z : t].$$

Puisque les homographies $f_{\alpha, a}$ préservent le birapport, les distances hyperboliques et les cercles orthogonaux au cercle unité, on obtient sans peine la distance hyperbolique entre deux points quelconques z_0 et z_1 de \mathbf{D} . Il suffit de considérer l'unique cercle (ou diamètre) orthogonal au cercle unité qui contient z_0 et z_1 . Ce cercle rencontre le cercle unité en deux points u, v (voir figure 1) et on a

$$\text{dist}_{\text{hyp}}(z_0, z_1) = \frac{1}{2} |\log[u : v : z_0 : z_1]|.$$

Le lecteur qui préfère une formule ne mettant en jeu que z_0 et z_1 pourra exprimer (comme Poincaré le fait dans son premier article sur le sujet [59]) la distance en fonction du birapport des points (cocycliques) $z_0, 1/\bar{z}_0, z_1$ et $1/\bar{z}_1$.

Remarquons que le disque est *2-homogène* : si $\text{dist}_{\text{hyp}}(z_0, z_1) = \text{dist}_{\text{hyp}}(z'_0, z'_1)$, il existe une isométrie qui envoie z_0 sur z'_0 et z_1 sur z'_1 .

3 Le disque de Poincaré est omniprésent

On connaît (au moins depuis Euclide!) la géométrie du plan euclidien. La géométrie de la sphère est également familière car, après tout, la *géo-métrie* est la science qui *mesure* la *terre*. Il a fallu deux millénaires pour que la géométrie hyperbolique s'impose parmi les mathématiciens (et un peu parmi les physiciens). Pourtant, elle mérite le même respect que ses deux sœurs plus âgées.

Il me semble que le « théorème de caractérisation » suivant justifie pleinement ce respect. Son énoncé est simple, mais sa preuve ne l'est pas. Elle utilise quelques-uns des théorèmes les plus difficiles du vingtième siècle et dépasse largement le niveau de ce chapitre élémentaire. Dans l'appendice, j'essaierai néanmoins de donner quelques indications sur cette preuve.

Théorème. Soit (X, d) un espace métrique ayant les propriétés suivantes :

— (X, d) est une **surface** : tout point de X possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^2 ;

— (X, d) est **2-homogène** : si $d(x, y) = d(x', y')$, il existe une isométrie qui envoie x sur x' et y sur y' ;

— (X, d) est un **espace géodésique** : pour tout couple de points (x, y) il existe une courbe $\gamma : [0, \ell] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x, \gamma(\ell) = y$ et qui est une isométrie sur son image (de sorte que $d(x, y) = \ell$).

Alors (X, d) est isométrique à l'un des trois exemples suivants :

— le **plan euclidien** ;

— la **sphère** de rayon R dans l'espace euclidien, ou le quotient de cette sphère dans lequel on identifie les paires de points diamétralement opposés (espace elliptique de Klein) ;

— le **disque de Poincaré** muni d'un multiple constant de la distance hyperbolique.

Quelques commentaires sur les hypothèses de ce théorème.

La propriété d'être de dimension 2 est fondamentale. Nous évoquerons plus loin d'autres espaces métriques géodésiques 2-homogènes de dimension supérieure. Le fait d'être une surface n'est par contre pas très important : on pourrait par exemple supposer que X est localement compact et de dimension³ topologique 2.

L'homogénéité est bien sûr essentielle, mais la 2-homogénéité l'est beaucoup moins. Nous verrons que si l'on remplace la seconde hypothèse par la simple homogénéité, le théorème reste vrai à condition d'ajouter quelques exemples supplémentaires moins importants (le lecteur peut-il déjà les deviner ?).

Quant à la troisième hypothèse, elle n'est pas très importante non plus. Remarquons que si (X, d) est un espace métrique, $(X, \phi(d))$ est également un espace métrique, définissant la même topologie, tout aussi homogène que le premier, dès que $\phi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ est sous-additif, c'est-à-dire tel que $\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t)$. Si l'on supprime la troisième hypothèse, la conclusion du théorème est à peine affaiblie : l'espace (X, d) est alors obtenu par cette construction en partant de l'un des trois exemples précédents, euclidien, elliptique ou hyperbolique.

Nous reviendrons sur ces « détails » plus loin mais retenons le fait fondamental que *les géométries euclidienne, elliptique et hyperbolique sont essentiellement les seules surfaces métriques homogènes.*

À vrai dire ces trois géométries (X, d) sont beaucoup plus qu'homogènes. Si Y

³Un espace topologique est de dimension topologique inférieure ou égale à d s'il admet des recouvrements ouverts arbitrairement fins tels que pour chacun d'entre eux l'intersection de $(d+2)$ ouverts différents est vide. Par exemple, le produit de deux graphes est de dimension 2 mais n'est pas une surface en général.

est une partie quelconque de X et si $f : Y \rightarrow X$ est une isométrie sur son image, alors f est la restriction d'une isométrie globale de X . Si Y ne contient qu'un point, c'est l'homogénéité usuelle ; si Y contient deux points, c'est la 2-homogénéité, etc.

4 Des modèles, beaucoup de modèles

Des objets homogènes de dimension 2 se présentent naturellement dans de nombreuses situations. Le théorème précédent permet alors de les identifier à l'une des trois géométries. C'est ainsi que les *modèles* de la géométrie hyperbolique abondent dans la littérature. Même si le but de ce chapitre n'est pas de discuter l'aspect épistémologique des géométries non euclidiennes, remarquons l'usage courant du mot « modèle » dans ce contexte : tout se passe comme si cette géométrie avait une existence intrinsèque « idéale » que les mathématiciens essaient d'appréhender en en construisant quelques « illustrations ».

Je vais décrire ici quelques-uns de ces modèles, mais il y en a beaucoup d'autres (voir par exemple [2, 46, 67, 70]).

Le *premier* n'est qu'un changement de variables bien anodin : la transformation

$$z \mapsto \frac{1}{z - i}$$

envoie le disque \mathbf{D} sur le *demi-plan de Poincaré*⁴ $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

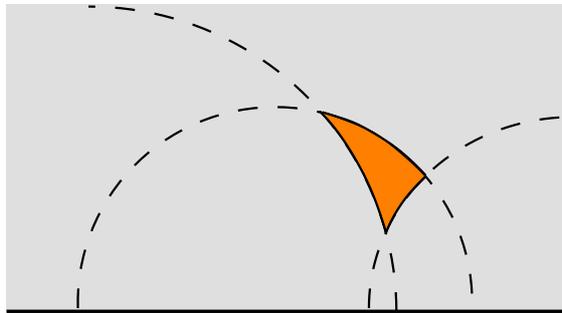


FIG. 2 – Triangle dans le demi-plan

Dans ce demi-plan, la métrique hyperbolique devient $|dz|/\text{Im } z$ et les géodésiques sont les demi-cercles (ou demi-droites) orthogonaux au bord (voir figure 2). Ce modèle présente l'avantage que le groupe d'isométries directes (c.-à-d. qui respectent l'orientation) s'exprime de manière plus simple :

$$z \in \mathbf{H} \mapsto \frac{Az + B}{Cz + D} \in \mathbf{H}$$

⁴On parle parfois de plan de Lobatchevski, ce qui pourrait bien sûr parfaitement se justifier, mais dans un ouvrage consacré à l'héritage de Poincaré...

avec A, B, C, D réels tels que $AD - BC = 1$. On reconnaît le groupe $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Avec les modèles du disque et du demi-plan, on peut déjà faire beaucoup de calculs. On peut facilement s'assurer que le cinquième postulat d'Euclide n'est pas valable dans cette géométrie : un point x extérieur à une géodésique γ étant donné, il existe une infinité de géodésiques qui passent par x et qui sont « parallèles » à γ , c'est-à-dire qui ne rencontrent pas γ (figure 3).

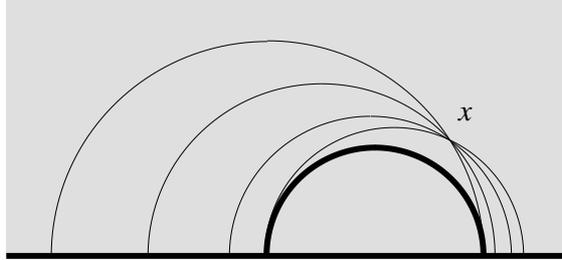


FIG. 3 – Le cinquième postulat

Voici un modèle moins connu. On considère l'ensemble \mathcal{E} des ellipses du plan euclidien, centrées à l'origine, bordant un domaine d'aire 1. On peut penser à une telle ellipse e comme la sphère unité d'une norme $\|\cdot\|_e$ dans \mathbf{R}^2 . Si e_1 et e_2 sont deux éléments de \mathcal{E} , on peut les comparer en posant

$$\text{dist}(e_1, e_2) = \log \sup_{v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|v\|_{e_1}}{\|v\|_{e_2}}.$$

Un instant de réflexion suffira au lecteur pour vérifier que :

- dist est bien une distance (géodésique?) ;
- $(\mathcal{E}, \text{dist})$ est une surface (car deux paramètres suffisent pour décrire un élément de \mathcal{E}) ;
- $(\mathcal{E}, \text{dist})$ est homogène (il n'y a qu'une ellipse à transformation affine près).

Un autre instant de réflexion le convaincra également que $(\mathcal{E}, \text{dist})$ n'est ni euclidien ni elliptique. C'est donc un modèle du disque de Poincaré!

Il reste à exhiber une isométrie explicite entre $(\mathcal{E}, \text{dist})$ et $(\mathbf{D}, \text{dist}_{\text{hyp}})$. Cela ne pose bien sûr aucun problème. À chaque point du disque de la forme $\rho \exp(i\phi)$, on associe l'ellipse d'ellipticité⁵ $\rho < 1$ dont le grand axe fait un angle $\phi/2$ avec l'axe réel. La vérification que cette bijection est bien une isométrie n'est qu'un exercice de routine.

Ce modèle laisse entrevoir une généralisation : l'espace des convexes symétriques de volume 1 dans \mathbf{R}^n est naturellement un espace métrique.

Un autre modèle : *la métrique de Hilbert* [43, Ap. I]. Soit C un ouvert borné convexe de \mathbf{R}^2 . Si x, y sont deux points de C , la droite (xy) les joignant rencontre C sur un intervalle ouvert $]u, v[$ (voir figure 4).

⁵L'ellipticité d'une ellipse d'axes $b \leq a$ est $(a - b)/(a + b)$. Ne pas confondre avec l'excentricité.

On pose

$$\text{dist}_{\text{Hilbert}}(x, y) = |\log[u : v : x : y]|$$

où l'on utilise cette fois le birapport des quatre points u, x, y, v de la droite réelle (auparavant, nous utilisons le birapport de quatre points de la droite complexe).

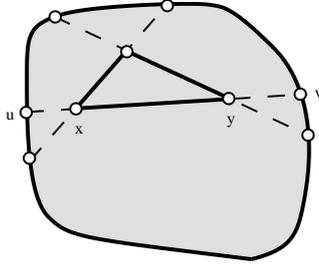


FIG. 4 – Distance de Hilbert

Ici encore, il n'est pas difficile de s'assurer que $\text{dist}_{\text{Hilbert}}$ est une distance géodésique (méditez la figure 4 en n'oubliant pas que le birapport est invariant par projection). Évidemment, cette distance est invariante par le groupe des transformations projectives qui préservent C . Dans le cas particulier où C est l'intérieur d'une ellipse, ce groupe agit transitivement sur C (exercice)⁶ et l'espace métrique ainsi obtenu est homogène. Nous avons ainsi trouvé une version du disque de Poincaré dans l'intérieur d'une ellipse, souvent appelée « modèle de Klein ». Trouver une isométrie entre $(C, \text{dist}_{\text{Hilbert}})$ et $(\mathbf{D}, \text{dist}_{\text{hyp}})$ est moins facile. Notez que les deux modèles sont très différents : les géodésiques dans le modèle de Klein sont les segments de droites alors que celles du disque de Poincaré sont des arcs de cercle. Il n'est pas clair *a priori* qu'il existe un homéomorphisme du disque qui transforme les segments de droites en des arcs de cercle. Voici une méthode : considérons les équations du second degré d'inconnue z de la forme $(1 - a)z^2 + 2bz + (1 + a) = 0$, avec a, b réels, de discriminant $4(a^2 + b^2 - 1)$. Ainsi, à chaque point $(a + ib)$ du disque unité, on peut associer une équation du second degré qui a une unique solution z_{a+ib} dans le demi-plan supérieur \mathbf{H} . Un exercice agréable consiste à montrer que la transformation $(a + ib) \in \mathbf{D} \mapsto z_{a+ib} \in \mathbf{H}$ réalise une isométrie entre la métrique de Klein et celle de Poincaré (vue dans le demi-plan).

La métrique de Hilbert est très intéressante (voir [42] pour de nombreux exemples et développements). Notons que l'ellipse n'est pas le seul convexe projectivement homogène : l'intérieur d'un triangle l'est également⁷. Quelle est la métrique de Hilbert dans ce cas ?

⁶On peut citer ici la jolie conséquence qu'en tire Hilbert : il est impossible de construire le centre d'un cercle à l'aide d'une règle seulement. En effet, s'il existait une telle construction, sa conjuguée par une transformation projective préservant le cercle construirait n'importe quel point du disque : contradiction !

⁷Ainsi l'argument précédent de Hilbert montre que le barycentre d'un triangle ne peut pas se construire avec une règle seulement ; plus surprenant que pour le centre d'un cercle ?

5 Tentatives de visualisation dans l'espace

Même si Riemann nous a enseigné qu'on peut (doit ?) faire de la géométrie sur une variété riemannienne abstraite, beaucoup d'entre nous aiment visualiser les surfaces comme plongées dans l'espace euclidien.

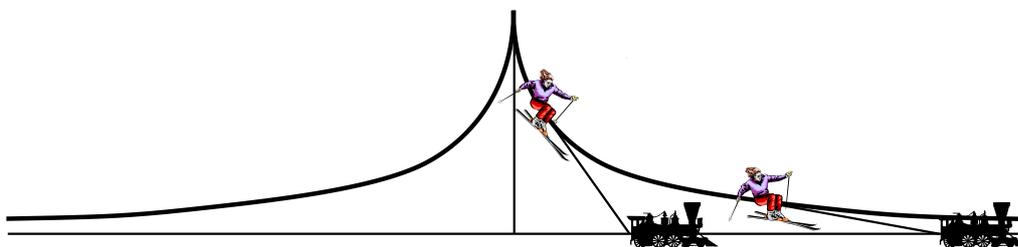


FIG. 5 – Tractrice

Une application différentiable $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^N$ est une *immersion isométrique* si pour tout vecteur tangent v au disque, on a $\|v\|_{\text{hyp}} = \|d\phi(v)\|_{\text{eucl}}$. Si de plus ϕ est injective, on parle de *plongement isométrique*. On prendra garde au fait que ceci n'entraîne pas que ϕ est une isométrie sur son image, mais seulement que la longueur hyperbolique d'une courbe tracée dans \mathbf{D} est égale à la longueur euclidienne de la courbe image par ϕ . D'ailleurs, il n'existe pas d'application $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^N$ qui soit une isométrie sur son image, car une telle application devrait envoyer une géodésique sur une droite et son image devrait donc être contenue dans un plan euclidien, ce qui est bien sûr impossible.

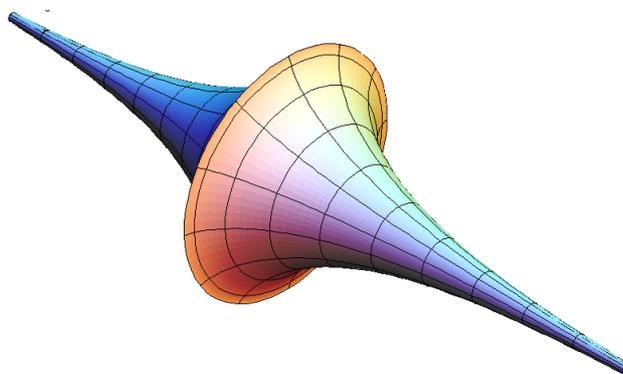


FIG. 6 – Pseudosphère

Très tôt, Beltrami a essayé de construire un plongement isométrique du disque hyperbolique dans \mathbf{R}^3 . Il y est parvenu *localement* par une méthode très simple. On considère une surface de révolution dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, z) est de la forme $r = F(z)$. Chercher F pour que la surface soit isométrique au disque de Poincaré revient à résoudre une équation différentielle ordinaire du second ordre. Parmi ses solutions, on trouve la *tractrice*, courbe suivie par un objet tiré par une corde de longueur constante et dont l'extrémité libre se déplace sur une droite

(figure 5). Ainsi, la tractrice de révolution, souvent appelée *pseudosphère* (figure 6), est un modèle local du disque de Poincaré [55].

Il se trouve cependant que cette tractrice présente un point singulier (de rebroussement) de sorte que la surface de révolution est également singulière le long d'un cercle de rebroussement. On n'obtient donc qu'un morceau de surface isométrique à un morceau du disque. La partie gauche de la figure 7 (extraite de [63]) montre un disque de petit rayon dans \mathbf{D} et son image isométrique dans la pseudosphère. La partie droite montre une partie de \mathbf{D} (d'aire 2π) isométrique au complémentaire d'une génératrice dans une demi-pseudosphère.

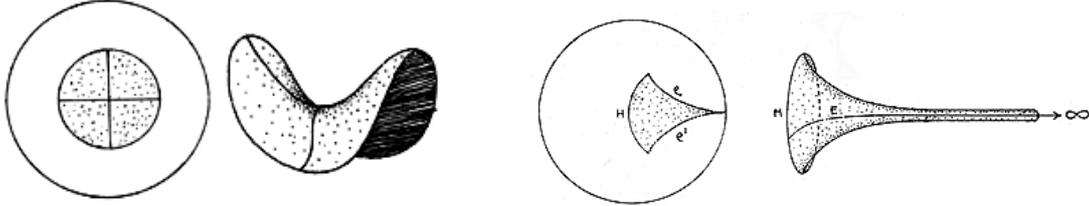


FIG. 7 – Pseudosphère et disque

D'ailleurs, on ne peut pas échapper à ces singularités : Hilbert a démontré⁸ qu'il n'existe pas de plongement isométrique de classe C^2 du disque de Poincaré dans l'espace euclidien de dimension 3. La démonstration est astucieuse : elle consiste en une analyse détaillée des deux familles de lignes asymptotiques⁹ sur une surface de \mathbf{R}^3 localement isométrique au disque. Ces courbes constituent un *réseau de Tchebychev*, notion introduite pour un problème très concret dans un article intitulé *Sur la coupe des vêtements* [68]. On considère un tissu dans le plan formé d'une trame de fils entrecroisés

$$x = i/N, \quad y = j/N, \quad i, j = 0, \dots, N \quad (\text{avec } N \text{ grand}).$$

On déforme ensuite le tissu dans l'espace de façon que les côtés de chaque maille, formant initialement un carré, restent de longueur constante. Autrement dit, on considère les surfaces « habillées » par le tissu $u : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ telles que $\partial u / \partial x$ et $\partial u / \partial y$ soient partout de norme 1 (mais pas nécessairement orthogonaux).

Il se trouve que les lignes asymptotiques d'une surface localement isométrique au disque de Poincaré habillent cette surface dans le sens précédent (voir figure 8). C'est le point de départ de la preuve de Hilbert. Pour la suite (intéressante) voir [20, 28, 43]. Il est remarquable de constater que ce problème de Tchebychev continue à se développer ; outre le fait qu'il s'est avéré intimement lié aux équations aux dérivées

⁸À vrai dire, Hilbert supposait le plongement analytique et ce n'est que bien plus tard que la version C^2 a été démontrée.

⁹Soit m un point sur une surface lisse S plongée dans \mathbf{R}^3 . Notons Π le plan tangent en m et N la droite normale. Localement, S est le graphe d'une application u d'un voisinage de m dans Π vers N . La différentielle seconde de u en m est la *seconde forme quadratique fondamentale* au point m . Les directions isotropes de cette forme quadratique, si elles existent, sont les *directions asymptotiques* et les courbes partout tangentes à l'une de ces directions sont les *lignes asymptotiques* de S [20].

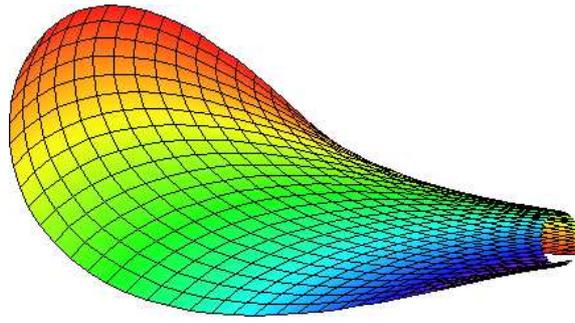


FIG. 8 – Habillage d’une partie de la pseudosphère

partielles dites de sine-Gordon, on utilise ce type d’idées dans la construction de certains matériaux d’aujourd’hui (voir par exemple [61]).

La preuve du théorème de Hilbert ne peut pas être très élémentaire car ce théorème est faux en classe C^1 . Il résulte d’un théorème de Nash que le disque de Poincaré peut se plonger isométriquement *en classe C^1* dans l’espace \mathbf{R}^3 [35, 52].

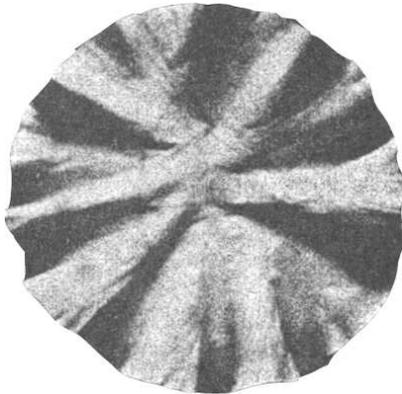


FIG. 9 – Modèle de Beltrami [16]



FIG. 10 – Origami hyperbolique [67]

À quoi ressemblent ces plongements ? Il est très utile d’en construire des modèles concrets, par exemple en papier, comme l’a fait Beltrami dès le dix-neuvième siècle (figure 9). Prenez un grand nombre de triangles équilatéraux en carton, disons de quelques centimètres de côté, collez-les bord à bord en prenant soin que chaque sommet soit entouré par 7 triangles : vous obtenez une approximation d’un morceau d’un disque de Poincaré (figure 10). Notez qu’en remplaçant 7 par 6, vous construisez un plan euclidien pavé de la manière habituelle par des triangles équilatéraux. En utilisant 5 triangles autour de chaque sommet, on construit une sphère, pavée comme un dodécaèdre. (Que se passe-t-il avec 4, 3, 2 triangles, avec 8, 9, etc ?).

Le site internet remarquable [67] propose une introduction visuelle à la géométrie hyperbolique. Un autre site internet [69] contient une exposition virtuelle visant à donner une intuition de ce type d’objets. On y donne même des instructions pour réaliser un disque de Poincaré au crochet (figure 11) !



FIG. 11 – Crochet hyperbolique [69]

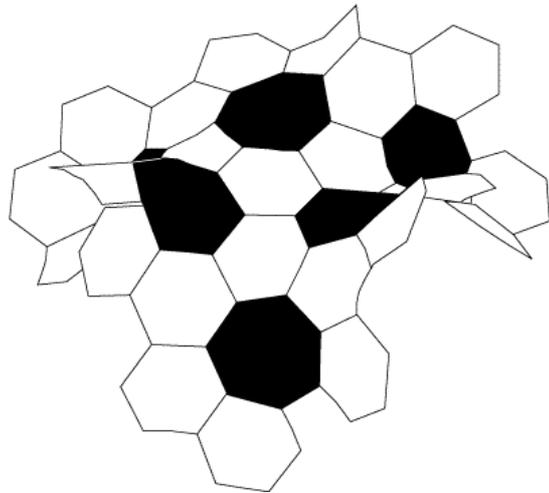


FIG. 12 – Foot hyperbolique [69]

Dans [58], les auteurs n'hésitent pas à évoquer les « jupes à godets » et comparent la pseudosphère à un lis :



FIG. 13 – Jupe à godets



FIG. 14 – Lis Calla

Bien sûr, on dispose de théorèmes généraux de plongements isométriques de variétés riemanniennes de classe C^∞ dans des espaces euclidiens de dimension suffisante. D'après Gromov [35] (généralisant des travaux de Nash), une variété riemannienne de dimension k se plonge isométriquement en classe C^∞ dans un espace euclidien de dimension $(k+2)(k+3)/2$. En ce qui concerne l'espace hyperbolique de dimension k (dont nous n'avons discuté ici que la version de dimension 2), il existe une immersion isométrique de classe C^∞ (peut-être non injective) dans un espace euclidien de dimension $(5k-5)$. En fait, Blanuša a construit en 1955 un plongement *explicite* de classe C^∞ du disque de Poincaré dans \mathbf{R}^6 [14]. Le disque peut-il être immergé isométriquement dans \mathbf{R}^4 ? Cela semble une question ouverte. Gromov démontre

cependant que toute partie compacte du disque peut s'immerger isométriquement dans n'importe quel¹⁰ ouvert (non vide!) de \mathbf{R}^4 .

De tels plongements sont en fait de peu d'utilité, car ils ne peuvent pas être naturels. Un plongement *naturel* serait un plongement $i : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^N$ tel que pour toute isométrie f de \mathbf{D} , il existe une isométrie \bar{f} de \mathbf{R}^N telle que $i \circ f = \bar{f} \circ i$. Un tel plongement ne peut pas exister pour des raisons purement algébriques : il n'existe pas d'homomorphisme non trivial du groupe des isométries (directes) du disque vers le groupe des isométries d'un espace euclidien (exercice, pas trop facile!).

Il existe en revanche des plongements naturels en dimension *infinie*. Je montrerai plus loin une construction explicite d'un plongement $i : \mathbf{D} \rightarrow H$, où H est un espace de Hilbert, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\text{dist}_{\text{hyp}}(x, y) = \|i(x) - i(y)\|^2$, pour tous x, y de \mathbf{D} ;
- i est naturel dans le sens précédent.

6 Un peu de géométrie des triangles

Le théorème le plus célèbre de géométrie hyperbolique est dû à Gauß [31] :

Théorème. *L'aire d'un triangle dont les angles sont α, β, γ est $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.*

Avant d'esquisser deux preuves de ce théorème (il y en a beaucoup d'autres), il faut expliquer les mots « triangle, angle, aire ». Le disque de Poincaré est une variété riemannienne dont la métrique $ds = |dz|/(1 - |z|^2)$ est *conforme* à la métrique euclidienne $|dz|$; cela signifie que les angles entre deux vecteurs tangents en un même point du disque sont les mêmes selon qu'on les calcule pour ds ou pour $|dz|$. L'élément d'aire hyperbolique est donné par $d \text{aire}_{\text{hyp}} = (1 - |z|^2)^{-2} d \text{aire}_{\text{eucl}}$.

Un triangle doit bien sûr être compris comme étant défini par trois points et limité par trois segments géodésiques ; il a donc trois angles et une aire.

Il est facile de s'assurer que la somme des angles d'un triangle est bien inférieure à π (placez l'un des sommets au centre du disque et comparez les angles du triangle hyperbolique et du triangle euclidien de mêmes sommets).

La première esquisse de preuve du théorème nécessiterait peut-être quelques développements pour la confirmer, mais elle est assez intuitive. Si P est un polygone

¹⁰On pourrait croire qu'il est nécessaire que le diamètre de l'ouvert soit supérieur à celui du compact mais il n'en est rien : un plongement isométrique n'est pas une isométrie ! Par exemple, un plongement isométrique de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^3 n'est autre qu'une courbe plongée, paramétrée par son abscisse curviligne ; il n'est pas difficile d'« embobiner » une telle courbe dans une boule arbitrairement petite.

géodésique à n côtés et d'angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on pose

$$\mathcal{A}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

On remarque alors que :

— si on découpe P en deux polygones P_1, P_2 le long d'une géodésique, on a évidemment $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2)$ (voir figure 15) ;

— si P est un triangle de petit diamètre, $\mathcal{A}(P)$ est petit (« car » dans un petit voisinage, une métrique riemannienne est « presque » euclidienne : c'est un point qu'il faudrait préciser) ;

— \mathcal{A} est bien sûr invariant par isométries.

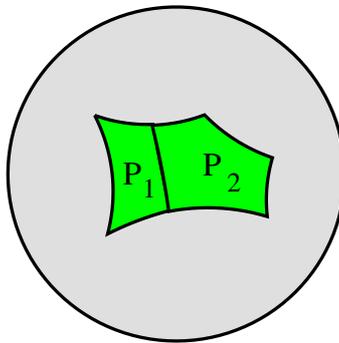


FIG. 15 – Découpage d'un polygone

On peut alors mimer la construction classique de la mesure de Lebesgue dans le plan. On utilise $\mathcal{A}(P)$ comme mesure d'un polygone et on définit la mesure d'un borélien en utilisant des recouvrements par des polygones. Ainsi, \mathcal{A} définit une mesure sur le disque invariante par isométries. L'homogénéité montre donc que \mathcal{A} est un multiple constant de l'aire hyperbolique. Nous avons donc « établi » que

$$\text{aire}(P) = c \left((n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

et il reste à déterminer la constante c . Nous ne le ferons pas, car ce calcul n'a pas d'intérêt particulier ; mais surtout parce qu'en multipliant la métrique de Poincaré par une constante λ strictement positive, la constante c est divisée par λ^2 . En fait, le choix de la constante dans la définition de la métrique de Poincaré est surtout dicté par le désir de normaliser la constante c à la valeur 1, ce qui est possible puisque nous savons déjà que c est strictement positive.

Voici une deuxième preuve, plus convaincante. Trois points sur le bord de \mathbf{D} déterminent un *triangle idéal* dont les « sommets » sont « à l'infini » (voir figure 16). Ces triangles idéaux, bien que non bornés, sont d'aire bornée. Cela résulte du fait

que deux géodésiques qui convergent vers le même point du bord se rapprochent à une vitesse exponentielle (au sens hyperbolique bien sûr) de sorte que l'intégrale d'aire converge. Puisque le groupe des isométries du disque opère transitivement sur les triplets de points distincts du bord (exercice), tous ces triangles idéaux ont la même aire. Il se trouve que cette aire vaut π (calcul!).

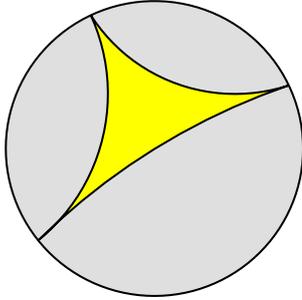


FIG. 16 – Triangle idéal

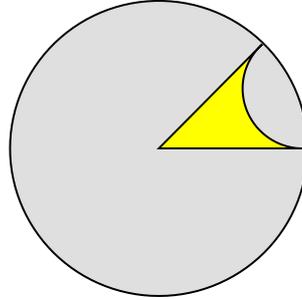


FIG. 17 – $T(\alpha)$

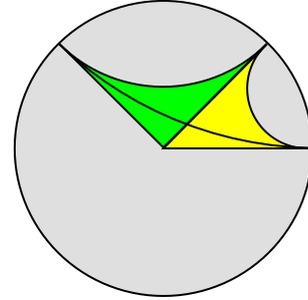


FIG. 18 – $T(\alpha + \beta)$

Considérons maintenant le triangle $T(\alpha)$ dont un angle est $\alpha \in [0, \pi]$ et dont les deux autres sommets sont à l'infini (figure 17).

La figure 18 montre que

$$\text{aire}(T(\alpha + \beta)) = \text{aire}(T(\alpha)) + \text{aire}(T(\beta)) - \pi$$

d'où il résulte que $F(\alpha) = \pi - \text{aire}(T(\alpha))$ vérifie $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$. Puisque F est continue, il existe une constante c telle que $F(\alpha) = c\alpha$ et comme $\text{aire}(T(\pi)) = 0$, on obtient $c = 1$ et $\text{aire}(T(\alpha)) = \pi - \alpha$.

Considérons finalement un « vrai » triangle $T(\alpha, \beta, \gamma)$ dont les trois sommets sont à « distance finie » (figure 19). En prolongeant les côtés jusqu'à l'infini, on obtient un hexagone idéal.

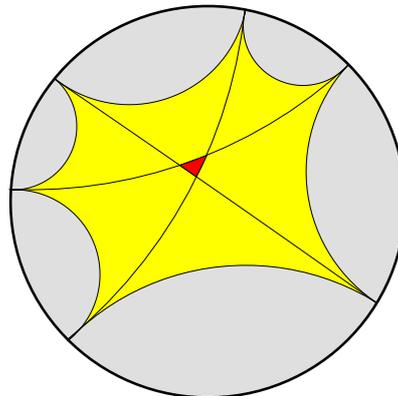


FIG. 19 – Hexagone idéal

Chaque sommet du triangle détermine deux copies isométriques de $T(\alpha)$, $T(\beta)$, $T(\gamma)$ respectivement, dont l'une contient $T(\alpha, \beta, \gamma)$. L'aire de l'hexagone est donc

$$2[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)] - 2 \text{ aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)).$$

Comme par ailleurs cet hexagone se découpe évidemment en quatre triangles idéaux, son aire vaut 4π . On obtient bien comme annoncé

$$\text{aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Je propose un « exercice d'application » pour terminer ce paragraphe. Euclide a (presque) montré dans les *Éléments* que si deux polygones P et Q du plan euclidien ont la même aire, on peut découper chacun d'entre eux en un nombre fini de polygones P_1, \dots, P_n et Q_1, \dots, Q_n de telle sorte que pour tout i les « morceaux » P_i et Q_i soient isométriques [30, livre VI]. Montrez que la même chose est vraie dans le disque de Poincaré. Cette propriété n'est plus vraie en dimension supérieure et mène à des développements fascinants autour du troisième problème de Hilbert : deux polyèdres de même volume dans l'espace euclidien peuvent-ils être découpés en morceaux isométriques ? Voir [15] pour une introduction élémentaire et [21] pour plus d'information.

7 Le disque est un arbre

Il résulte de la formule de Gauß que l'aire d'un triangle est bornée par π . Étrange géométrie dans laquelle les triangles peuvent être arbitrairement grands en taille mais dont l'aire est bornée !

L'aire hyperbolique d'un disque de rayon ρ est facile à calculer :

$$A(\rho) = \int_0^{\text{th} \rho} \frac{2\pi t}{(1-t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}(\text{ch} \rho - 1).$$

On constate donc que cette aire tend vers l'infini quand le rayon tend vers l'infini (exponentiellement rapidement — nous reviendrons sur ce point).

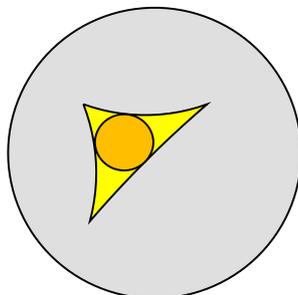


FIG. 20 – Cercle inscrit

Il en résulte que le rayon ρ du cercle inscrit dans un triangle est *borné* indépendamment du triangle puisque $\frac{\pi}{2}(\operatorname{ch} \rho - 1) \leq \pi$ entraîne $\rho \leq 1$ (figure 20). Par conséquent, en géométrie hyperbolique, les triangles sont *fins* : chaque côté n'est pas très éloigné de la réunion des deux autres.

Définition. On dit qu'un espace métrique géodésique (X, d) est δ -hyperbolique si, pour tout triplet de points (x, y, z) et tout choix de géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ les connectant deux à deux, tout point de $[x, y]$ est à une distance inférieure à δ d'un point de $[x, z]$ ou de $[z, y]$.

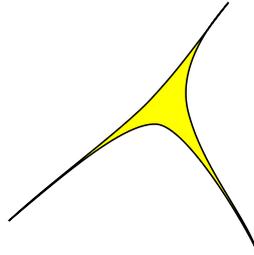


FIG. 21 – Triangle fin

C'est Gromov qui a extrait cette propriété de la géométrie du disque de Poincaré et qui a reconnu que cette définition anodine capture l'essentiel de cette géométrie [36]. Un espace métrique (X, d) borné est bien sûr δ -hyperbolique avec $\delta = \operatorname{diam}(X, d)$, mais il est évident que ce cas particulier est sans intérêt. La théorie n'est intéressante que pour les espaces non bornés. Nous avons vu par exemple que le disque de Poincaré est δ -hyperbolique avec $\delta = 2$. De nombreux espaces métriques sont δ -hyperboliques et sont donc les cousins du disque. À regret, je resterai cependant dans le disque !

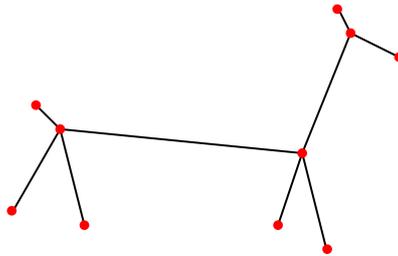


FIG. 22 – Arbre métrique

Une autre manière d'exprimer la δ -hyperbolicité du disque de Poincaré consiste à dire que la réunion $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ des trois côtés d'un triangle de sommets x, y, z est à distance bornée de la réunion $[x, o] \cup [y, o] \cup [z, o]$ où o désigne le centre du cercle inscrit : la réunion des trois côtés est proche d'un Y (voir figure 21). Il se trouve que cette propriété se généralise à toute partie finie, qui peut être approchée par un arbre¹¹ fini, avec une erreur qui ne dépend que du nombre de points.

¹¹Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Précisons cet énoncé. Si on choisit une longueur arbitraire pour chaque arête d'un arbre fini, on peut construire une réalisation métrique de l'arbre : on attache des segments euclidiens ayant les longueurs choisies en leurs extrémités en suivant la combinatoire de l'arbre. Par définition, la distance entre deux points est la longueur du plus petit chemin les connectant. On appelle *arbre métrique* un espace métrique géodésique construit de cette façon (voir figure 22).

Proposition. *Considérons n points x_1, \dots, x_n d'un espace métrique δ -hyperbolique (X, d) . Alors, il existe un arbre métrique (A, d_A) et n points x'_1, \dots, x'_n de A tels que*

$$d(x_i, x_j) - 100 \delta \log n \leq d_A(x'_i, x'_j) \leq d(x_i, x_j)$$

pour tous i, j .

Sur la photographie d'une « salade hyperbolique », on voit bien les nervures arborescentes qui approchent l'ensemble.



FIG. 23 – Salade hyperbolique

J'insiste encore sur le fait que le « défaut d'isométrie » $100 \delta \log n$ dépend (un peu) de n mais pas des points x_i qui peuvent être très éloignés les uns des autres.

La démonstration de cette proposition n'est pas difficile, mais astucieuse. Le lecteur pourra commencer par essayer de la construire par lui-même puis, en cas d'échec, il ira consulter [32, 36] pour apprécier la virtuosité avec laquelle Gromov manipule l'inégalité triangulaire !

Ainsi, si nous voulons dessiner dans le disque de Poincaré des figures formées d'un grand nombre de points très éloignés les uns des autres, le résultat est proche d'un arbre. Très souvent, cela donne une bonne intuition de la géométrie hyperbolique (figure 24).



FIG. 24 – Cactus approchant la géométrie du disque

Si (X, d) est un espace métrique δ -hyperbolique, on peut diviser la distance par une (grande) constante $k > 0$ et poser $d_k = d/k$. Cela revient à regarder l'espace (X, d) « de loin » et l'espace métrique qui en résulte est bien sûr (δ/k) -hyperbolique. Si k tend vers l'infini, le défaut $100 \frac{\delta}{k} \log n$ d'approximation par les arbres tend vers 0 (n étant fixé), c'est-à-dire que « l'espace (X, d_k) tend vers un arbre ». On peut donner un sens précis à la phrase précédente. Je ne le ferai cependant pas, car ceci nous conduirait à discuter de topologie de Hausdorff-Gromov sur l'espace des espaces métriques, d'ultrafiltres, etc. Le lecteur intéressé pourra consulter [38].

Quoi qu'il en soit, retenons que *le disque de Poincaré, vu de loin, ressemble à un arbre.*

8 Quelques exemples d'intuitions dendrologiques

La géométrie dendrologique¹² est souvent intuitive. Nous allons voir sur quelques exemples simples comment elle peut guider notre compréhension de la géométrie hyperbolique.

Le théorème de Pythagore

Comparons les triangles rectangles du plan euclidien, d'un arbre et du disque.

Dire que le triangle ABC est « rectangle en A », c'est dire que A est le pied de la hauteur abaissée de C sur la droite (AB) , ou encore que A est le point le plus proche de C situé sur AB . En géométrie dendrologique, les triangles rectangles sont donc ceux pour lesquels le plus court chemin de C à B passe par A , autrement dit ceux pour lesquels $BC = AB + AC$ (figure 25). Dans les arbres, le théorème de Pythagore a « perdu son carré » : l'hypoténuse est la somme des côtés. Qu'en est-il pour le disque de Poincaré ? On trouve dans les livres le théorème de Pythagore

¹²DENDROLOGIE *n.f.*—1641 ; de *dendro* et *-logie* ◊ DIDACT. Partie de la botanique qui étudie les arbres. (Le Petit Robert.)

hyperbolique :

$$\operatorname{ch} BC = \operatorname{ch} AB \cdot \operatorname{ch} AC.$$

Si l'on tient compte du fait que $\operatorname{ch} x \simeq \exp(x)/2$ (pour x réel grand), on trouve que $BC \simeq AB + AC$ comme notre intuition dendrologique nous l'avait suggéré.

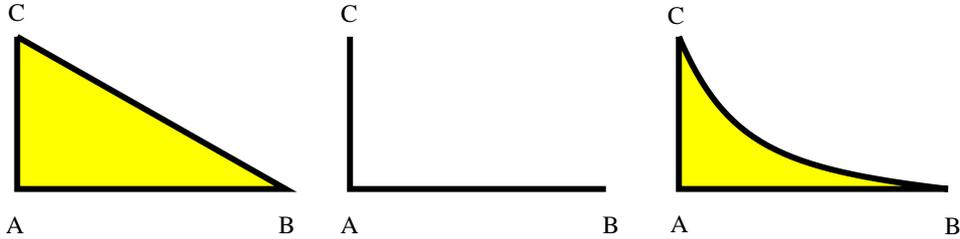


FIG. 25 – Triangles rectangles

La croissance et la transience

Puisque le disque de Poincaré est homogène, nous devons le comparer à un arbre homogène. Considérons par exemple l'arbre homogène infini dont tous les sommets sont de valence 3 (figure 26).

La boule centrée en un point x_0 et de rayon n contient $3 \cdot 2^{n-1}$ sommets. Nous retrouvons ce que nous avons déjà rencontré : le volume d'une boule croît exponentiellement en fonction de son rayon.

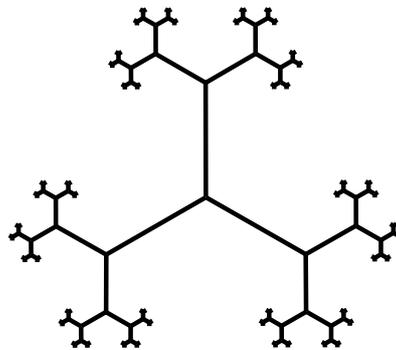


FIG. 26 – Arbre homogène

Considérons maintenant une *marche aléatoire* dans l'arbre. Un point part du sommet x_0 et saute aléatoirement chaque seconde sur l'un des trois sommets qui lui sont voisins, de manière équiprobable. Notons $d(n)$ la distance entre le point x_n à l'instant n et son point de départ x_0 . Si $d(n) \neq 0$, alors $d(n+1) = d(n) + 1$ avec une probabilité $2/3$ et $d(n+1) = d(n) - 1$ avec une probabilité $1/3$. En revanche, si $d(n) = 0$ on a $d(n+1) = 1$. Il y a donc une tendance nette à fuir vers l'infini. Il n'est pas difficile d'en déduire que presque sûrement :

- $d(n)/n$ tend vers $1/3$ (en particulier $d(n)$ tend vers l'infini) ;
- la géodésique $[x_0, x_n]$ tend vers une géodésique infinie $\gamma = [x_0, x_\infty[$ et la distance entre x_n et γ est bornée par $Ct \cdot \log n$.

La même chose se passe dans le disque de Poincaré pour le *mouvement brownien*. Pour toute variété riemannienne M et pour tout point x_0 , il existe une mesure de probabilité, dite *mesure de Wiener*, sur l'espace des chemins $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow M$ issus de x_0 (voir par exemple [26, 53]). Pour le disque de Poincaré :

- presque toute courbe $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{D}$ issue d'un point converge vers un point du bord $\omega(\gamma) \in \partial\mathbf{D}$;
- presque sûrement la distance hyperbolique entre $\gamma(t)$ et la géodésique $[x_0, \omega(\gamma)[$ est bornée par $Ct \cdot \log t$.

La preuve est bien sûr plus difficile que dans le cas des arbres mais au fond, c'est la même...

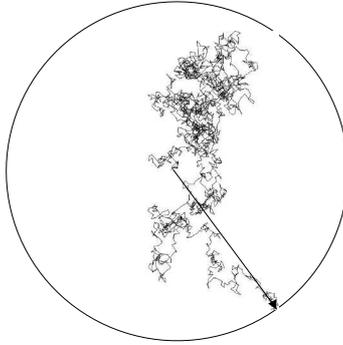


FIG. 27 – Trajectoire brownienne dans le disque

Le fait qu'une marche aléatoire fuie vers l'infini peut aussi s'exprimer en termes de comportement des solutions de l'équation de la chaleur lorsque le temps tend vers l'infini. D. Sullivan m'a expliqué qu'il est presque impossible de chauffer les maisons dans le disque de Poincaré, car on ne peut empêcher la chaleur de s'échapper vers l'infini !

Les quasi-géodésiques

L'un des attraits de la géométrie hyperbolique est sa robustesse. Nous allons l'illustrer ici dans un exemple simple mais fondamental.

Une courbe $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow X$ dans un espace métrique (X, d) est une *quasi-géodésique* s'il existe a et $b > 0$ tels que, pour tous t_1, t_2 , on ait :

$$a^{-1}|t_1 - t_2| - b \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq a|t_1 - t_2| + b.$$

Théorème. *Toute quasi-géodésique d'un espace métrique δ -hyperbolique est à une distance bornée d'une géodésique.*

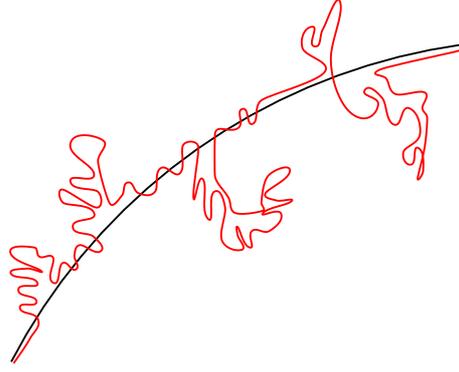


FIG. 28 – Quasi-géodésique

L'idée de la démonstration consiste d'abord à étudier le cas d'un arbre. Une quasi-géodésique dans un arbre peut repasser plusieurs fois par le même sommet, mais ces événements ne peuvent se passer en des temps très différents ($\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ entraîne $|t_1 - t_2| \leq ab$). Il en résulte qu'une quasi-géodésique dans un arbre consiste en fait en une géodésique sur laquelle on greffe quelques allers-retours de taille bornée (figure 28). Le cas général n'est qu'une adaptation du cas particulier de l'arbre (voir par exemple [32]).

Voici un exemple d'application. Considérons une métrique riemannienne g sur le disque qui est en rapport borné avec la métrique hyperbolique. Cela signifie qu'il existe une constante $Ct > 1$ telle que pour tout vecteur tangent v , le rapport entre la g -norme et la norme hyperbolique de v est compris entre Ct^{-1} et Ct . Alors, une géodésique $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{D}$ pour la métrique g est évidemment une quasi-géodésique pour la métrique hyperbolique : elle reste donc à distance bornée d'une géodésique de la métrique hyperbolique. Ceci permet d'associer de manière canonique une géodésique de Poincaré à une géodésique¹³ de g . C'est le point de départ du phénomène de la *stabilité structurelle* du flot géodésique des variétés compactes à courbure négative : le comportement qualitatif des géodésiques ne dépend pas (trop) du choix de la métrique. Il s'agit d'une longue histoire qui nous entraînerait trop loin de la quasi-géodésique que nous essayons de suivre dans ce chapitre et qui nous conduirait de Hadamard à Gromov en passant par Anosov [5, 34, 41]...

Sensibilité aux conditions initiales

Considérons deux géodésiques $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ dans le plan euclidien (c.-à-d. deux demi-droites). Soit $\varepsilon > 0$ (petit) et $T > 0$ (grand). Supposons que γ_1 et γ_2 coïncident en $t = 0$ et soient proches au temps T , c'est-à-dire

$$\text{dist}_{\text{eucl}}(\gamma_1(T), \gamma_2(T)) \leq \varepsilon.$$

Alors, le théorème de Thalès affirme que

$$\text{dist}_{\text{eucl}}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T)) \leq 2\varepsilon.$$

¹³Dans ce texte, une géodésique est par définition une courbe qui minimise la longueur entre deux points quelconques, même éloignés. On parle d'ordinaire de *géodésiques minimisantes*.

Autrement dit, après un temps double, la distance entre $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ n'a fait que doubler : elle est donc restée petite (figure 29-a).

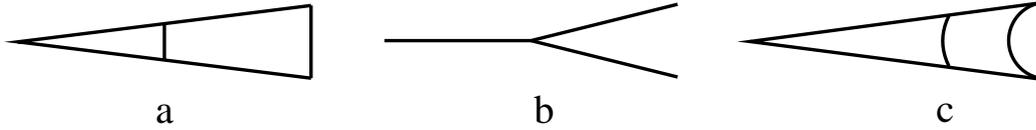


FIG. 29 – Théorème de Thalès

Considérons maintenant le cas d'un arbre. La figure 29-b montre deux géodésiques issues du même point qui coïncident jusqu'au temps T et qui divergent ensuite, dans le sens où $\text{dist}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T)) = 2T$. Le fait que γ_1 et γ_2 restent proches sur $[0, T]$ (et même coïncident) n'entraîne donc aucune estimation sur $\text{dist}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T))$ (autre que l'inégalité triangulaire). Pas de théorème de Thalès en géométrie dendrologique !

Le même phénomène se produit dans le disque. Considérons deux géodésiques γ_1 et $\gamma_2 : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{D}$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\text{dist}_{\text{hyp}}(\gamma_1(T), \gamma_2(T)) = \varepsilon$. Il est possible de calculer explicitement $F(\varepsilon, T) = \text{dist}_{\text{hyp}}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T))$ grâce aux formules de trigonométrie hyperbolique (voir [2, 23]). On trouve $F(\varepsilon, T) = 2 \text{Argsh}(2 \text{sh} \frac{\varepsilon}{2} \text{ch} T)$. Si ε et T sont petits, on retrouve Thalès : $F(\varepsilon, T) \simeq 2\varepsilon$. Par contre, si $\varepsilon > 0$ est fixé et T tend vers l'infini, $F(\varepsilon, T) \simeq 2T$, comme pour un arbre (figure 29-c).

Il s'agit de l'exemple le plus simple de *sensibilité aux conditions initiales*. Si on dispose d'une connaissance précise d'une géodésique sur un intervalle $[0, T]$, il est impossible d'en déduire une connaissance précise sur l'intervalle $[T, 2T]$. Le futur semble avoir oublié le passé. C'est l'une des idées les plus importantes qui se cachent derrière le concept de *chaos déterministe*. Les géodésiques du disque sont déterministes dans le sens où elles sont entièrement déterminées par leur position et leur vitesse initiale mais elles ont un comportement qui est imprévisible en pratique [8, 25, 33, 41, 65].

9 Le disque est une courbe

Le disque unité dans \mathbf{C} est de dimension *complexe* 1 et les isométries directes $f_{\alpha,a}$ que nous avons rencontrées plus haut sont *holomorphes* en une variable complexe. Il se trouve d'une part que ces $f_{\alpha,a}$ sont les *seules* isométries directes et d'autre part que ce sont également les *seules* bijections holomorphes du disque. Ces deux assertions sont élémentaires mais importantes : vérifions-les.

Soit f une isométrie directe du disque de Poincaré. En composant f avec un $f_{\alpha,a}$ convenable, on peut supposer que f laisse l'origine fixe et que sa différentielle en ce point est l'identité. Étant une isométrie, f est aussi l'identité sur la géodésique issue de 0 avec une direction initiale quelconque v . Par conséquent, f est l'identité partout et l'isométrie initiale était bien de la forme $f_{\alpha,a}$.

Soit f une bijection holomorphe du disque. En composant f avec un $f_{\alpha,a}$ convenable, on peut supposer que f laisse l'origine fixe. Le lemme classique de Schwarz

affirme alors que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout point z du disque [3, 4, 51, 64]. En considérant l'inverse f^{-1} , on obtient qu'en fait $|f(z)| = |z|$ et que f est une rotation. La bijection holomorphe initiale était bien de la forme $f_{\alpha,a}$.

Ainsi, le disque \mathbf{D} peut être muni d'une structure métrique (orientée) et d'une structure holomorphe dont les groupes d'automorphismes coïncident. C'est pour cette raison que les relations entre géométrie hyperbolique (en dimension réelle 2) et géométrie holomorphe (en dimension complexe 1) sont si étroites.

L'omniprésence du disque de Poincaré comme espace métrique a un pendant holomorphe : il s'agit du fameux *théorème d'uniformisation*, probablement l'un des plus beaux bijoux mathématiques découverts au dix-neuvième siècle, résultat des efforts de Gauß, Riemann, Schwarz, Klein, Koebe et Poincaré.

Une *surface de Riemann* est une variété holomorphe de dimension 1. Autrement dit, il s'agit d'un espace topologique recouvert par des ouverts « de cartes » homéomorphes à des ouverts de \mathbf{C} de sorte que les changements de cartes soient holomorphes. Les surfaces de Riemann sont des « courbes » puisqu'elles sont de dimension complexe 1, mais ce sont des surfaces de dimension réelle 2. C'est cette dualité courbe-surface qui fait le sel de la théorie. La littérature sur ce sujet est immense, mais je recommande particulièrement [18, 22, 40, 48, 62], entre autres...

Une surface de Riemann est *simplement connexe* si elle est connexe et si toute courbe fermée peut être continûment déformée sur un point.

Théorème d'uniformisation. *Soit S une surface de Riemann simplement connexe. Alors, S est biholomorphiquement équivalente au plan complexe \mathbf{C} , à la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ ou au disque de Poincaré \mathbf{D} .*

Il faut soigneusement distinguer ce théorème de son cas particulier enseigné en licence qui affirme qu'un ouvert simplement connexe du plan complexe (non vide et différent de \mathbf{C}) est biholomorphiquement équivalent au disque. Le théorème d'uniformisation traite d'une surface de Riemann abstraite qui n'est pas *a priori* plongeable dans le plan. On peut en particulier l'appliquer au revêtement universel d'une surface de Riemann quelconque, par exemple compacte (c'est-à-dire une courbe algébrique d'après Riemann). Pour une preuve, on pourra consulter par exemple [40]. Il s'agit de l'une des motivations initiales de Poincaré : une surface de Riemann compacte de genre supérieur ou égal à 2 peut être identifiée au quotient du disque par un *groupe fuchsien*, groupe discret d'isométries.

La figure 30 représente deux illustrations classiques de ce type de groupes, la seconde étant les « anges et démons » d'Escher [17, 24, 29]. À regret, je ne discuterai pas de ces groupes qui le mériteraient pourtant. Voir par exemple [24, 54, 57, 70].

Le lien entre structure holomorphe et métrique hyperbolique est résumé par le *lemme de Schwarz* exprimé de manière intrinsèque par Pick. Toute fonction holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ contracte la distance hyperbolique : pour tout (z_1, z_2) , on a $\text{dist}_{\text{hyp}}(f(z_1), f(z_2)) \leq \text{dist}_{\text{hyp}}(z_1, z_2)$. À vrai dire, la contribution de Pick ne s'est pas limitée à exprimer le lemme de Schwarz de manière invariante. Il a résolu un

problème difficile « d'interpolation holomorphe » : si z_1, \dots, z_n et w_1, \dots, w_n sont deux n -uplets de points du disque \mathbf{D} , à quelle condition existe-t-il une application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ telle que $f(z_i) = w_i$ pour tout i ? La condition nécessaire et suffisante est que la matrice hermitienne de coefficients $\frac{1-w_i\bar{w}_j}{1-z_i\bar{z}_j}$ soit positive ou nulle. La nécessité de la condition n'est pas très difficile à voir mais sa suffisance est par contre bien délicate (voir par exemple [1]).



FIG. 30 – Deux groupes fuchsien

Une fonction *harmonique* sur le disque est une fonction $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ qui est la partie réelle d'une fonction holomorphe [3, 64, 71]. Une telle fonction est caractérisée par le fait que sa valeur en un point est la moyenne de ses valeurs sur un cercle centré en ce point. L'analogue dendrologique est une fonction réelle définie sur les sommets d'un arbre dont la valeur en chaque sommet est la moyenne arithmétique de ses valeurs sur les sommets voisins. Prenons par exemple une fonction harmonique h sur l'arbre infini A dont tous les sommets sont de valence 3. Supposons maintenant que h soit à valeurs positives. Évidemment, si un nombre positif a est la moyenne de trois nombres positifs, chacun d'entre eux est au plus égal à $3a$. En d'autres termes, si $h : A \rightarrow \mathbf{R}^+$ est harmonique et si x et y sont deux sommets voisins, on a $1/3 \leq h(x)/h(y) \leq 3$. Nous venons de démontrer la version dendrologique du *principe de Harnack* : si $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^+$ est harmonique, la norme hyperbolique du gradient de $\log h$ est bornée par 1.

Considérons maintenant deux points z_0 et z_1 dans le disque. Définissons $\text{dist}(z_0, z_1)$ comme la borne supérieure de $\log(h(z_0)/h(z_1))$ sur toutes les fonctions harmoniques positives h sur le disque. Évidemment, ceci définit une distance sur le disque, homogène puisque le disque est holomorphiquement homogène. D'après le théorème de caractérisation, on trouve un multiple constant du plan euclidien ou hyperbolique. Nous venons bien sûr de trouver une nouvelle incarnation de la distance de Poincaré! Le lecteur pourra le vérifier par lui-même ou bien consulter [9].

10 Arrivée au bord

Nous avons vu qu'une promenade aléatoire dans le disque se termine presque sûrement sur le bord et c'est effectivement sur ce bord que nous terminerons ce chapitre. Les points du bord du disque de Poincaré ne sont pas *dans* le disque, mais les fondateurs de la géométrie hyperbolique ont très vite pris conscience de l'importance de ce bord, qu'ils ont baptisé *absolu*. Il y a beaucoup de définitions intrinsèques de l'absolu (qui se généralisent d'ailleurs aux espaces δ -hyperboliques). La plus simple est la suivante : on considère l'ensemble des *rayons*, c'est-à-dire des plongements isométriques $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{D}$ et on identifie deux tels rayons γ_1 et γ_2 si la distance $\text{dist}_{\text{hyp}}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est bornée. L'espace quotient est par définition l'absolu $\partial\mathbf{D}$. Il n'est pas (trop) difficile de munir la réunion $\mathbf{D} \cup \partial\mathbf{D}$ d'une topologie qui la rend homéomorphe à un disque fermé. L'action de toute isométrie se prolonge canoniquement au bord [32].

Beaucoup de choses se passent au bord : je vais me contenter de l'illustrer en tenant une promesse faite plus haut et en plongeant naturellement le disque de Poincaré dans un espace de Hilbert. Étant donné deux points distincts u et v de $\partial\mathbf{D}$, il existe une unique géodésique orientée $\gamma \subset \mathbf{D}$ qui tend en $\mp\infty$ vers u et v . Ainsi, l'espace \mathcal{G} des couples de points distincts du bord peut être identifié à l'espace des géodésiques orientées du disque et la théorie générale des géodésiques montre que cet espace possède un volume naturel (ou plutôt une aire en dimension 2) : c'est le théorème de Liouville [6, 7]. Dans notre cas, il n'est pas difficile d'identifier cette aire. Considérons le modèle du demi-plan dans lequel le bord peut être identifié à $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Dans ces coordonnées, l'élément d'aire est $\omega = du dv / (u - v)^2$ qu'on peut aussi interpréter comme le birapport $-[u : v : u + du : v + dv]$. Si I et J sont deux intervalles disjoints du bord $\partial\mathbf{D}$ l'ensemble des couples (u, v) tels que $u \in I, v \in J$ a une aire égale au logarithme du birapport des quatre extrémités des intervalles.

Cela étant posé, on peut considérer l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathcal{G}, \omega)$ des fonctions de carré intégrable sur \mathcal{G} sur lequel agit par isométries le groupe d'isométries du disque. Si z est un point du disque on définit $\mathcal{G}_z \subset \mathcal{G}$ comme l'ensemble des couples (u, v) tels que la géodésique allant de u vers v passe à gauche de z . Remarquons que la fonction indicatrice $1_{\mathcal{G}_z}$ de \mathcal{G}_z n'est pas de carré intégrable. Cependant, si z et z' sont deux points de \mathbf{D} , la différence $1_{\mathcal{G}_z} - 1_{\mathcal{G}_{z'}}$ est de carré intégrable (exercice). La norme L^2 de $1_{\mathcal{G}_z} - 1_{\mathcal{G}_{z'}}$ est $\dots \text{dist}_{\text{hyp}}(z, z')^{1/2}$ (vérifiez, sans calculer!). Un plongement de \mathbf{D} dans H est alors évident. On choisit un point base z_0 dans le disque et on envoie le point z sur $i(z) = 1_{\mathcal{G}_z} - 1_{\mathcal{G}_{z_0}} \in H$. Il est maintenant clair que $\|i(z) - i(z')\|^2 = \text{dist}_{\text{hyp}}(z, z')$ et que i est *naturel* : toute isométrie f de \mathbf{D} définit naturellement une isométrie (affine) \bar{f} de H telle que $i \circ f = \bar{f} \circ i$.

Un inconvénient du plongement i que nous venons de construire est que l'égalité $\|i(z) - i(z')\| = \sqrt{\text{dist}_{\text{hyp}}(z, z')}$ montre en particulier que i n'est pas différentiable de sorte que i n'est pas un plongement isométrique dans le sens défini plus haut ! En 1932, Bieberbach a construit un *plongement isométrique naturel* du disque dans

un espace de Hilbert [13]. En voici une présentation moderne. On considère l'espace de Hilbert H des formes différentielles holomorphes sur le disque $\omega = f(z) dz$ qui sont de carré intégrable : $\int_{\mathbb{D}} \omega \wedge \bar{\omega} < \infty$. Si z, z' sont deux points fixés du disque, l'intégration des formes holomorphes le long d'un chemin joignant z à z' définit une forme linéaire sur H et donc, par dualité, un vecteur $V_{z,z'}$ dans H . Soit z_0 un point base dans le disque. Le plongement de Bieberbach consiste à envoyer le point z sur $j(z) = V_{z_0,z} \in H$. La naturalité de j est évidente car les bijections holomorphes du disque agissent évidemment par isométries linéaires de H . Le fait que j soit différentiable est un exercice intéressant. Un calcul élémentaire (mais pas très intéressant) montre que $\|j(z) - j(z')\| = F(\text{dist}_{\text{hyp}}(z, z'))$ où $F(t) = \sqrt{2 \log \text{ch } t}$. Au voisinage de 0, on a $F(t) \sim t$ de sorte que la différentielle de j est bien une isométrie, comme annoncé. En revanche, pour les grandes valeurs de t , la différence entre $F(t)$ et $\sqrt{2t}$ est petite et la distortion de j pour des points éloignés est donc du même ordre de grandeur que pour notre premier plongement i .

Cette propriété de plongement isométrique naturel dans un espace de Hilbert a des généralisations importantes : groupes a-T-menables, etc. (voir [10] pour en savoir beaucoup plus).

11 Quelques remords...

Notre promenade n'est pas passée par tant de lieux qui méritaient pourtant le détour !

J'aurais pu (dû ?) expliquer ce qui se fait à *l'intérieur* du disque plutôt que me limiter à une description du disque, vu de *l'extérieur*. Le disque est en effet un lieu privilégié dans lequel on *fait* de l'analyse fonctionnelle [1], de l'analyse complexe [44, 64], des systèmes dynamiques [12], de la théorie des nombres et des formes modulaires [66], sur lequel on fait agir des groupes fuchsien [54], etc.

J'aurais également dû aller plus loin. Le disque a une famille nombreuse. Bien sûr, il y a des versions en toutes dimensions (les boules hyperboliques) qui ont des propriétés analogues. De plus, en cherchant les variétés riemanniennes de dimension supérieure qui possèdent de fortes propriétés d'homogénéité, É. Cartan a fondé la théorie des *espaces symétriques* dont il a donné une magnifique classification (voir par exemple [11, 27]). Certains de ces espaces sont d'ailleurs 2-homogènes et méritent une attention toute particulière. Ces espaces symétriques ont aussi des cousins combinatoires : les *immeubles de Bruhat-Tits* dont la géométrie est également d'une richesse incroyable [19].

Et il y a les espaces qui sont les voisins du disque : les variétés à courbure négative, les espaces et les groupes δ -hyperboliques, etc. Sans oublier les espaces hyperboliques de dimension infinie sur lesquels Gromov fait le commentaire suivant dans [38, p.121] :

« These spaces look as cute and sexy to me as their finite–dimensional siblings but they have been for years shamefully neglected by geometers and algebraists alike. »¹⁴

D'autres promenades en perspective !



¹⁴Ces espaces me paraissent aussi mignons et sexys que leurs frères et sœurs de dimension finie, mais ils ont été honteusement négligés depuis des années aussi bien par les géomètres que par les algébristes.

Appendice : esquisse de preuve du théorème de caractérisation

Considérons un espace métrique homogène (X, d) qui est une surface et notons G son groupe d'isométries. Ce groupe est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, qui en fait un groupe localement compact (par le théorème d'Ascoli).

Le cinquième problème de Hilbert fut résolu au milieu du vingtième siècle par Montgomery et Zippin [56]. Dans sa forme finale, le résultat établit qu'un groupe localement compact qui possède un voisinage de l'identité sans sous-groupe non trivial est un *groupe de Lie*, c'est-à-dire que ce groupe est une variété différentiable et que la structure de groupe $G \times G \rightarrow G$ est différentiable.

Quitte à remplacer X par son revêtement universel, on peut commencer par supposer que X est homéomorphe au plan ou à la sphère (ceci utilise la classification des surfaces, qui est également un événement majeur du vingtième siècle mathématique).

J'affirme que G contient effectivement un voisinage de l'identité sans sous-groupe non trivial. Pour cela, on utilise un autre théorème difficile, dû à Kerékjártó [45, 49], selon lequel tout groupe compact d'homéomorphismes du plan ou de la sphère est conjugué à un groupe de rotations (contenu dans $O(2)$ ou $O(3)$ selon le cas, du plan ou de la sphère). Puisque $O(2)$ et $O(3)$ contiennent évidemment des voisinages de l'identité sans sous-groupe non trivial, l'affirmation en résulte.

D'après Montgomery et Zippin, le groupe G est donc un groupe de Lie que l'on peut supposer connexe. Celui-ci agit transitivement sur X de sorte qu'on peut identifier X à G/K où K est le stabilisateur d'un point, bien sûr compact, donc contenu dans $O(2)$ d'après ce qui précède.

Le groupe K peut être de dimension 0 ou 1 et G est de dimension 2 ou 3. Nous sommes donc amenés à faire la liste des groupes de Lie de dimension 2 ou 3 et dans le deuxième cas à chercher les sous-groupes compacts isomorphes à $O(2)$. Ceci n'est pas difficile. Voici la liste des résultats possibles (toujours dans le cas où X est simplement connexe).

a) G est de dimension 2 et K est trivial : l'espace X s'identifie à \mathbf{R}^2 ou au groupe affine des transformations $x \mapsto ax + b, a > 0$.

b) G est de dimension 3 et K est isomorphe à $O(2)$: le groupe G s'identifie au groupe des isométries directes de la sphère ($SO(3)$), du plan euclidien, ou du disque de Poincaré ($PSL(2, \mathbf{R})$). Dans ce cas, l'espace homogène X , s'identifie au plan euclidien, à la sphère ou au disque de Poincaré.

Si l'espace métrique est 2-homogène, le cas a) ne peut pas se produire et nous avons bien identifié, pas encore l'espace métrique, mais au moins son groupe d'isométries. Il n'est pas difficile de montrer que, sous l'hypothèse que (X, d) est géodésique, il est en fait isométrique à un multiple constant de la métrique euclidienne, elliptique ou hyperbolique. Pour conclure, il faut éliminer l'hypothèse de simple connexité de X . Ce n'est pas difficile une fois le revêtement universel identifié. Ceci termine l'esquisse de la preuve du théorème de caractérisation qui, comme on le voit, coûte cher dans le sens où elle utilise beaucoup de choses bien difficiles.

Si on ne garde que l'hypothèse d'homogénéité (en ne supposant plus la 2-homogénéité), il faut considérer également le cas a). Si $G \simeq \mathbf{R}^2$, il suffit de prendre une distance dans le plan invariante par translations, par exemple une norme quelconque. De même, on peut considérer les distances sur le groupe affine invariante par translations à gauche. Ces exemples sont bien compris et ne présentent évidemment pas la richesse du plan euclidien, de la sphère et du disque de Poincaré.

Références

- [1] AGLER, J. & MCCARTHY, J. : *Pick interpolation and Hilbert function spaces*. Graduate Studies in Mathematics, **44**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xx+308 pp.
- [2] ANDERSON, J. : *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. x+230 pp.
- [3] AHLFORS, L. : *Conformal invariants : topics in geometric function theory*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. ix+157 pp.
- [4] AHLFORS, L. : *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Troisième édition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 pp.
- [5] ANOSOV, D.V. : *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **90** (1967). American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969. iv+235 pp.
- [6] ARNOLD, V. : *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Traduit du russe par Djilali Embarek. Éditions Mir, Moscou, 1976. 470 pp.
- [7] ARNOLD, V., & AVEZ, A. : *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, **9**. Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1967. ii+243 pp.
- [8] BARREAU, H., & NOËL, E. : *Le Hasard aujourd'hui*. Points Sciences, Seuil, 1991. 234 pp.
- [9] BEAR H.S. : Part metric and Hyperbolic metric. *The American Mathematical Monthly*, **98**, 2 (1991), pp. 109–123.
- [10] BEKKA, B., DE LA HARPE, P. & VALETTE, A. : *Kazhdan's Property T*. À paraître, prépublication 2005 disponible www.mmas.univ-metz.fr/~bekka.
- [11] BERGER, M. : *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxiv+824 pp.
- [12] BERTELOOT, F., & MAYER, V. : *Rudiments de dynamique holomorphe*. Cours Spécialisés, **7**. Société Mathématique de France, Paris, EDP Sciences, Les Ulis, 2001. vi+160 pp.
- [13] BIEBERBACH, L. : Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comm. Math. Helv.* **4** (1932), 248–255.
- [14] BLANUŠA, D. : Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. *Monatsh. Math.* **59** (1955), 217–229.
- [15] BOLTJANSKIĬ, V. : *Hilbert's third problem*. Traduit du russe par Richard A. Silverman. Avec une préface par Albert B. J. Novikoff. Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto-London, 1978. x+228 pp.
- [16] BONOLA, R. : *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its developments*. Traduction avec des appendices par H. S. Carslaw. Supplément contenant la traduction par G. B. Halsted de « The science of absolute space » par John Bolyai et « The theory of parallels » par Nicholas Lobachevski. Dover Publications, Inc., New York, 1955. xii+268+xxx+71+50 pp.
- [17] BOOL, F. H., KIST, J. R., LOCHER, J. L., & WIERDA, F. : *M. C. Escher, his life and complete graphic work*. Harry N. Abrahms, Inc., New York, 1982.
- [18] BOST, J.-B. : *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties. From number theory to physics*. (Les Houches, 1989), 64–211, Springer, Berlin, 1992.
- [19] BROWN, K. : *Buildings*. Retirage de l'original de 1989. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. viii+215 pp.
- [20] DO CARMO, M. : *Differential geometry of curves and surfaces*. Traduit du portugais. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. viii+503 pp.

- [21] CARTIER, P. : Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert. Séminaire Bourbaki, Vol. 1984/85. *Astérisque* **133-134**, (1986), 261–288.
- [22] COHN, H. : *Conformal mapping on Riemann surfaces*. Retirage de l'édition de 1967. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1980. xv+325 pp.
- [23] COXETER, H.S.M. : *Non-Euclidean geometry*. Sixième édition. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1998. xviii+336 pp.
- [24] COXETER, H.S. : *Angels and devils*. *The Mathematical Gardner*, David A. Klarner, editor, Wadsworth International, 1981 (épuisé). Republié dans : *Mathematical Recreations : A Collection in Honor of Martin Gardner*, David A. Klarner, ed., Dover Publishers, 1998.
- [25] DAHAN-DALMÉDICO, A., CHABERT, J.-L. & CHEMLA, K. : *Chaos et déterminisme*. Points Sciences, Seuil, 1992. 414 pp.
- [26] DYNKIN, E. & YUSHKEVICH, A. : *Markov processes ; Theorems and problems*. Traduit du russe par James S. Wood Plenum Press, New York, 1969. x+237 pp.
- [27] EBERLEIN, P. : *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1996. 449 pp.
- [28] EFIMOV, N. : *Géométrie supérieure*. Traduit du russe par E. Makho. Deuxième édition Mir, Moscou, 1985. 607 pp.
- [29] ESCHER, M.C. : *Official M. C. Escher Web site*, published by the M.C. Escher Foundation and Cordon Art B.V. <http://www.mcescher.com/>
- [30] EUCLIDE : *Les éléments*. Vol. 1. Édition bilingue. Traduit du grec par Georges J. Kayas. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, 1978. xxxii+258 pp.
- [31] GAUSS, K. : *Werke*, volume VII, Göttingen, 1900.
- [32] GHYS, É. & DE LA HARPE, P. : *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. (Bern, 1988), 1–25, Progr. Math., **83**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [33] GLEICK, J. : *La Théorie du chaos : Vers une nouvelle science*. Champs Flammarion Sciences, 1999. 431 pp. traduit de *Chaos. Making a new science*. Penguin Books, New York, 1987. xiv+352 pp.
- [34] GROMOV, M. : Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group. Preprint SUNY (1976), reprinted in *L'Enseignement Mathématique* **46** (2000) 391–402.
- [35] GROMOV, M. : *Partial Differential Relations*. Springer-Verlag, 1986, *Ergeb. der Math.* 3. Folge, Bd. 9.
- [36] GROMOV, M. : *Hyperbolic groups*. in *Essays in Group Theory*, Mathematical Sciences Research Institute Publications 8 (1988), 75–263, Springer-Verlag.
- [37] GROMOV, M. : Sign and geometric meaning of curvature. *Rend. Semin. Mat. Fis. Milano* **61** (1991), 9–123.
- [38] GROMOV, M. : *Asymptotic invariants of infinite groups. Geometric group theory*. Volume 2, Proc. Symp. Sussex Univ., Brighton, July 14-19, 1991. *Lond. Math. Soc. Lecture Notes* **182**, Niblo and Roller ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge(1993), 1–295.
- [39] GROMOV, M. : Spaces and questions. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). *Geom. Funct. Anal.* (2000), Special Volume, Part I, 118–161.
- [40] GUNNING, R.C. : *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton Mathematical Notes Princeton University Press, Princeton, N.J. 1966. iv+254 pp.
- [41] HADAMARD, J. : Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *Journ. de Math.* **5** (4), 27–73 (1898).
- [42] DE LA HARPE, P. : On Hilbert's metric for simplices. *Geometric group theory*. Vol. 1 (Sussex, 1991), 97–119, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 181, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

- [43] HILBERT, D. : *Les fondements de la géométrie*. Traduction préparée par P. Rossier, Dunod, Paris, 1971. 311 pp. *Grundlagen der Geometrie*. Thirteenth edition. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1987. viii+271 pp.
- [44] HOFFMAN, K. : *Banach spaces of analytic functions*. Retirage de l'original de 1962. Dover Publications, Inc., New York, 1988. viii+216 pp.
- [45] DE KERÉKJÁRTÓ, B. : Sur les groupes compacts de transformations topologiques des surfaces. *Acta Math.* **74** (1941), 129–173.
- [46] KLEIN, F. : *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Chelsea Publishing Co., New York, 1959. xii+326 pp.
- [47] KLEIN, F. : *Development of mathematics in the 19th century*. Avec une préface et des appendices par Robert Hermann. Traduit de l'allemand par M. Ackerman. Lie Groups : History, Frontiers and Applications, IX. Math Sci Press, Brookline, Mass., 1979. ix+630 pp.
- [48] KLEIN, F. : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals. A supplement to the usual treatises*. Traduit de l'allemand par Frances Hardcastle Dover Publications, Inc., New York, 1963. xii+76 pp.
- [49] KOLEV, B. : Note sur les sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère. Prépublication Marseille (2005).
- [50] KOLMOGOROV, A.N., & YUSHKEVICH, A.P. : *Mathematics in the 19th Century*. Geometry, Analytic function theory. Traduit du russe, Birkhäuser Verlag, 1996.
- [51] KRANTZ, S. : *Complex analysis : The geometric viewpoint*. The Carus Mathematical Monograph **23**, The Mathematical Association of America, 1990.
- [52] KUIPER, N. : On C^1 -isometric imbeddings I and II, *Indag. Math.* **17** (1955) 545–556 et 683–689.
- [53] LÉVY, P. : *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Retirage de la seconde édition (1955). Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992. iv+437 pp.
- [54] MAGNUS, W. : *Noneuclidean Tessellations and Their Groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 61. Academic Press, New York-London, 1974. xiv+207 pp.
- [55] MCLACHLAN, R. : A gallery of constant-negative-curvature surfaces, *Mathematical Intelligencer*, (1994), 31–37.
- [56] MONTGOMERY, D. & ZIPPIN, L. : *Topological transformation groups*. Interscience Publishers, New York-London, 1955. xi+282 pp.
- [57] MUMFORD, D. , SERIES, C. & WRIGHT, D. : *Indra's pearls. The vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, New York, 2002. xx+396 pp.
- [58] NECHAEV, S. & VOITURIEZ, R. : On the plant leaf's boundary, "jupe à godets" and conformal embeddings. *J. Phys. A* **34** (2001), no. 49, 11069–11082.
- [59] POINCARÉ, H. : Théorie des groupes fuchsien, *Acta Mathematica*, **1**(1882), 1-62. *Œuvres*, tome II, 108-168. Sur les fonctions fuchsien, *Acta Mathematica*, **1**(1882), 193-294. *Œuvres*, tome II, 169-257.
- [60] POINCARÉ, H. : *La Science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion, 1902. 284 pp.
- [61] POPOV, E. : Geometric approach to Chebyshev net generation along an arbitrary surface represented by NURBS, <http://graphicon2002.unn.ru/demo/2002/>
- [62] REYSSAT, E. : *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Progress in Mathematics, **77**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. viii+166 pp.
- [63] RUCKER, R. : *The Fourth Dimension : A Guided Tour of the Higher Universes*. Houghton Mifflin, 1984.
- [64] RUDIN, W. : *Analyse réelle et complexe*. Traduit de la première édition anglaise par N. Dhombres et F. Hoffman. Masson, Paris, 1980. x+397 pp.

- [65] RUELLE, D. : *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 2000.
- [66] SERRE, J.-P. : *Cours d'arithmétique*. Collection SUP : « Le Mathématicien » **2**, Presses Universitaires de France, Paris, 1970. 188 pp.
- [67] TADA0, I. : *Hyperbolic non Euclidean world and figure-8 knot* : www1.kcn.ne.jp/~iitto/
- [68] TCHEBYCHEV, P.L. : Sur la coupe des vêtements (1878), *Œuvres II*, Chelsea 1962.
- [69] The institute for figuring : www.theiff.org/
- [70] THURSTON, W : *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.* (ed. Silvio Levy). Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [71] TSUJI, M. : *Potential theory in modern function theory*. Retirage de l'original de 1959. Chelsea Publishing Co., New York, 1975. x+590 pp.



Merci à Aurélien Alvarez, Éric Charpentier, Pierre de la Harpe, Annick Lesne, Yann Ollivier, Martine Rufin et Bruno Sévenec pour leurs lectures détaillées de ce texte ainsi que pour leurs bons conseils.

ÉTIENNE GHYS

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
de l'École normale supérieure de Lyon
U.M.R. 5669 du CNRS
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07- France
ghys@umpa.ens-lyon.fr

23 septembre 2005
