Pub. IRMA - Lille, 1985

Vol. VII - Fasc. 1, N° XI

UN FEUILLETAGE ANALYTIQUE DONT LA COHOMOLOGIE BASIQUE EST DE DIMENSION INFINIE

par

Etienne GHYS

Résumé : Pour tout $q \geq 2$, nous construisons un feuilletage analytique réel de codimension q sur une variété compacte dont la cohomologie basique est de dimension infinie.

Classification A.M.S. 57 R 30

Mots clés : *Cohomologie basique ; feuilletages transversalement homogènes.*

Manuscrit déposé le 20 février 1985

Soit F un feuilletage de classe C^∞ sur une variété compacte M. Rappelons qu'une forme différentielle ω de classe C^∞ sur M est dite F-basique si, pour tout champ de vecteurs X tangent à F, on a $i_X\omega = 0 = i_X d\omega$. Ceci revient à dire que la forme ω est localement projetable dans tout ouvert distingué pour F. Les formes F-basiques forment un complexe différentiel gradué dont la cohomologie est la "cohomologie basique de F" que nous noterons $H_b^*(F)$.

Dans [2], G.W. Schwarz donne un exemple de feuilletage F sur une variété compacte tel que $H_b^*(F)$ est de dimension infinie pour $2 \leqslant * \leqslant \operatorname{codim} F$. Par la nature même de sa construction, ce feuilletage est de classe C^∞ mais n'est pas analytique réel. Le but de cette courte note est de donner un exemple extrêmement simple du même phénomène ayant l'avantage d'être analytique.

Théorème.- Pour tout $q \geqslant 2$, il existe un feuilletage F analytique réel de codimension q sur une variété compacte de dimension $q+1$ tel que $H_b^*(F)$ est de dimension infinie non dénombrable pour $2 \leqslant * \leqslant \operatorname{codim}(F)$.

Soit ϕ un difféomorphisme d'une variété compacte V. Rappelons que l'on construit naturellement un feuilletage F_ϕ de dimension 1 sur la variété "suspendue" V_ϕ obtenue en identifiant les points (x,t) et $(\phi(x),t+1)$ de $V \times \mathbb{R}$. Il est clair que la cohomologie basique de F_ϕ n'est autre que la cohomologie des formes de V invariantes par ϕ.

Comme le fait remarquer G.W. Schwarz, pour démontrer le théorème, il suffit de le démontrer pour $q = 2$ car on obtient alors des exemples en toutes codimensions par produit. Dans l'exemple que nous proposons, V

sera le tore T^2 identifié à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et ϕ sera le difféomorphisme analytique réel défini par :

$$\phi(x,y) = (x,x+y).$$

Nous allons montrer que $H_b^2(F_\phi)$ est de dimension infinie non dénombrable.

Lemme 1.- Soit ω une 1-forme différentielle de degré 1 sur T^2, invariante par ϕ. Alors ω est du type :

$$\omega = f(x)dx.$$

En particulier, ω est fermée.

Démonstration :

Le $n^{\text{ième}}$ itéré de ϕ s'écrit :

$$\phi^n(x,y) = (x,nx + y).$$

Si x est rationnel, le point (x,y) est périodique pour ϕ ; i.e. il existe n tel que

$$\phi^n(x,y) = (x,y).$$

En écrivant $(\phi^n)^*\omega = \omega$ au point (x,y), on obtient que $\omega_{(x,y)}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ invariante par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. C'est donc que, si $x \in \mathbb{Q}$, la forme $\omega_{(x,y)}$ est un multiple de dx. Par conséquent, ω est du type

$$\omega = f(x,y)dx.$$

Puisque ω est ϕ-invariante, la fonction f est constante sur les orbites de ϕ et donc sur leurs adhérences. Si x est irrationnel, l'adhérence de l'orbite de (x,y) est le cercle $\{x\} \times S^1$. En d'autres termes, f ne dépend que de x. ∎

Lemme 2.- Les 2-formes de T^2 qui sont invariantes par ϕ sont exactement les formes du type $g(x)dx \wedge dy$.

Démonstration :

La forme $g(x,y)dx \wedge dy$ est ϕ-invariante si et seulement si g est constante sur les orbites de ϕ et donc si g ne dépend que de x. ∎

Le théorème est alors immédiat puisque $H_b^2(\mathcal{F}_\phi)$ s'identifie à l'espace des formes du type $g(x)dx \wedge dy$ qui est un espace de dimension infinie non dénombrable.

Remarque 1.- Les exemples construits sont en fait transversalement affines. Ceci montre que le résultat de [1] suivant lequel $H_b^*(\mathcal{F})$ est de dimension finie si $\mathcal{F}$ est riemannien ne s'étend pas aux feuilletages transversalement homogènes.

Remarque 2.- Dans les exemples de G.W. Schwarz, les groupes $H_b^*(\mathcal{F})$ ne sont que de dimension dénombrable.

Remarque 3.- Soit M^3 le fibré unitaire tangent du tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Le flot géodésique de ce tore définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 sur M^3 dont on peut montrer que la cohomologie basique est de dimension infinie. On obtient dont un flot de contact dont la cohomologie basique est de dimension infinie. La similitude entre cet exemple et l'exemple précédent est la suivante ; il existe une fibration $p : M^3 \to S^1$ telle que $\mathcal{F}$

soit tangent aux fibres de p et telle que la restriction de $\mathcal{F}$ à $p^{-1}(x)$ est un feuilletage linéaire de T^2 à feuilles denses si $x \notin \mathbb{Q}$ et à feuilles fermées si $x \in \mathbb{Q}$.

Remarque 4.- Dans le cas général $H_b^*(\mathcal{F})$ est un module sur $H_b^o(\mathcal{F})$, c'est-à-dire sur l'anneau des fonctions basiques. Dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui de Schwarz, ce module est de rang 1. Nous ne connaissons pas d'exemple où ce module n'est pas de type fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. EL KACIMI, V. SERGIESCU, G. HECTOR - *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie,* à paraître dans Math. Zeischrift.

[2] G.W. SCHWARZ - *On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation,* Topology 13, 1974, 185-187.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I
U.E.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES
E.R.A. au C.N.R.S. 07590
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (FRANCE)