Séminaire BOURBAKI Mars 2003
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 916, p. 173 à 204

GROUPES ALÉATOIRES
[d'après Misha Gromov,...]

par **Étienne GHYS**

INTRODUCTION

La *théorie combinatoire des groupes* traite pour l'essentiel des groupes de *présentation finie*, c'est-à-dire des groupes fondamentaux des polyèdres finis. Les méthodes employées, d'abord combinatoires et topologiques [CM82], ont pris par la suite un aspect métrique, en particulier sous l'impulsion de M. Gromov. Aujourd'hui, on préfère parfois la terminologie « *théorie géométrique des groupes* » [Ha00]. Une place considérable est faite à des exemples remarquables qui sont analysés en détail : groupes libres, groupes fondamentaux de surfaces, groupes arithmétiques, etc. Par ailleurs, quelques classes de groupes sont mises en évidence, comme celles des groupes nilpotents, polycycliques, résolubles, moyennables etc., mais à l'évidence il ne s'agit que de classes très particulières qui n'illustrent pas le « comportement typique » d'un groupe de présentation finie. Dans une série d'articles étalés sur une vingtaine d'années, M. Gromov propose une vision globale des propriétés des groupes « génériques » ou « aléatoires », dans un sens que nous préciserons plus loin. Cet exposé fait le point sur la question. Comme souvent dans ce séminaire, il n'est pas possible en quelques pages d'entrer dans les détails de preuves longues et difficiles et il nous faudra malheureusement nous contenter d'un survol superficiel.

Le rôle joué par les objets génériques par rapport aux exemples spécifiques dépend du domaine des mathématiques considéré. Dans la théorie des systèmes dynamiques par exemple, l'étude des dynamiques génériques est absolument fondamentale alors que la géométrie algébrique accorde peut-être moins d'importance aux variétés algébriques « génériques ». Les méthodes présentées dans cet exposé permettent une première approche aléatoire en théorie géométrique des groupes. L'avenir dira si cette approche est féconde et si une véritable « théorie des groupes aléatoires » est destinée à se développer (à l'instar de la théorie des graphes aléatoires ?). Quoi qu'il en soit, nous verrons que ces méthodes permettent d'ores et déjà de montrer l'existence de groupes aux propriétés surprenantes.

Je remercie Thomas Delzant, Damien Gaboriau, Yann Ollivier, Lior Silberman, Alain Valette et Andrzej Żuk pour leur aide, et Misha Gromov pour ses belles mathématiques.

1. QUELQUES ÉNONCÉS

Pour que notre « marche aléatoire parmi les groupes aléatoires » [Gr03] ne soit pas trop désordonnée, je voudrais présenter d'abord quelques énoncés que nous rencontrerons dans cet exposé et qui serviront de repères.

Soit Γ un groupe engendré par une partie finie S symétrique (*i.e.* $S = S^{-1}$). Pour chaque γ de Γ, on note $|\gamma|_S$ sa *norme*, longueur minimale d'un mot en les éléments de S qui représente γ. Si γ_1 et γ_2 sont deux éléments de Γ, on note $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = |\gamma_1^{-1}\gamma_2|_S$. Ceci munit Γ de la *métrique des mots*, invariante par translations à gauche. Il est souvent utile de plonger Γ dans son *graphe de* Cayley, dont les sommets sont les éléments du groupe et les arêtes connectent les éléments à distance 1. On prolonge naturellement la distance d_S au graphe (ou plus précisément à sa réalisation géométrique), de manière à ce que chaque arête soit isométrique à l'intervalle $[0, 1]$. Un *segment géodésique* est un plongement isométrique d'un intervalle $[0, n]$ dans le graphe de Cayley ; on confond souvent un tel segment avec son image. Le groupe Γ est *hyperbolique* s'il existe une constante $\delta_S \geqslant 0$ telle que pour tout triplet d'éléments γ_i ($i = 1, 2, 3$) et tout triplet de segments géodésiques c_i les connectant deux à deux, tout point de chacun des c_i est à distance inférieure à δ_S de la réunion des deux autres (finesse des triangles géodésiques). Cette propriété ne dépend pas du choix de la partie génératrice S (même si la valeur de δ_S en dépend). Les groupes hyperboliques, introduits par M. Gromov dans [Gr81, Gr84, Gr87, Gr93], jouissent de nombreuses propriétés remarquables et ont fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [Gh90, GhH90, CDP90, Al91] pour les fondements de la théorie) : on peut dire aujourd'hui qu'ils sont bien compris. L'un des thèmes essentiels de cet exposé est qu'en un certain sens la majorité des groupes de présentation finie sont hyperboliques.

Choisissons deux entiers $g \geqslant 2$ et $r \geqslant 1$ et considérons les présentations de groupes à g générateurs et r relateurs de la forme $\Gamma = \langle a_1, a_2, \ldots, a_g \mid m_1, m_2, \ldots, m_r \rangle$ où les m_j sont des mots cycliquement réduits en les lettres $a_i^{\pm 1}$ (un mot est *réduit* s'il ne contient pas deux lettres consécutives inverses et *cycliquement réduit* si de plus la première et la dernière lettre ne sont pas inverses). Si l'on fixe g et les longueurs ℓ_j des relateurs m_j ($j = 1, \ldots, r$), il n'y a qu'un nombre fini $N(g; \ell_1, \ldots, \ell_r)$ de telles présentations. Notons $N_{hyp}(g; \ell_1, \ldots, \ell_r)$ le nombre de celles qui définissent un groupe hyperbolique *non élémentaire* (c'est-à-dire infini et ne contenant pas de sous-groupe infini cyclique d'indice fini). Le théorème suivant a été énoncé par M. Gromov dans

[Gr87] puis démontré indépendamment par C. CHAMPETIER [Ch91,Ch93,Ch94,Ch95] et Y. OL'SHANSKIĬ [Ols92a].

THÉORÈME A. — *La probabilité* $N_{hyp}(g;\ell_1,\dots,\ell_r)/N(g;\ell_1,\dots,\ell_r)$ *pour qu'une présentation de groupe à g générateurs et r relateurs définisse un groupe hyperbolique non élémentaire tend vers 1 lorsque les longueurs* $\ell_1,\dots,\ell_r$ *des relateurs tendent vers l'infini.*

Nous verrons que la difficulté principale dans la preuve de ce théorème est dans le cas où les ℓ_j ont des ordres de grandeur différents. Une autre approche a été proposée par la suite par M. GROMOV dans [Gr93]. Il s'agit encore de fixer le nombre de générateurs mais de *faire tendre le nombre de relateurs vers l'infini, en les gardant tous de la même longueur* ℓ (tendant également vers l'infini). Plus précisément, choisissons encore un entier $g \geqslant 2$ et une constante $c \geqslant 1$ et considérons l'ensemble $S(\ell-c,\ell+c)$ des mots réduits en les lettres $a_i^{\pm1}$ $(i=1,\dots,g)$ dont les longueurs sont comprises entre $\ell-c$ et $\ell+c$. Chaque partie $R\subset S(\ell-c,\ell+c)$ peut être considérée comme un ensemble de relateurs et définit donc un groupe, quotient du groupe libre par le sous-groupe normal engendré par R. Fixons un réel $d\in[0,1]$ et une constante $c'>1$ et considérons l'ensemble des parties $R\subset S(\ell-c,\ell+c)$, dites de *densité* d, dont le cardinal est compris entre ${c'}^{-1}|S(\ell-c,\ell+c)|^d$ et $c'|S(\ell-c,\ell+c)|^d$ (nous notons $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini X). La preuve du théorème suivant a été esquissée par M. GROMOV dans [Gr93] puis précisée par Y. OLLIVIER [Oll03a, Oll03b, Oll03c].

THÉORÈME B

– *Si* $d>1/2$, *la probabilité pour qu'une partie* $R\subset S(\ell-c,\ell+c)$ *de densité* d *définisse le groupe trivial tend vers* 1 *lorsque la longueur* ℓ *tend vers l'infini.*

– *Si* $d<1/2$, *la probabilité pour qu'une partie* $R\subset S(\ell-c,\ell+c)$ *de densité* d *définisse un groupe hyperbolique non élémentaire tend vers* 1 *lorsque la longueur* ℓ *tend vers l'infini.*

Ces théorèmes ont d'importantes généralisations dans lesquelles on remplace le groupe libre engendré par les a_i par un groupe hyperbolique non élémentaire quelconque. Il s'agit alors de considérer le quotient de ce groupe par le sous-groupe normalement engendré par un nombre fini d'éléments de grandes longueurs. En itérant le procédé on construit une suite de groupes hyperboliques et un passage à la limite donne des exemples intéressants de groupes de *type fini.* Une manière agréable de présenter ce genre de limite consiste à introduire une topologie sur l'ensemble $\mathcal{G}r_g$ des sous-groupes normaux du groupe libre F_g à g générateurs ou, ce qui revient au même, sur *l'ensemble des groupes équipés d'une famille génératrice à g éléments.* Dans cette topologie, deux sous-groupes normaux sont proches si leurs intersections avec une grande boule de F_g coïncident. Cette topologie (introduite par R. GRIGORCHUK [Gri85]) fait de $\mathcal{G}r_g$ un espace métrisable compact. Soit $\mathcal{H}yp_g\subset\mathcal{G}r_g$ la partie définie par les groupes hyperboliques non élémentaires (dénombrable car ceux-ci sont de présentation finie) et $\overline{\mathcal{H}yp_g}$ son adhérence dans $\mathcal{G}r_g$. Enfin, on note $\overline{\mathcal{H}yp_g^{st}}$ l'adhérence des groupes hyperboliques non élémentaires sans torsion. Le théorème suivant est exprimé dans le vocabulaire de C. CHAMPETIER [Ch91, Ch93, Ch94, Ch95, Ch00] mais on trouverait des énoncés du même genre dans l'article de Y. OLSHANSKIĬ [Ols92b].

THÉORÈME C. — *Il existe un G_δ dense dans l'adhérence des groupes hyperboliques non élémentaires $\overline{\mathcal{H}yp_g}$ formé de groupes infinis dont tous les éléments sont d'ordre fini.*

Il existe un G_δ dense dans $\overline{\mathcal{H}yp_g^{st}}$ formé de groupes infinis Γ qui :

– *possèdent la propriété (T) de* KAZHDAN *(voir [HV89]) et sont donc non moyennables,*
– *ne contiennent pas de sous-groupe non abélien libre,*
– *n'ont aucun quotient fini non trivial,*
– *possèdent une partie génératrice à deux éléments.*

Enfin, nous donnerons une idée générale de la démonstration par M. GROMOV du théorème suivant [Gr03].

THÉORÈME D. — *Il existe un groupe de présentation finie Γ qui ne se plonge pas de manière uniforme dans un espace de* HILBERT *$\mathcal{H}$, autrement dit pour lequel il n'existe aucun plongement $i : \Gamma \to \mathcal{H}$ vérifiant $F(d_S(\gamma_1, \gamma_2)) \leqslant ||i(\gamma_1) - i(\gamma_2)|| \leqslant d_S(\gamma_1, \gamma_2)$ pour tous γ_1, γ_2 dans Γ, avec $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tendant vers l'infini à l'infini.*

L'intérêt de ce concept de plongement provient du fait qu'un théorème de YU affirme que tous les groupes qui se plongent uniformément dans un espace de HILBERT vérifient la conjecture de BAUM-CONNES « grossière » (coarse) (et donc celle de NOVIKOV) [Yu00]. Ces groupes sont aussi caractérisés par l'existence d'une action moyennable sur un espace compact [HR00] ; c'est le cas pour tous les groupes hyperboliques [Se92]. On pourra consulter à ce sujet l'exposé de G. SKANDALIS dans ce séminaire [Sk00]. Le théorème D permet la construction de contre-exemples à des versions généralisées de la conjecture de BAUM-CONNES [HLS02].

Dans cet exposé, la lettre ℓ désignera toujours un entier destiné à tendre vers l'infini. Un événement aléatoire dépendra de ℓ et se réalisera avec une probabilité dépendant également de ℓ. Lorsque cette probabilité tend vers 1 *quand ℓ tend vers l'infini, nous dirons que l'événement se réalise* très probablement.

2. MODÈLE À DENSITÉ

Densités

Commençons par donner une définition simple qui permet d'obtenir des estimations intuitives sur la combinatoire d'ensembles finis dont la taille tend vers l'infini. Soit X

un ensemble fini de référence, dont le cardinal tendra par la suite vers l'infini. Si A est un ensemble fini non vide, nous dirons (suivant [Gr93]) que la *densité* de A (sous-entendu par rapport à X) est $\operatorname{dens}(A) = \log|A|/\log|X|$. Lorsque A est une partie de X, sa *codensité* est définie par $\operatorname{codens}(A) = 1 - \operatorname{dens}(A)$. Si X est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps fini et A est un sous-espace vectoriel, alors la densité est bien sûr le rapport des dimensions $\dim(A)/\dim(X)$. La codimension de l'intersection de deux sous-espaces en position générale est la somme de leurs codimensions, sauf si cette somme est supérieure à la dimension ambiante, auquel cas l'intersection est triviale. Il est remarquable que cette propriété s'étende aux parties d'un ensemble fini, sans aucune structure additionnelle, lorsque le cardinal tend vers l'infini. Plus précisément, fixons deux nombres cod_1 et cod_2 dans l'intervalle $[0,1]$ et un $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble (fini) des couples de parties A_1, A_2 de X dont les codensités sont respectivement dans les intervalles $[cod_1 - \varepsilon, cod_1 + \varepsilon]$ et $[cod_2 - \varepsilon, cod_2 + \varepsilon]$. Parmi ces couples de parties (A_1, A_2) on peut compter la proportion de ceux qui sont tels que la codensité de l'intersection vérifie $|\operatorname{codens}(A_1 \cap A_2) - (cod_1 + cod_2)| \leqslant 3\varepsilon$. Dans cette dernière inégalité, nous convenons d'attribuer n'importe quelle codensité supérieure ou égale à 1 à l'ensemble vide. Il se trouve que lorsque le cardinal de X tend vers l'infini, cette proportion tend (rapidement) vers 1. En particulier, si $cod_1 + cod_2 > 1$ et si ε est assez petit, la probabilité pour que $A_1 \cap A_2$ soit vide tend vers 1. La preuve est bien sûr facile mais nous en retiendrons qu'il est souvent possible d'estimer le nombre de solutions d'« équations aléatoires » dans un ensemble fini de grande taille en « comptant les équations ». Voici un autre exemple : la non injectivité d'une application $f : A \to X$ revient à l'existence de solutions non triviales à l'équation $f(x) = f(y)$ à deux inconnues dans A et à valeurs dans X ; si d désigne la densité de A, on s'attend donc à ce qu'une application aléatoire f soit injective si $2d - 1 < 0$ et non injective si $2d - 1 > 0$. Formellement, cela signifie que si les cardinaux de deux ensembles finis A_ℓ et X_ℓ tendent vers l'infini avec une limite $d = \lim_\ell \log|A_\ell|/\log|X_\ell|$, et si $2d - 1 < 0$ (resp. $2d - 1 > 0$) alors une application $f : A_\ell \to X_\ell$ est *très probablement* injective (resp. non injective). On reconnaît le *principe des tiroirs probabiliste* (aussi connu comme le paradoxe des dates d'anniversaire) : si on met $\ell^{1/2+\varepsilon}$ objets au hasard dans ℓ tiroirs, très probablement l'un des tiroirs contient au moins deux objets.

Dans le théorème B, nous utilisons un concept de « partie R de $S(\ell - c, \ell + c)$ de densité d » qui ne coïncide pas exactement avec celui que nous venons de définir mais il est clair que la densité de R dans notre nouveau sens tend vers d quand ℓ tend vers l'infini et ce changement de terminologie n'a aucune importance.

Diagrammes

Avant d'esquisser la preuve du théorème B, il nous faut faire quelques rappels. Soit Γ un groupe possédant une présentation de la forme $\langle a_1, \ldots, a_g \mid m_1, \ldots, m_r \rangle$. Par définition, cela signifie que Γ est le quotient du groupe libre F_g de base les a_i par le sous-groupe normal engendré par les m_j. Ainsi, un élément γ de F_g définit l'élément neutre de Γ si et seulement si on peut l'écrire comme un produit de conjugués des $m_j^{\pm 1}$. On doit à VAN KAMPEN une représentation topologique d'une telle situation en termes de *diagrammes*. Il s'agit d'un graphe fini connexe $\mathcal{D}$ plongé dans le plan. De plus, chaque arête orientée de $\mathcal{D}$ est étiquetée par un mot réduit en les $a_i^{\pm 1}$ de telle sorte que l'étiquette est inversée lorsque l'on renverse l'orientation d'une arête. Sur le bord orienté de chaque face f, c'est-à-dire de chaque composante bornée du complémentaire du graphe, on lit un mot $m(f)$ en les $a_i^{\pm 1}$ (défini à permutation cyclique près). Sur le bord du diagramme, c'est-à-dire sur le bord de la composante non bornée, on lit également un mot m et il est clair que le diagramme permet d'exprimer m comme un produit dans F_g de conjugués des $m(f)$. Le résultat (élémentaire) de VAN KAMPEN consiste en la réciproque : si un mot réduit m en les $a_i^{\pm 1}$ définit l'élément neutre de Γ, il existe un diagramme dont les mots associés aux faces sont des $m_j^{\pm 1}$ et dont le mot lu sur le bord est m (voir par exemple [LS01]). Nous ne considérerons que des diagrammes *réduits*, c'est-à-dire tels que deux faces adjacentes ne portent pas des mots inverses lorsqu'on les lit dans le sens direct à partir d'un point commun (dans ce cas on peut retirer ces deux faces et produire par recollement un diagramme possédant le même bord et moins de faces). La longueur du mot m s'appelle le *périmètre* du diagramme et se note $|\partial\mathcal{D}|$; le nombre de faces est l'*aire* et se note $|\mathcal{D}|$.

Théorème B

Une caractérisation importante des groupes hyperboliques est *l'inégalité isopérimétrique linéaire*. Un groupe $\Gamma = \langle a_1, \ldots, a_g \mid m_1, \ldots, m_r\rangle$ est hyperbolique si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que tout mot réduit m en les $a_i^{\pm 1}$, trivial dans Γ, est le bord d'un diagramme dont l'aire est bornée par C fois son périmètre (qui est la longueur de m). On trouvera une démonstration élémentaire de ce fait dans [Al91]. L'hyperbolicité d'un groupe possède en fait un caractère semi-local : c'est le principe local/global de CARTAN-HADAMARD-GROMOV qu'on peut exprimer de la manière suivante. Pour chaque $k > 0$, il existe des entiers K et $k' > 0$ tels que si Γ est un groupe de présentation finie dont les relateurs sont de longueur ℓ et si tous les diagrammes de Γ d'aire inférieure à K vérifient $k\ell|\mathcal{D}| \leqslant |\partial\mathcal{D}|$ alors *tous* les diagrammes vérifient $k'\ell|\mathcal{D}| \leqslant |\partial\mathcal{D}|$ (voir [Gr87, Gr93, Oll03a, Oll03b, Oll03c, Pa96]). Ainsi, une information sur un nombre *fini* de diagrammes peut permettre de conclure à l'hyperbolicité ; c'est la base des algorithmes de [Pa96].

Nous pouvons maintenant esquisser une preuve du théorème B. Commençons par la partie facile et supposons $d > 1/2$. À chaque élément de $S(\ell - c, \ell + c)$, c'est-à-dire à chaque mot réduit en les $a_i^{\pm 1}$ de longueur comprise entre $\ell - c$ et $\ell + c$, associons le mot obtenu en oubliant la première lettre. Ceci définit une application f de $S(\ell - c, \ell + c)$ vers $S(\ell - c - 1, \ell + c - 1)$ entre deux ensembles finis dont le rapport des cardinaux est borné (par $2g$), indépendamment de ℓ. Si la densité d'une partie aléatoire $R \subset S(\ell - c, \ell + c)$ est supérieure à $1/2$, on peut affirmer que lorsque ℓ tend vers l'infini, *très probablement*, la restriction de f à R n'est pas injective. Si deux relateurs de R ont la même image par f, leurs premières lettres sont identifiées dans le groupe défini par cette présentation. Il est facile d'en déduire que, *très probablement*, tous les générateurs $a_i^{\pm 1}$ sont identifiés dans le groupe quotient, de sorte que ce dernier a au plus deux éléments. Très probablement, les relateurs ne sont pas tous de longueur paire et le groupe est en fait trivial.

Supposons maintenant $d < 1/2$ et montrons que le groupe défini par R est très probablement hyperbolique non élémentaire. Pour cela, choisissons un graphe planaire connexe fini $\mathcal{G}$ et cherchons à en étiqueter les arêtes de manière à obtenir un diagramme de Van Kampen pour R, *i.e.* de façon à ce que les mots lus sur les bords des faces soient des (permutations cycliques d') éléments de R ou de leurs inverses. Imaginons pour simplifier que le bord $\partial\mathcal{G}$ soit une courbe simple. On peut considérer le problème comme une « équation » dans laquelle on cherche pour chaque face un élément de R avec des conditions de compatibilité le long des arêtes communes à deux faces. L'« inconnue » est donc un élément de $R^{|\mathcal{G}|}$ et chaque arête commune à deux faces donne une contrainte. Ici, l'ensemble de référence X peut être choisi comme étant $S(\ell - c, \ell + c)$. Remarquons que la codensité dans X de l'ensemble des mots ayant ℓ_0 lettres fixées est ℓ_0/ℓ (à $O(1/\ell)$ près, mais nous négligeons ce « détail »). On peut calculer la densité de l'ensemble des solutions pour un R aléatoire (*i.e.* toujours lorsque ℓ tend vers l'infini) : on trouve bien sûr $d|\mathcal{G}| - \sum \ell_i/\ell$ où la somme est étendue sur toutes les longueurs ℓ_i des frontières communes entre faces. Puisque chaque face a (environ) ℓ arêtes dans son bord et que chaque arête intérieure est dans le bord de deux faces, on peut exprimer cette densité comme $d|\mathcal{G}| - (\ell|\mathcal{G}| - |\partial\mathcal{G}|)/2\ell = (d - \frac{1}{2})|\mathcal{G}| + |\partial\mathcal{G}|/2\ell$. Par conséquent, s'il y a « trop d'équations », c'est-à-dire si $|\partial\mathcal{G}| < \ell(1-2d)|\mathcal{G}|$, l'ensemble des solutions est très probablement vide. Cela signifie que si l'on considère l'ensemble fini de tous les graphes $\mathcal{G}$ dont l'aire est inférieure à une constante K, très probablement, seuls ceux qui vérifient l'inégalité inverse $|\partial\mathcal{G}| \geqslant \ell(1-2d)|\mathcal{G}|$ apparaissent comme diagramme du groupe défini par R. Le principe de Cartan-Hadamard-Gromov peut alors s'appliquer et, en choisissant K assez grand, on conclut que le groupe associé à R est très probablement hyperbolique.

Avant de montrer que le groupe est infini, rappelons une construction classique. Soit $\Gamma = \langle a_1, \dots, a_g \mid m_1, \dots, m_r \rangle$ un groupe de présentation finie. On recolle r disques topologiques le long de leurs bords sur un bouquet de g cercles, les applications de recollement étant données par les mots m_j. Le groupe fondamental du 2-complexe fini ainsi obtenu est bien sûr isomorphe à Γ et son revêtement universel est le 2-complexe de Cayley associé à la présentation, dont le 1-squelette est le graphe de Cayley (si les éléments de S ne sont pas d'ordre 2, ce que nous supposerons dans la suite).

L'argument précédent peut s'appliquer à des « diagrammes sphériques », c'est-à-dire à des graphes étiquetés tracés sur la sphère et tels que les mots lus sur *toutes* les faces soient des conjugués cycliques d'éléments de R ou de leurs inverses. Ces nouveaux diagrammes n'ayant pas de bord, le calcul précédent montre que très probablement un tel diagramme ne se rencontre pas dans le groupe défini par R. Ceci entraîne que le 2-complexe de CAYLEY est 2-connexe et donc contractile. Le groupe associé à R agit donc sur un complexe contractile de dimension 2 et *sa dimension cohomologique est donc égale à* 2. En particulier, ce groupe est *sans torsion* et *non élémentaire* car sa caractéristique d'EULER-POINCARÉ est égale à $1 - g + |R|$.

L'esquisse de preuve que nous venons de présenter n'est qu'une esquisse... De nombreux problèmes « techniques » se présentent dont le principal provient du fait que nous avons supposé (implicitement !) dans notre calcul de densité que les relateurs placés sur les faces du diagramme sont différents, de façon à pouvoir traiter les équations comme « indépendantes ». Pour obtenir une « vraie preuve », il faut des estimations beaucoup plus soigneuses qui sont parfois délicates. Y. OLLIVIER a rédigé une preuve complète dans [Oll03a].

Quotients aléatoires d'un groupe hyperbolique

Si la densité de R est strictement inférieure à $1/2$, le groupe Γ engendré par les a_i et soumis aux relations R est très probablement hyperbolique non élémentaire ; on aimerait itérer la construction précédente et ajouter de nouvelles relations R' dont les longueurs sont grandes par rapport à ℓ. Nous allons décrire rapidement cette généralisation.

Soit Γ un groupe engendré par une partie finie symétrique S à $2g$ éléments. Considérons le nombre $f(2n)$ de mots réduits dans les éléments de S de longueur $2n$ qui représentent l'élément neutre de Γ. La « densité des mots triviaux », c'est-à-dire la limite $\eta = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \log_{2g-1} f(2n)$ existe : c'est la *cocroissance* du groupe Γ (relativement à S), reliée à la vitesse de fuite à l'infini de la marche aléatoire sur Γ. Lorsque Γ n'est pas librement engendré par S, on a toujours $\eta > 1/2$ (car si w est un mot réduit trivial dans Γ, tous les mots de la forme $\gamma w \gamma^{-1}$ le sont également de sorte que $f(2n + |w|) \geqslant (2g-1)^n$). Pour cette raison, on convient de définir la cocroissance du groupe libre par rapport à une base comme étant $1/2$.

Soit Γ un groupe hyperbolique non élémentaire sans torsion engendré par $(a_1, a_2, \ldots, a_g)$ et soit $\eta \geqslant 1/2$ la cocroissance correspondante. Soit d une densité dans l'intervalle $[0,1]$ et $c, c' \geqslant 1$ deux constantes auxiliaires. On note toujours $S(\ell - c, \ell + c)$ l'ensemble des mots réduits dont la longueur est comprise entre $\ell - c$ et $\ell + c$. Une partie $R \subset S(\ell - c, \ell + c)$ est de densité d si son cardinal est compris entre ${c'}^{-1}|S(\ell - c, \ell + c)|^d$ et $c'|(S(\ell - c, \ell + c)|^d$. On note $\langle R \rangle$ le sous-groupe normal de Γ engendré par la projection de R dans Γ. Le théorème suivant est dû à Y. OLLIVIER [Oll03a, Oll03b, Oll03c].

THÉORÈME

– *Si $d > 1 - \eta$, la probabilité pour qu'une partie $R \subset S(\ell - c, \ell + c)$ de densité d définisse un groupe quotient* $\Gamma/\langle R\rangle$ trivial *tend vers* 1 *quand la longueur ℓ tend vers l'infini.*

– *Si $d < 1 - \eta$, la probabilité pour qu'une partie $R \subset S(\ell - c, \ell + c)$ de densité d définisse un groupe quotient* $\Gamma/\langle R\rangle$ hyperbolique non élémentaire *tend vers* 1 *quand la longueur ℓ tend vers l'infini.*

Ce théorème possède plusieurs variantes : au lieu de considérer des parties R dans $S(\ell - c, \ell + c)$, c'est-à-dire dans le groupe libre, on peut prendre des parties dans Γ formées d'éléments de norme ℓ *dans* Γ. On obtient des énoncés analogues.

L'esprit de la preuve de ces théorèmes est proche de celui que nous avons décrit lorsque Γ est un groupe libre mais les difficultés techniques sont assez considérables. On considère d'abord une présentation de Γ sous la forme $\langle a_1, a_2, \ldots, a_g \mid m_1, m_2, \ldots, m_r\rangle$, de sorte que le groupe quotient $\Gamma/\langle R\rangle$ possède une présentation dont les relateurs sont d'une part les m_j et d'autre part les éléments de R. Un diagramme pour $\Gamma/\langle R\rangle$ possède donc deux sortes de faces. Si ℓ est grand, les premières sont « petites » par rapport aux secondes. Si ℓ est grand par rapport à la constante d'hyperbolicité δ_S du groupe Γ, la géométrie de la « partie petite » d'un diagramme est proche de celle d'un arbre (les espaces δ-hyperboliques s'approchent bien par des arbres [Gr87, GhH90]). On peut alors établir qu'un diagramme est constitué de « grandes faces » entourées par des zones fines, dont l'épaisseur est de l'ordre de $\log \ell$. On estime le nombre de manières d'étiqueter un diagramme avec des générateurs et les « équations de compatibilité » que nous avons rencontrées le long des arêtes communes à plusieurs faces doivent maintenant être remplacées par des « quasi-compatibilités » dues au fait que les grandes faces ne sont pas exactement jointives. C'est à ce niveau que la cocroissance intervient de manière naturelle puisqu'elle permet bien sûr d'estimer le nombre de mots qui sont petits quand on les projette dans Γ. Pour les (nombreux) détails de cette preuve, voir [Oll03a, Oll03b, Oll03c].

3. PETITE SIMPLIFICATION

La théorie des *groupes à petite simplification* tire son origine d'un article de 1949 par V.A. TARTAKOVSKII qui cherchait à généraliser la solution géométrique au problème des mots donnée par M. DEHN dans le cas du groupe fondamental d'une surface compacte. Initialement de nature très combinatoire, cette théorie a pris un aspect plus topologique grâce à R.C. LLYNDON, P.E. SCHUPP et M. GREENDLINGER [LS01]. Plus récemment, M. GROMOV lui donne un aspect purement géométrique qui permet de vastes généralisations [Gr01a, Gr01b, Gr01c] que nous allons commencer à survoler dans cette partie.

Théorie classique

Considérons deux mots m_1 et m_2 en les lettres $a_1^{\pm 1}, \dots, a_g^{\pm 1}$ que nous supposons cycliquement réduits. Une *pièce* entre m_1 et m_2 est un mot p qui apparaît comme un segment initial dans l'écriture de conjugués cycliques m_1' et m_2' de $m_1^{\pm 1}$ et $m_2^{\pm 1}$ tels que m_1' est *distinct* de ${m_2'}^{\pm 1}$. Par exemple, le mot $\mathbf{a_1 a_2}$ est une pièce entre $a_2 a_2 \mathbf{a_1 a_2} a_1 a_1 a_2$ et $a_1 a_1 \mathbf{a_2^{-1} a_1^{-1}} a_2$, entre $\mathbf{a_1 a_2} a_3 \mathbf{a_1 a_2}$ et lui-même, mais pas entre $a_1 a_2 a_1 a_2$ et lui-même. Pour $0 < \lambda < 1$, on dit qu'un ensemble de mots $\{m_1, \dots, m_r\}$ vérifie la condition de petite simplification $C'(\lambda)$ si toute pièce entre deux mots m_{j_1} et m_{j_2} est de longueur strictement inférieure à λ fois la plus petite des longueurs de m_{j_1} et de m_{j_2}. Dans ce cas, on dit que le groupe $\Gamma = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid m_1, m_2, \dots, m_r \rangle$ *vérifie la condition de petite simplification* $C'(\lambda)$ (même s'il s'agit en fait d'une propriété de la présentation).

La remarque importante est que, dans un diagramme de Van Kampen réduit relatif à une présentation, les composantes connexes de l'intersection de deux faces adjacentes sont (étiquetées par) des pièces. Si l'on suppose une condition $C'(1/6)$, il en résulte que chaque face intérieure au diagramme est entourée par au moins 7 de ces pièces. Un argument facile de caractéristique d'Euler permet alors de montrer que l'intersection d'au moins une des faces du diagramme avec le bord du diagramme a une composante connexe de longueur strictement supérieure à la moitié du périmètre de cette face. Si un mot w réduit en les $a_i^{\pm 1}$ est trivial dans Γ, il contient donc un sous-mot w' qui est le début d'un conjugué cyclique $\overline{m}$ de l'un des $m_j^{\pm 1}$, de longueur strictement supérieure à la moitié de celle de $\overline{m}$. Remplaçant alors w' dans w par $\overline{m}^{-1} w'$, on obtient après réduction un nouveau mot w_1, plus court que w, qui est encore trivial dans Γ et l'itération du procédé mène au mot trivial : c'est l'*algorithme de* Dehn pour les groupes $C'(1/6)$, qui fut la motivation initiale pour l'introduction de ce concept. Une autre conséquence facile est l'inégalité isopérimétrique linéaire pour ces groupes : *les groupes à petite simplification* $C'(1/6)$ *sont donc hyperboliques.* Il s'agit en fait de groupes hyperboliques assez particuliers et la forme des triangles dans le graphe de Cayley est très facile à analyser [GhH90, Ch94]. Dans [Gr01a], M. Gromov montre que beaucoup de groupes $C'(1/6)$ agissent en fait par isométries sur un 2-complexe simplement connexe muni d'une métrique à courbure négative (*i.e.* vérifiant une condition $CAT(-k^2)$, voir [BH99]) mais cette construction ne s'étend malheureusement pas aux cas plus généraux que nous allons rencontrer dans la suite de ce texte.

Étant donnée une partie R de $S(\ell - c, \ell + c)$ de densité $d \in [0,1]$ comme au paragraphe précédent, il est facile d'estimer la taille probable des plus grandes pièces entre les éléments de R : si $2d < \lambda$, le groupe défini par les relations R vérifie très probablement $C'(\lambda)$. On remarque donc que ceci donne une autre preuve du théorème B lorsque $d < 1/12$ mais que pour $1/12 \leqslant d < 1/2$ les groupes hyperboliques que nous avons construits grâce à ce théorème ne sont pas redevables de la théorie des groupes $C'(1/6)$.

Théorie relative : le théorème A

La théorie classique de la petite simplification est parfaitement adaptée pour étudier des groupes $\langle a_1, a_2, \ldots, a_g \mid m_1, m_2, \ldots, m_r\rangle$ dont on fixe le nombre de générateurs g et de relateurs r, lorsque les longueurs des relateurs tendent vers l'infini, *à condition que ces longueurs gardent le même ordre de grandeur.* Pour chaque $0 < \lambda < 1$, la condition $C'(\lambda)$ est alors très probablement satisfaite et le groupe est hyperbolique non élémentaire. Ce cas correspond d'ailleurs à celui où la densité d est nulle dans le théorème B. Un cas très analogue est celui où l'on choisit les r relateurs aléatoirement dans la boule de rayon ℓ car dans cette boule, une grande proportion des éléments ont en fait une norme très proche de ℓ (par la croissance exponentielle du groupe libre). Dans ce dernier modèle élémentaire, on peut cependant obtenir des informations algébriques plus précises sur les groupes aléatoires obtenus [Ar97, Ar98, AO96, KS02].

Une difficulté sérieuse apparaît lorsque les m_j sont tous très longs mais de longueurs très différentes. Si par exemple, la longueur de m_2 est de l'ordre de l'exponentielle de celle de m_1, il est probable que m_1 soit un sous-mot de m_2 et aucune condition de petite simplification n'est satisfaite. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'introduire un concept de *petite simplification relativement à un groupe hyperbolique.* Suivant des indications succinctes de M. Gromov ([Gr87, 5.5.F]), cette théorie relative a été mise au point indépendamment par C. Champetier, T. Delzant et Y. Olshanskiĭ [Ch91, Ch93, Ch94, De96, Ols92a, Ols92b].

Soit Γ un groupe hyperbolique non élémentaire engendré par une partie finie symétrique S, et $\delta_S \geqslant 0$ la constante d'hyperbolicité correspondante. Un mot m de longueur $|m|$ en les éléments de S est *géodésique* ou *minimal* si l'élément γ de Γ qu'il définit est de norme $|\gamma|_S = |m|$, et *minimal dans sa classe de conjugaison* si de plus tous les conjugués de γ ont une norme supérieure ou égale à $|m|$. Si m_1 et m_2 sont minimaux dans leur classe de conjugaison, une *a-pièce* est la donnée de deux sous-mots p_1 et p_2 de conjugués cycliques de m_1 et m_2 qui sont a-proches dans le sens suivant : il existe deux mots u, v de longueur inférieure à a tels que $p_1 = up_2v$ dans Γ. Il faut cependant exclure de la définition un cas trivial : si m'_1 et m'_2 désignent les conjugués cycliques qui commencent par p_1 et p_2, on demande que les éléments m'_1 et um'_2u^{-1} de Γ ne soient pas égaux. Il est important de remarquer que la valeur de a n'est pas très importante pour des éléments de grandes longueurs : un argument élémentaire montre que si m_1 et m_2 partagent une a-pièce de longueur t, alors ils partagent une $2\delta_S$-pièce de longueur $t - 2a$, ce qui justifie de se limiter aux $2\delta_S$-pièces.

Soit $0 < \lambda < 1$ et R un ensemble de mots minimaux dans leur classe de conjugaison. On dit que R vérifie une *condition de petite simplification $C'(\lambda)$ relativement à* (Γ, S) si d'une part tous les éléments de R sont assez grands (de longueur supérieure à $\mathrm{cst}\cdot\delta_S$ pour une constante universelle cst dont la valeur précise n'a que peu d'intérêt) et si, d'autre part, pour tout couple de mots m_1, m_2, toute $2\delta_S$-pièce entre m_1 et $m_2^{\pm 1}$ est de longueur inférieure à $\lambda \inf(|m_1|, |m_2|)$. Nous énonçons le résultat principal de cette théorie relative sous la forme donnée par T. Delzant [De96].

Théorème. — *Si $\lambda < 1/8$ et si R vérifie la condition de petite simplification $C'(\lambda)$, alors le quotient $\Gamma/\langle R\rangle$ de Γ par le sous-groupe normal engendré par (la projection dans Γ de) R est hyperbolique (de constante d'hyperbolicité inférieure à $\mathrm{cst}\cdot\sup_{m\in R}|m|$). De plus, la boule de rayon $\frac{1}{4}\inf_{m\in R}|m| - \mathrm{cst}\cdot\delta_S$ dans Γ s'injecte dans le quotient $\Gamma/\langle R\rangle$.*

La démonstration de ce théorème est fondée sur une propriété importante des espaces métriques δ-hyperboliques (X,d) [Gr87] : pour toute partie finie $E \subset X$, il existe un arbre métrique fini (T,d') et une application $i : E \to T$ telle que pour tout (x,y), on a $d(x,y) - 2\delta\log_2(|E|-2) \leqslant d'(i(x),i(y)) \leqslant d(x,y)$.

La *démonstration du théorème* A de généricité des groupes hyperboliques parmi les groupes dont on fixe le nombre g de générateurs et le nombre r de relateurs est un corollaire facile de cette théorie relative. Supposons par exemple, $r = 2$ et $\ell_1 \leqslant \ell_2$. Si $\ell_2 \leqslant \ell_1^3$ et ℓ_1 tend vers l'infini, la probabilité pour que le groupe $F_g/\langle m_1, m_2\rangle$ soit à petite simplification $C'(1/100)$ tend vers 1. Si par contre ℓ_1 tend vers l'infini et $\ell_2 \geqslant \ell_1^3$, on procède en deux étapes. Tout d'abord, la probabilité pour que le groupe $F_g/\langle m_1\rangle$ soit $C'(1/100)$ tend vers 1. Puis on montre (assez facilement) que la probabilité pour que (la réduction géodésique de) $\{m_2\}$ soit à petite simplification $C'(1/100)$ relativement à $F_g/\langle m_1\rangle$ tend également vers 1, de sorte que $F_g/\langle m_1, m_2\rangle = (F_g/\langle m_1\rangle)/\langle m_2\rangle$ est également hyperbolique. Bien entendu, les groupes hyperboliques ainsi construits sont assez particuliers : C. Champetier montre aussi (pour $r = 2$) que lorsque les longueurs ℓ_i tendent vers l'infini, les groupes obtenus sont très probablement *sans torsion et de dimension cohomologique* 2.

4. ESPACE DES GROUPES DE TYPE FINI

L'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de type fini (*i.e.* engendrés par une partie finie) est non dénombrable (voir [Ne37] pour une jolie preuve). On appelle *groupe marqué* à g générateurs la donnée d'un sous-groupe normal N du groupe libre à g générateurs F_g, ou d'une surjection $F_g \to F_g/N$ de F_g sur un de ses quotients. De manière équivalente, il s'agit d'un groupe dont on a fixé une famille génératrice $(a_1, \ldots, a_g)$. L'ensemble $\mathcal{G}r_g$ de ces groupes marqués est naturellement muni d'une topologie métrisable qui en fait un compact totalement discontinu : deux groupes marqués sont proches si les noyaux des surjections correspondantes ont la même intersection avec une grande boule dans F_g. Deux groupes marqués proches ont des graphes de Cayley qui sont « les mêmes » dans une grande boule. Dans cette topologie, les groupes de présentation finie forment une partie dénombrable dense. L'étude de cet espace n'en est qu'à ses débuts : nous allons décrire rapidement quelques résultats de C. Champetier [Ch91, Ch93, Ch94, Ch95, Ch00] et M. Gromov [Gr93].

Relation d'isomorphisme

Un groupe de type fini peut être engendré de nombreuses manières par une partie finie, de sorte qu'il existe une relation d'équivalence naturelle, l'isomorphisme $\simeq$, sur ces espaces $\mathcal{G}r_g$, dont l'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes à g générateurs. C'est ce quotient qu'on aimerait comprendre.

Chaque $\mathcal{G}r_g$ se plonge dans $\mathcal{G}r_{g+1}$ comme un ouvert fermé (par composition à la source avec la surjection de F_{g+1} sur F_g qui envoie le dernier générateur sur l'identité). On peut donc considérer la réunion croissante $\mathcal{G}r$ des $\mathcal{G}r_g$: c'est l'espace localement compact des groupes marqués de type fini, ou encore l'espace des sous-groupes normaux de $F_\infty = F(a_1, \dots)$ qui contiennent les a_i avec i assez grand. Si un groupe est engendré par $(a_1, a_2, \dots, a_g)$, il est également engendré par $(id, a_1, a_2, \dots, a_g)$, par $(a_1^{-1}, a_2, \dots, a_g)$, par $(a_1a_2, a_2, \dots, a_g)$ et par $(a_2, a_1, \dots, a_g)$. Chacun de ces changements de famille génératrice peut être vu comme un homéomorphisme de $\mathcal{G}r$ et un théorème classique de Tietze peut s'interpréter en disant que les orbites du groupe T engendré par ces quatre homéomorphismes de $\mathcal{G}r$ sont précisément les classes d'isomorphisme [LS01]. Une fonction $i : \mathcal{G}r \to E$ définit un invariant de groupe (*i.e.* indépendant de la famille génératrice) si et seulement si elle est invariante par l'action de T. Un tel invariant est particulièrement intéressant si E est un espace borélien standard (isomorphe à un espace métrique séparable muni de la tribu de ses boréliens) et si i est une application borélienne. Par exemple, le rang d'un groupe (cardinal minimum d'une famille génératrice) où les nombres de Betti sont de tels invariants. Il se trouve que l'action de T sur $\mathcal{G}r$ est trop compliquée pour que le quotient soit standard : voici un résultat de [Ch91, Ch93, Ch94, Ch95, Ch00] (voir aussi [SZ94]).

Théorème. — *Il n'existe pas d'application borélienne $i : \mathcal{G}r \to E$ dans un espace borélien standard qui sépare les classes d'isomorphisme, i.e. telle que $i(x) = i(y)$ si et seulement si $x \simeq y$.*

La démonstration de ce théorème est une jolie application de la théorie de la petite simplification classique. Soit ϕ un automorphisme du groupe libre F_2 et w un élément de F_2. Pour chaque suite $e : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$, on considère le groupe marqué Γ_e qui est le quotient de F_2 par le sous-groupe normal engendré par les $\phi^i(w)$ pour les i tels que $e(i) = 1$. Ceci définit une application (borélienne) de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{G}r$. Il est clair que si on définit les suites décalées $e_k(i) = e(i+k)$, tous les groupes marqués Γ_{e_k} sont dans la même classe d'isomorphisme. Si l'on choisit ϕ défini par $\phi(a_1) = a_1a_2$ et $\phi(a_2) = a_1$, il n'est pas difficile de trouver des mots w assez compliqués pour s'assurer que la famille $\{\phi^i(w)\}$ $(i \in \mathbb{N})$ vérifie la condition de petite simplification $C'(1/6)$. Ceci permet de montrer que Γ_e et $\Gamma_{e'}$ ne sont isomorphes que si e et e' sont décalées l'une de l'autre. On obtient donc un plongement de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{G}r$ et la relation induite par $\simeq$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est celle définie par le décalage. Le théorème résulte du fait que les fonctions boréliennes invariantes par décalage ne séparent pas les orbites (il suffit par exemple d'utiliser l'ergodicité du décalage pour la mesure de BERNOULLI $(1/2,1/2)$).

Dans [TV99], S. THOMAS et B. VELICKOVIC vont plus loin et montrent que la relation $\simeq$ est *universelle*, c'est-à-dire que pour toute relation d'équivalence $\equiv$ borélienne à classes dénombrables sur un borélien standard X, il existe une application borélienne $f : X \to \mathcal{G}r$ telle que $f(x) \simeq f(y)$ si et seulement si $x \equiv y$. Autrement dit, la relation d'isomorphisme $\simeq$ est aussi compliquée que possible...

Puisque l'action de T sur $\mathcal{G}r$ n'a pas de bon quotient mesurable, on pourrait tenter une description « ergodique » de cet espace quotient. Malheureusement, on ne sait pas s'il existe une mesure de RADON sur $\mathcal{G}r$ qui soit quasi-invariante par T (*i.e.* telle que la collection des boréliens de mesure nulle soit invariante par T). La non existence d'une mesure *invariante* paraît probable mais elle ne semble pas établie. L'approche topologique paraît donc plus adaptée mais là encore notre compréhension n'est que très partielle. On trouve une discussion intéressante des problèmes de cette nature dans [Gr93].

Adhérence des groupes hyperboliques : le théorème C

Les groupes marqués de présentation finie forment évidemment une partie dénombrable dense dans $\mathcal{G}r$. Les propriétés des groupes hyperboliques, extrêmement stables grâce à la théorie de la petite simplification relative, permettent d'obtenir des informations sur leur adhérence dans l'espace des groupes de type fini. On note $\mathcal{H}yp$ et $\mathcal{H}yp^{st}$ les parties de $\mathcal{G}r$ définies par les groupes hyperboliques non élémentaires et hyperboliques non élémentaires sans torsion, et $\overline{\mathcal{H}yp}$, $\overline{\mathcal{H}yp^{st}}$ leurs adhérences dans $\mathcal{G}r$.

Étant donné un élément γ d'ordre infini d'un groupe hyperbolique marqué non élémentaire Γ, on montre sans (trop de) difficulté qu'il possède des puissances arbitrairement grandes γ^n telles que le singleton $\{\gamma^n\}$ vérifie une condition de petite simplification $C'(1/10)$ relativement à Γ. Ces groupes $\Gamma_n = \Gamma/\langle\gamma^n\rangle$ sont donc hyperboliques non élémentaires et convergent vers le groupe Γ. Par conséquent, pour chaque élément w de F_g, l'ensemble des groupes marqués à g générateurs tels que (la projection de) l'élément w soit d'ordre fini, est un ouvert qui rencontre $\mathcal{H}yp$ sur une partie dense dans $\overline{\mathcal{H}yp}$. Le théorème de BAIRE implique alors :

THÉORÈME. — *Il existe un G_δ dense dans l'adhérence des groupes hyperboliques non élémentaires $\overline{\mathcal{H}yp}$ formé de groupes dont tous les éléments sont d'ordre fini.*

L'existence de groupes infinis de type fini dont tous les éléments sont de torsion est déjà remarquable. Dans [IO96], S. IVANOV et Y. OLSHANSKIĬ montrent en fait que tout groupe hyperbolique non élémentaire possède un quotient infini de torsion dont les ordres des éléments sont *bornés*. Une approche plus géométrique de ce résultat est en cours de rédaction par T. DELZANT et M. GROMOV.

Si Γ est un groupe quelconque, son *centre virtuel* $Z^{\mathrm{virt}}(\Gamma)$ est le sous-groupe normal formé des éléments qui n'ont qu'un nombre fini de conjugués. Lorsque Γ est hyperbolique non élémentaire, $Z^{\mathrm{virt}}(\Gamma)$ est un groupe fini et on s'assure que $\Gamma/Z^{\mathrm{virt}}(\Gamma)$ est un groupe hyperbolique dont le centre virtuel est trivial. L'existence d'un centre virtuel non trivial est source de difficultés techniques. Notons en effet $C(\Gamma)$ le centralisateur dans Γ de $Z^{\mathrm{virt}}(\Gamma)$ (d'indice fini dans Γ) et soit γ un élément de $\Gamma - C(\Gamma)$. Alors $\{\gamma\}$ ne peut pas vérifier de condition de petite simplification. En effet, il existe par définition un élément z du centre virtuel tel que $\gamma z\gamma^{-1} \neq z$ de sorte que si $a = \sup(|z|_S, |\gamma z\gamma^{-1}|_S)$, on peut dire que γ partage une a-pièce avec lui-même. Dans la construction précédente d'éléments de torsion par exemple, pour s'assurer que $\{\gamma^n\}$ est à petite simplification, il fallait choisir n tel que $\{\gamma^n\}$ soit dans $C(\Gamma)$. En général, il est agréable de supposer que Γ est à centralisateurs cycliques, *i.e.* le centralisateur de chaque élément non trivial est cyclique, fini ou infini. Cette propriété garantit la trivialité du centre virtuel ; elle est par exemple satisfaite si le groupe hyperbolique est sans torsion. On note $\overline{\mathcal{H}yp^{cc}}$ l'adhérence des groupes hyperboliques non élémentaires dont les centralisateurs de tous les éléments non triviaux sont cycliques, finis ou infinis : il s'agit d'un ensemble de Cantor.

Nous pouvons maintenant esquisser la preuve du théorème C, donnée dans ses grandes lignes dans [Gr87] puis mise au point dans [Ols92a, Ols92b] et [Ch91, Ch93, Ch94, Ch95, Ch00] sous des formes légèrement différentes. Nous suivons ici [Ch00] qui travaille directement dans l'espace $\mathcal{G}r$. Soit Γ un groupe hyperbolique non élémentaire et sans torsion (resp. à centralisateurs cycliques) engendré par $(a_1, \dots, a_g)$, soient $H_1, \dots, H_k$ des sous-groupes non élémentaires et ℓ un entier (grand). La première étape consiste à construire une surjection π de Γ sur un groupe hyperbolique $\overline{\Gamma}$ non élémentaire sans torsion (resp. à centralisateurs cycliques) tel que d'une part chacun des H_i se surjecte sur $\overline{\Gamma}$ et, d'autre part, la restriction de π à la boule de rayon ℓ dans Γ est injective. De plus, on peut choisir π de telle sorte que $\overline{\Gamma}$ soit engendré par deux éléments. Supposons pour simplifier que $k = 1$. On cherche des éléments h_i $(i = 1, \dots, g+2)$ qui appartiennent à H_1 et qui sont tels que $a_1^{-1}h_1, \dots, a_g^{-1}h_g, h_{g+1}, h_{g+2}$ soient de très grande norme et forment une famille vérifiant une condition de petite simplification relative. Si l'on dispose d'une telle famille, le quotient $\overline{\Gamma} = \Gamma/\langle a_1^{-1}h_1, \dots, a_g^{-1}h_g\rangle$ est hyperbolique. Par construction, H_1 se surjecte sur $\overline{\Gamma}$ car l'image de H_1 dans $\overline{\Gamma}$ contient tous les $\pi(a_i)$. Par ailleurs les projections de h_{g+1} et h_{g+2} dans $\overline{\Gamma}$ engendrent un groupe libre de sorte que $\overline{\Gamma}$ est non élémentaire. C'est la condition sur la torsion (ou sur les centralisateurs cycliques) qui permet de construire assez facilement de tels éléments h_i (on choisit des h_i de longueurs comparables et on montre que lorsque ces longueurs tendent vers l'infini la proportion des choix qui ne vérifient pas la condition cherchée tend vers 0) ; et on peut par ailleurs assurer que le quotient $\overline{\Gamma}$ est lui-même sans torsion ou à centralisateurs cycliques suivant le cas. Enfin, en appliquant la construction précédente au produit libre $\Gamma \star F_2$ muni des sous-groupes H_i et F_2, on peut faire en sorte que $\overline{\Gamma}$ soit engendré par deux éléments.

Considérons maintenant k groupes hyperboliques marqués à g générateurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, sans torsion (resp. à centralisateurs cycliques) et appliquons le fait précédent à leur produit libre. On obtient ainsi une surjection de $\Gamma_1 \star \cdots \star \Gamma_k$ sur un groupe $\overline{\Gamma}$ hyperbolique non élémentaire sans torsion (resp. à centralisateurs cycliques) engendré par deux éléments. Cette surjection est injective sur une grande boule et surjective en restriction à chaque facteur. En termes de l'espace des groupes de type fini $\mathcal{G}r$, cela signifie que si l'on choisit des voisinages U_i des Γ_i dans $\mathcal{G}r$, il existe un $\overline{\Gamma}$ dont la classe d'isomorphisme rencontre chacun des U_i. Utilisant encore le théorème de BAIRE et le fait qu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de classes d'isomorphisme de groupes hyperboliques, on obtient le fait que la relation $\simeq$ est topologiquement transitive dans $\overline{\mathcal{H}yp^{cc}}$ et $\overline{\mathcal{H}yp^{st}}$:

THÉORÈME. — *Dans $\overline{\mathcal{H}yp^{cc}}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}yp^{st}}$), il existe un G_δ dense formé de groupes marqués dont la classe d'isomorphisme est dense dans $\overline{\mathcal{H}yp^{cc}}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}yp^{st}}$). Ces groupes peuvent être choisis de rang 2, c'est-à-dire engendrés par deux éléments.*

Il existe des groupes hyperboliques sans torsion ayant la propriété (T) de KAZHDAN (voir par exemple [HV89] et la fin de cet exposé). Puisqu'un quotient d'un groupe ayant cette propriété a également cette propriété, on obtient un ouvert non vide dans $\mathcal{G}r$ formé de tels groupes. Comme cet ouvert rencontre nécessairement le G_δ dense construit précédemment, on en déduit l'existence d'un *ouvert dense dans $\overline{\mathcal{H}yp^{cc}}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}yp^{st}}$) formé de groupes ayant la propriété (T).* Les autres propriétés génériques mentionnées dans le théorème C se montrent de manière analogue.

5. MODÈLE À GRAPHE

Petite simplification sur un graphe fini

La théorie classique de la petite simplification montre ses faiblesses dans des cas très simples. Considérons par exemple trois mots réduits m_1, m_2, m_3, de même longueur, en les lettres $a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}$, et le groupe dont une présentation est $\langle a_1, a_2 \mid m_1 = m_2 = m_3 \rangle$. On peut évidemment écrire cette présentation sous la forme habituelle $\langle a_1, a_2 \mid m_1 m_2^{-1}, m_3 m_2^{-1} \rangle$ mais il est clair que cette nouvelle présentation n'est pas à petite simplification car m_2 est une pièce dont la longueur est la moitié de celle des relateurs (au moins si $m_1 m_2^{-1}$ et $m_3 m_2^{-1}$ sont des mots réduits). Dans [Gr01a, Gr01b, Gr01c, Gr03], on trouve une théorie bien plus générale qui peut par exemple s'adapter à la situation précédente lorsque les mots m_i n'ont pas de grandes pièces entre eux. Soit (X, A) un graphe fini constitué d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble $A \subset X \times X$ d'arêtes. On suppose qu'il n'y a pas de boucles et que le graphe est symétrique : si $a = (x, x')$ est une arête, il en est de même pour $\overline{a} = (x', x)$. *On munira toujours les sommets d'un graphe de la distance combinatoire, longueur minimale des chemins joignant deux sommets.* Étant donnée une famille finie de lettres $(a_1, \ldots, a_g)$, on peut étiqueter le graphe en écrivant sur chaque arête l'une des lettres $a_i^{\pm 1}$, en faisant en sorte que les étiquettes portées par deux arêtes $a, \overline{a}$ sont inverses l'une de l'autre. Sur chaque chemin du graphe, on peut donc lire un mot en les $a_i^{\pm 1}$. Un tel graphe étiqueté définit naturellement un groupe, quotient du groupe libre de base les a_i par le sous-groupe normal engendré par les mots lus sur les cycles du graphe. Lorsque la réalisation géométrique du graphe est un bouquet de cercles, on retrouve la notion classique de présentation de groupe. Il est bien clair que les groupes définis de cette manière ne sont autres que les groupes de présentation finie mais la « présentation » en termes de graphes est souvent plus adaptée.

Nous allons définir une notion de pièce pour un tel graphe étiqueté (X, A, e). Supposons d'abord que l'étiquetage soit *réduit*, c'est-à-dire que deux arêtes consécutives (et non inverses) ne portent pas des étiquettes inverses. Une *pièce* est un graphe étiqueté qui se plonge de deux manières différentes dans (X, A, e) en respectant les étiquettes. Si $0 < \lambda < 1$, on dit que le graphe étiqueté vérifie la *condition de petite simplification* $C'(\lambda)$ si le diamètre de toute pièce est strictement inférieur à λ fois le *tour de taille* du graphe (la longueur de son plus petit cycle). Une esquisse de preuve géométrique du théorème suivant a été donnée par M. Gromov et Y. Ollivier en a donné une preuve combinatoire détaillée dans l'esprit de la démonstration classique [Oll03b].

Théorème. — *Si un graphe étiqueté réduit (X, A, e) vérifie la condition de petite simplification $C'(1/6)$, alors le groupe Γ qu'il définit est un groupe hyperbolique non élémentaire. La constante δ_S d'hyperbolicité peut être choisie égale au diamètre de (X, A). L'application naturelle de (X, A) dans le graphe de* Cayley *de Γ est un plongement isométrique.*

Partons d'un graphe fini (X, A) et choisissons aléatoirement un étiquetage e. Il est bien sûr probable que cet étiquetage n'est pas réduit mais on peut le réduire, c'est-à-dire construire un morphisme surjectif de graphes étiquetés $\pi : (X, A, e) \to (\overline{X}, \overline{A}, \overline{e})$ dont le but est réduit. On peut construire cette réduction par identifications successives de deux arêtes consécutives qui portent des étiquettes inverses, ou directement en identifiant deux sommets de (X, A, e) s'ils sont reliés par un chemin portant un mot trivial dans le groupe libre.

Nous considérons maintenant une suite de graphes finis connexes (X_ℓ, A_ℓ) (pour être précis, il n'est pas nécessaire que ℓ décrive tous les entiers mais une suite infinie nous suffira). Nous allons dégager des propriétés géométriques de cette famille de graphes qui garantiront que très probablement, les graphes étiquetés vérifient la condition $C'(1/6)$ (après réduction) :

(1) La valence de tous les sommets est au moins 2 (pas de sommet terminal) et bornée par 3 (par exemple).

(2) Le tour de taille de (X_ℓ, A_ℓ) est supérieur à ℓ et le diamètre de (X_ℓ, A_ℓ) est inférieur à 100ℓ.

(3) Le nombre de chemins plongés dans (X_ℓ, A_ℓ) de longueur inférieure à $\ell/2$ est inférieur à $\mathrm{cst} \cdot \beta^{\ell/2}$ pour une certaine constante $\beta > 1$ que nous déterminerons plus loin.

Supposons les conditions (1-2) satisfaites. Le nombre de sommets est alors inférieur à $3(2^{100\ell} - 1)$ de sorte que la condition (3) est vérifiée avec la constante $\beta_0 = 2^{100} + 1/2$. Si l'on subdivise toutes les arêtes de (X_ℓ, A_ℓ) en N arêtes, on obtient des graphes $(X_{\ell,N}, A_{\ell,N})$ dont le tour de taille est supérieur à $N\ell$, le diamètre inférieur à $100N\ell$ et dont le nombre de chemins de longueur inférieure à $N\ell/2$ est inférieur à $\mathrm{cst}_N(\beta_0)^{\ell/2} = \mathrm{cst}_N(\beta_0^{1/N})^{N\ell/2}$ et les conditions (1-2-3) sont donc satisfaites pour les graphes $(X_{\ell/N,N}, A_{\ell/N,N})$ avec la constante $\beta = (\beta_0)^{1/N}$ (pour ℓ multiple de N). *Si les deux premières conditions sont vérifiées et si $\beta > 1$ est donné il est donc facile de construire une suite de graphes vérifiant également la troisième condition, quitte à subdiviser suffisamment.*

Théorème. — *Si les conditions géométriques (1-2-3) sont satisfaites pour un choix de $\beta > 1$ suffisamment proche de 1, un étiquetage aléatoire de (X_ℓ, A_ℓ) mène très probablement à un graphe étiqueté réduit qui vérifie la condition $C'(1/6)$.*

Nous allons indiquer les étapes principales de la preuve. Pour un entier $n \geqslant 1$, considérons les $(2g)^n$ mots, réduits ou non, en les lettres $a_i^{\pm 1}$. Si p_n désigne la probabilité qu'un tel mot représente l'élément trivial du groupe libre, on sait que $\theta_0 = \lim_{n\to\infty}(p_{2n})^{1/2n} < 1$ (avec $\theta_0 = \sqrt{2g-1}/g$ mais nous préférons garder la notation θ_0 pour une référence ultérieure). On a donc une estimation de la forme $p_n \leqslant \mathrm{cst} \cdot \theta^n$ si $\theta_0 < \theta < 1$. Soit $0 < \alpha < 1$. La probabilité pour qu'un mot de longueur n représente un élément du groupe libre de norme inférieure à αn est inférieure à $\mathrm{cst} \cdot (2g)^{\alpha n} \theta^{(1+\alpha)n} \leqslant \mathrm{cst} \cdot (2g)^{\alpha n} \theta^n$. Nous choisissons α en fonction de g et θ de telle sorte que $(2g)^\alpha \theta < 1$; pour fixer les idées, nous supposons $\alpha = -\frac{1}{2} \log_{2g} \theta$ de sorte que $(2g)^\alpha \theta = \theta^{1/2}$.

Considérons maintenant un étiquetage aléatoire (X_ℓ, A_ℓ, e_ℓ) et majorons la probabilité pour qu'un mot lu sur au moins un chemin plongé de longueur n comprise entre $\varepsilon\ell$ et $\ell/2$ représente un élément du groupe libre de norme inférieure à αn, pour un $\varepsilon > 0$ que nous déterminerons plus loin. D'après la propriété (3), cette probabilité est inférieure à $\mathrm{cst} \cdot \beta^{\ell/2} \theta^{\varepsilon\ell/2}$. On constate donc que pour $\beta\theta^\varepsilon < 1$ on peut affirmer que très probablement quand ℓ tend vers l'infini, *tous* les chemins de longueur n comprise entre $\varepsilon\ell$ et $\ell/2$ lus sur le graphe étiqueté (X_ℓ, A_ℓ, e_ℓ) représentent des éléments du groupe libre dont la norme est au moins αn.

Si l'on choisit un point base dans (X_ℓ, A_ℓ), la donnée d'un étiquetage définit une application f_ℓ du revêtement universel de (X_ℓ, A_ℓ) (en ce point base) vers le graphe de

Cayley de F_g : on associe à chaque chemin issu du point base la valeur dans F_g du mot lu sur le chemin. Rappelons qu'une suite de points $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans un espace métrique δ-hyperbolique forme une (L_0, L_1, α^{-1}) *quasi-géodésique locale* si $|i-j| \leqslant L_1$ entraîne que la distance entre x_i et x_j est comprise entre $\alpha|i-j| - L_0$ et $\alpha^{-1}|i-j| + L_0$. On sait que si $L_1 \geqslant \mathrm{cst} \cdot \alpha^{-1}(\delta + L_0)$, ceci entraîne que pour tous les entiers i, j, la distance entre x_i et x_j est supérieure à $\frac{1}{2}(\alpha|i-j| - L_0)$, c'est-à-dire que (x_i) est une quasi-géodésique *globale* [Gr87, § 7] (cst est une constante universelle, de l'ordre de 10^5). Les estimations de distance pour $\varepsilon\ell \leqslant n \leqslant \ell/2$ montrent que la restriction de f_ℓ à une géodésique est une $(\alpha\varepsilon\ell, \ell/2, \alpha^{-1})$-quasi-géodésique locale. Par conséquent, si $\varepsilon \leqslant 1/(3\mathrm{cst})$ et si β est choisi comme précédemment, ces applications f_ℓ, pour ℓ assez grand, sont en fait des plongements quasi-isométriques globaux (remarquons en passant que nous n'utilisons pas le fait que le groupe est libre, c'est-à-dire que $\delta = 0$). Si x, x' sont deux sommets du revêtement universel de (X_ℓ, A_ℓ) à distance $s \geqslant \varepsilon\ell$, la distance entre leurs images est comprise entre $\alpha s/2$ et s. Ceci entraîne alors une quasi-convexité de l'image de f_ℓ : tout segment géodésique dans le graphe de Cayley de F_g qui joint deux points de l'image de f_ℓ reste à une distance bornée de cette image.

Nous allons montrer maintenant que le graphe réduit ne présente pas de pièce de longueur supérieure à $\alpha\ell/12$ (on remarquera que le tour de taille du graphe réduit est supérieur à $\alpha\ell$). Nous pouvons supposer que l'étiquetage est tel que la propriété précédente de quasi-isométrie est satisfaite puisque nous savons que c'est le cas avec une probabilité proche de 1. Une pièce de longueur s donne lieu à deux plongements différents d'un intervalle de longueur s dans le graphe réduit. Pour chaque chemin $\overline{c}$ de longueur s, plongé dans le graphe réduit, il existe un chemin c de longueur inférieure à $2s/\alpha$ dans le graphe (X_ℓ, A_ℓ) dont la projection contient $\overline{c}$. Si $s \leqslant \alpha\ell/12$, le chemin c est de longueur inférieure à $\ell/6$ et on peut le supposer plongé (remarquons que les boules dans le graphe (X_ℓ, A_ℓ) de rayon inférieur à $\ell/2$ sont des arbres). Une pièce de longueur supérieure à $\alpha\ell/12$ dans le graphe réduit permet donc de construire deux chemins c_1, c_2, plongés dans (X_ℓ, A_ℓ, e_ℓ), de longueur comprise entre $\alpha\ell/12$ et $\ell/6$, et sur lesquels on lit le même élément du groupe libre. Inversement, partons de deux chemins c_1, c_2 plongés dans (X_ℓ, A_ℓ) de longueur comprise entre $\alpha\ell/12$ et $\ell/6$ et calculons la probabilité pour qu'un étiquetage aléatoire les munissent de mots égaux dans le groupe libre. Si ces chemins sont disjoints, les étiquettes qu'on place sur chacune des arêtes de c_1 et c_2 sont indépendantes et la question revient donc à la suivante. Étant donnés deux entiers n_1 et n_2 compris entre $\alpha\ell/12$ et $\ell/6$ et deux mots aléatoires de longueurs n_1, n_2, quelle est la probabilité qu'ils représentent le même élément du groupe libre ? Cela revient évidemment à la trivialité d'un élément de longueur $n_1 + n_2$ de sorte que cette probabilité est bornée par $\mathrm{cst} \cdot \theta^{2\alpha\ell/12}$. Nous laissons au lecteur le soin d'étudier le cas un peu plus délicat où les deux chemins c_1 et c_2 se rencontrent et d'établir une borne analogue. Puisque le nombre de paires de chemins de longueur inférieure à $\ell/2$ est inférieur à $\mathrm{cst}\cdot\beta^\ell$, la probabilité d'existence d'une pièce de longueur supérieure à $\alpha\ell/12$ dans le graphe réduit est ainsi majorée par $\mathrm{cst}\cdot\beta^\ell\theta^{2\alpha\ell/12}$ (auquel il convient d'ajouter la petite probabilité pour que la condition de quasi-isométrie ne soit pas satisfaite). Puisque nous pouvons choisir β aussi proche que nécessaire de 1 on peut faire en sorte que ceci tende vers 0 quand ℓ tend vers l'infini. Pour un tel choix de la constante β, nous avons bien établi que très probablement un étiquetage de (X_ℓ, A_ℓ) vérifie la propriété de petite simplification $C'(1/6)$, après réduction.

Très petite simplification relative

On voudrait itérer la construction précédente. De la même manière qu'il a fallu étendre la théorie de la petite simplification classique en une théorie relative adaptée aux quotients des groupes hyperboliques, nous allons décrire ici une version relative du modèle à graphe, adaptée aux groupes hyperboliques. Soit Γ un groupe hyperbolique non élémentaire engendré par une partie finie symétrique S de cardinal $2g$ et notons δ_S la constante d'hyperbolicité associée à cette famille génératrice. Notons θ_Γ le *rayon spectral de la marche aléatoire* sur (Γ, S) ; c'est la limite de $\lim_{n\to\infty}(p_{2n})^{1/2n}$ où p_n désigne la probabilité pour qu'un mot de longueur n en les générateurs soit trivial dans Γ. D'après [Ke59], on sait que $\theta_\Gamma < 1$. On a donc une inégalité de la forme $p_n \leqslant \mathrm{cst}\cdot\theta^n$ si $\theta_\Gamma < \theta < 1$. On supposera toujours que Γ est à centralisateurs cycliques (par exemple sans torsion). Si (X, A) est un graphe fini comme précédemment, on considère toujours des étiquetages e des arêtes par des éléments de S (et on suppose encore que deux arêtes opposées portent des étiquettes inverses).

Soit (X_ℓ, A_ℓ) une suite de graphes vérifiant les mêmes conditions géométriques (1-2-3) pour une certaine constante $\beta > 1$. Bien que le groupe Γ ne soit pas nécessairement libre, il n'est pas difficile de généraliser les arguments précédents lorsque Γ était le groupe libre à g générateurs.

THÉORÈME. — *Pour $g \geqslant 2$, $\theta < 1$, $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha < 1$ et $\beta > 1$ tels que si les conditions géométriques (1-2-3) sont satisfaites, un étiquetage aléatoire de (X_ℓ, A_ℓ) mène très probablement à un graphe qui vérifie la condition de quasi-isométrie $(QI)_{\varepsilon,\alpha}$: tout chemin de longueur s supérieure à $\varepsilon\ell$ dans le revêtement universel du graphe (X_ℓ, A_ℓ) porte un mot dont la norme dans Γ est supérieure à $\alpha s/2$.*

Supposons cette propriété (QI) vérifiée et cherchons à définir le concept de a-pièce. Il s'agit de deux mots m_1, m_2 lus sur deux chemins de (X_ℓ, A_ℓ) pour lesquels il existe deux mots u_1, u_2 de norme inférieure à a dans Γ tels que m_1u_1 et u_2m_2 sont égaux dans Γ. On demande par ailleurs qu'il n'existe pas de chemin connectant le début du premier chemin au début du second et qui porte un mot égal à u_2 dans Γ. Pour la constante a, on peut choisir $10\delta_S$ (mais ce n'est pas très important). On cherche bien sûr à éviter les grandes pièces, c'est-à-dire celles pour lesquelles les normes dans Γ de m_1 et m_2 sont supérieures à $\lambda\alpha\ell$ pour un certain $0 < \lambda < 1$. Si ces grandes pièces n'existent pas, on dit que la *propriété de petite simplification $C'(\lambda)$ relative* est satisfaite. Plus géométriquement, on considère la partie quasi-convexe T du graphe de CAYLEY de Γ image par f_ℓ du revêtement universel de (X_ℓ, A_ℓ) et tous ses translatés à gauche $\gamma.T$. Une pièce correspond à l'intersection de deux voisinages convenables de deux translatés de T qui ne coïncident pas.

La démonstration du théorème suivant est une « simple » généralisation de celle que nous avons présentée dans le cas du groupe libre : la non-liberté du groupe Γ est compensée par son hyperbolicité.

THÉORÈME. — *Pour $g \geqslant 2$, $\theta < 1$, $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < 1$, il existe $\alpha < 1$ et $\beta > 1$ tels que si les conditions géométriques (1-2-3) sont satisfaites, un étiquetage aléatoire de (X_ℓ, A_ℓ) mène très probablement à un graphe qui vérifie les conditions $(QI)_{\varepsilon,\alpha}$ et $C'(\lambda)$.*

Le fait important qu'il faut retenir est que ces propriétés (QI) et $C'(\lambda)$ sont (très probablement) satisfaites pour *une valeur de β qui ne dépend que du nombre (fixé) de générateurs g, de la valeur de λ (qui sera également fixée) et du rayon spectral θ_Γ.*

Dans le cas du groupe libre, la condition $C'(1/6)$ est suffisante pour garantir l'hyperbolicité. Dans le cas général, une valeur universelle suffit.

THÉORÈME. — *Il existe $\lambda_0 > 0$ (très petit) ayant les propriétés suivantes. Soit (X_ℓ, A_ℓ) une suite de graphes vérifiant la condition (2), munis d'étiquetages e_ℓ vérifiant la condition de quasi-isométrie $(QI)_{\varepsilon,\alpha}$ (pour un certain $\alpha < 1$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit) et la condition de petite simplification relative $C'(\lambda_0)$. Si ℓ est assez grand, le quotient Γ_1 de Γ par le sous-groupe normal engendré par les éléments de Γ lus sur les cycles, est un groupe hyperbolique non élémentaire. La boule de rayon $\alpha\ell/5$ dans Γ se projette injectivement dans le quotient Γ_1. Le graphe (X_ℓ, A_ℓ) se plonge de manière quasi-isométrique dans le graphe de* CAYLEY *de Γ_1 : deux points à distance $s \geqslant \varepsilon\ell$ dans le graphe sont envoyés sur deux points à distance supérieure à $\alpha s/c$ pour une constante universelle c.*

Les articles [Gr01b, Gr03] contiennent des théorèmes plus puissants (utiles dans le contexte du problème de Burnside) dont la lecture peut être précédée par celle de notes non publiées de T. DELZANT [De03]. On trouve une preuve combinatoire du théorème précédent dans [Oll03b].

Procédé limite

Partons d'un groupe hyperbolique non élémentaire Γ engendré par une partie finie symétrique S de cardinal $2g$. Supposons que Γ possède la propriété (T), que nous discuterons un peu plus loin mais dont nous retiendrons pour l'instant qu'elle entraîne que tous ses quotients infinis ont des rayons spectraux uniformément majorés par un certain $\theta < 1$. Pour fixer les idées, on peut choisir pour Γ un réseau cocompact dans le groupe des isométries d'un espace hyperbolique quaternionique (voir [HV89]).

Choisissons une famille de graphes (X_ℓ, A_ℓ) vérifiant les propriétés (1-2-3). Nous savons que si β est inférieur à une valeur dépendant de θ et de g, lorsque ℓ tend vers l'infini, le groupe Γ_1 défini par un étiquetage aléatoire est très probablement hyperbolique non élémentaire. Soit donc Γ_1 l'un de ces quotients hyperboliques non élémentaires, défini par un certain étiquetage d'un certain graphe (X_{ℓ_1}, A_{ℓ_1}). La projection de Γ sur Γ_1 est injective sur la boule de rayon $\alpha\ell_1/5$. Il existe une application naturelle i_1 du graphe (X_{ℓ_1}, A_{ℓ_1}) vers le graphe de Cayley de Γ_1 et nous savons que cette application est une quasi-isométrie dans le sens indiqué plus haut.

Puisque Γ_1 est un groupe hyperbolique non élémentaire dont le rayon spectral θ_{Γ_1} est majoré par *le même* θ, on conclut que lorsque ℓ tend vers l'infini, le quotient de Γ_1 par le sous-groupe normal engendré par les mots lus sur les cycles d'un étiquetage aléatoire est très probablement hyperbolique non élémentaire. On peut considérer l'un de ces quotients Γ_2. Puisque les rayons spectraux de tous les quotients infinis sont bornés par θ, on peut construire par récurrence une suite de groupes hyperboliques non élémentaires Γ_n, chacun étant un quotient du précédent, associée à une suite d'indices ℓ_n de croissance suffisamment rapide. Par construction la projection de chaque Γ_n sur tous ses quotients successifs Γ_p (avec $p > n$) est une injection isométrique dans la boule de rayon $\alpha\ell_n/5$. De plus chaque graphe (X_{ℓ_n}, A_{ℓ_n}) est muni d'applications $i_{n,p}$ dans les graphes de Cayley des groupes Γ_p pour $p > n$ et ces applications sont quasi-isométriques : si deux points de (X_{ℓ_n}, A_{ℓ_n}) sont à distance s supérieure à $\varepsilon\ell_n$, leurs images par $i_{n,p}$ sont à distance comprise entre $\alpha s/c$ et s.

La suite de groupes Γ_n converge clairement dans l'espace des groupes marqués vers un groupe Γ_∞. Il s'agit d'un groupe de type fini qui n'est pas de présentation finie mais le lecteur pourra se convaincre qu'on peut le choisir de présentation récursive : il suffit pour cela de construire la suite ℓ_n de manière récursive en considérant à chaque étape le plus petit indice pour lequel il existe un étiquetage vérifiant toutes les conditions requises et en choisissant par exemple le premier étiquetage qui fait l'affaire dans un ordre alphabétique. Résumons le résultat obtenu :

Théorème. — *Soit Γ un groupe hyperbolique non élémentaire et sans torsion possédant la propriété (T). Soit (X_ℓ, A_ℓ) une suite de graphes vérifiant les conditions (1-2). Alors il existe des groupes $\overline{\Gamma}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

– *$\overline{\Gamma}$ est un quotient de Γ, de présentation récursive.*

– *Il existe une suite d'indices ℓ_n et une suite d'applications i_n des graphes (X_{ℓ_n}, A_{ℓ_n}) dans le graphe de* Cayley *de $\overline{\Gamma}$ qui sont des « quasi-plongements » dans le sens où deux points à distance $s \geqslant \varepsilon\ell_n$ dans (X_{ℓ_n}, A_{ℓ_n}) sont envoyés par i_n sur deux points à distance supérieure à $\alpha s/c$.*

6. PROPRIÉTÉ (T)

Graphes expanseurs : le théorème D

Considérons encore un graphe fini connexe (X, A) et supposons pour simplifier qu'il soit v-régulier dans le sens où la valence de tous les sommets est égale à $v \geqslant 3$. Le *laplacien* Δ correspondant agit sur l'espace $\ell^2(X)$: on définit $\Delta f(x)$ comme la différence entre $f(x)$ et la valeur moyenne de f sur les sommets voisins de x. C'est un opérateur symétrique dont la première valeur propre non nulle se note $\lambda_1(X, A)$. Pour toute fonction f sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, *de somme nulle*, le produit scalaire $\langle \Delta f \mid f \rangle$ est supérieur à $\lambda_1(X, A)||f||^2$. Il en résulte facilement que la moyenne arithmétique des $||f(x) - f(x')||^2$ sur *tous* les $|X|^2$ couples de sommets est inférieure à $\lambda_1^{-1}(X, A)$ fois la moyenne des $||f(x) - f(x')||^2$ sur les $|A|$ couples de sommets *reliés* dans le graphe. Une suite de graphes (X_ℓ, A_ℓ) v-réguliers est appelée un *expanseur* si le diamètre de (X_ℓ, A_ℓ) tend vers l'infini et si la suite $\lambda_1(X_\ell, A_\ell)$ est minorée par un nombre strictement positif λ. On pourra consulter [Lu94] pour une discussion (combinatoire et géométrique) de ces familles de graphes dont l'existence même est loin d'être évidente !

Soient (X_ℓ, A_ℓ) un expanseur et $j_\ell : X_\ell \to \mathcal{H}$ une famille d'applications dans un espace de Hilbert qui sont 1-lipschitziennes, *i.e.* envoyant deux sommets connectés dans le graphe sur deux points à distance inférieure à 1. *Nous allons montrer qu'il existe deux suites x_ℓ, x'_ℓ de sommets de X_ℓ dont les distances tendent vers l'infini dans les graphes (X_ℓ, A_ℓ) mais dont les images par j_ℓ restent à distance bornée.* Quitte à translater j_ℓ, on peut supposer que chaque j_ℓ est de somme nulle. La condition $\lambda_1(X_\ell, A_\ell) \geqslant \lambda > 0$ implique alors que la moyenne des $||j_\ell(x) - j_\ell(x')||^2$ sur tous les couples de sommets est inférieure à λ^{-1}. Cette moyenne est aussi égale à 2 fois la moyenne de $||j_\ell(x)||^2$. En particulier, le cardinal de l'ensemble des sommets x tels que $||j_\ell(x)||^2 \leqslant \lambda^{-1}$ est supérieur à $|X_\ell|/2$. D'autre part, nous savons que les boules de rayon k dans (X_ℓ, A_ℓ) ont au plus $1 + \cdots + v^k \leqslant v^{k+1}$ éléments de sorte que si $v^{k+1} \leqslant |X_\ell|/10$, on peut affirmer qu'au moins 90% des couples de sommets sont à distance supérieure à k. Ces deux estimations montrent qu'on peut trouver deux sommets x_ℓ, x'_ℓ qui sont à distance supérieure à $\log_v(|X_\ell|/10) - 1$ et dont les images par j_ℓ sont à distance inférieure à $2\lambda^{-1/2}$. Notre affirmation est donc démontrée.

On dit qu'une application f d'un espace métrique (E_1, d_1) vers un autre espace métrique (E_2, d_2) est un *plongement uniforme* si on peut trouver deux fonctions ϕ, ψ : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tendant vers l'infini à l'infini telles que pour tous les x, x' de E_1 :

$$\phi(d_1(x, x')) \leqslant d_2(f(x), f(x')) \leqslant \psi(d_1(x, x')).$$

Par exemple, il est clair que si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes de type fini munis de la métrique des mots, tout homomorphisme injectif de Γ_1 dans Γ_2 est un plongement uniforme. Nous venons de voir que *si un espace métrique contient une famille de* *graphes expanseurs plongés de manière isométrique, cet espace métrique ne peut pas se plonger de manière uniforme dans un espace de* Hilbert.

Il se trouve qu'il existe des familles de graphes expanseurs (X_ℓ, A_ℓ) qui vérifient de plus les conditions géométriques (1-2) relatives au diamètre et au tour de taille. De tels exemples peuvent être construits par des méthodes arithmétiques [Lu94] ou encore par des méthodes de graphes aléatoires [Bo01]. On peut donc utiliser le procédé limite décrit précédemment pour produire un groupe de type fini et de présentation récursive Γ dont le graphe de Cayley contient une copie quasi-isométrique des graphes (X_ℓ, A_ℓ) dans le sens décrit plus haut. Notons que l'argument précédent de non plongement uniforme s'étend immédiatement aux images *quasi*-isométriques d'expanseurs (car la proportion des paires de sommets à distance inférieure à $\varepsilon\ell$ dans (X_ℓ, A_ℓ) tend vers 0 quand ℓ tend vers l'infini). En particulier, ce groupe de type fini Γ, muni de la métrique des mots, ne peut pas se plonger de manière uniforme dans un espace de Hilbert. Comme Γ est de présentation récursive, le théorème de Higman entraîne qu'il s'injecte dans un groupe de *présentation finie* qui n'admet pas non plus de plongement uniforme. *Ceci établit le théorème D.*

Constantes de Kazhdan et de Poincaré

Considérons maintenant un ensemble *dénombrable* X. Une *marche aléatoire* sur X est une application qui associe à chaque point x de X une probabilité « de transition » $\mu(x \to)$ sur X, donnant une masse $\mu(x \to y)$ au point y, nulle pour tous les y sauf pour un nombre fini d'entre eux. Si μ_1 et μ_2 sont deux telles marches on définit leur produit par $\mu_1 \star \mu_2(x \to y) = \sum_z \mu_1(x \to z)\mu_2(z \to y)$. La puissance n-ième d'une marche μ se note μ^n ; elle décrit bien sûr les transitions en n pas. On dit que la marche μ est *symétrique* pour une mesure ν sur X si $\nu(x)\mu(x \to y) = \nu(y)\mu(y \to x)$ pour tous les couples de points (x, y). Le cas classique est celui où X est un groupe Γ engendré par une partie finie symétrique S et pour lequel on définit $\mu(x \to)$ comme la mesure de probabilité équirépartie sur les sommets voisins de x dans le graphe de Cayley. Cette marche est alors symétrique pour la mesure ν donnant une masse 1 à chaque sommet : c'est la *marche aléatoire simple* sur Γ associée à S. Nous nous plaçons dans un cas un peu plus général : *nous supposons que le groupe de type fini* Γ *opère librement sur* X*, que* X/Γ *est fini, et que la marche* μ *et la mesure* ν *sont invariantes par l'action.* Pour éviter des cas dégénérés, nous supposons également que le graphe dont les sommets sont les points de X et les arêtes les (x, y) avec $\nu(x)\mu(x \to y) \neq 0$ est connexe.

Nous fixons par ailleurs une représentation linéaire isométrique ρ de Γ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des applications $f : X \to \mathcal{H}$ qui sont équivariantes sous les actions de Γ sur X et $\mathcal{H}$. Évidemment, la fonction $\nu(x)||f(x)||^2$ est Γ-invariante de sorte qu'on peut la sommer sur l'ensemble fini X/Γ et ceci définit une structure hilbertienne sur $\mathcal{E}$, qu'on note $\langle f \mid f\rangle_\nu = ||f||^2_\nu$. De même, en sommant sur X^2/Γ la fonction invariante $\nu(x)\mu(x \to y)||F(x,y)||^2$ on définit une norme sur l'espace des fonctions Γ-équivariantes de X^2 vers $\mathcal{H}$, notée $\langle F \mid F\rangle_\mu = ||F||^2_\mu$.

Soit $M : \mathcal{E}\to\mathcal{E}$ *l'opérateur de moyennisation* : $Mf(x)$ est la moyenne de f pour la mesure $\mu(x \to)$. C'est un opérateur symétrique. Le *laplacien* est l'opérateur $\mathrm{Id} - M$. Si f est dans $\mathcal{E}$, son *énergie* $E_\mu(f)$ est le carré de la norme de la fonction $df(x,x') = f(x) - f(x')$ définie sur X^2 autrement dit $||df||^2_\mu$. Plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut considérer l'énergie $E_{\mu^n}(f) = ||df||^2_{\mu^n}$.

L'existence d'un séminaire BOURBAKI récent consacré à la propriété (T) de KAZHDAN permet de présenter cette propriété sans motivation [Va02] ! Nous nous contentons de rappeler qu'on dit qu'une représentation linéaire isométrique ρ possède *presque des vecteurs fixes* si on peut trouver une suite de vecteurs v_n de norme 1 telle que pour tout γ de Γ, la suite $\rho(\gamma)(v_n) - v_n$ converge vers 0. Un groupe a la propriété (T) si toute représentation linéaire isométrique possédant presque des vecteurs fixes possède des vecteurs fixes non nuls.

M. GROMOV donne plusieurs interprétations équivalentes de la propriété (T) en termes des concepts que nous venons de définir, qui lui permettent surtout de définir des renforcements de cette propriété lorsque l'on remplace ρ par une action isométrique *non linéaire* sur des espaces métriques à courbure négative ou nulle assez généraux. Faute d'espace, nous nous contentons ici d'un énoncé très faible :

THÉORÈME. — *Fixons un groupe Γ agissant sur un ensemble X muni d'une marche aléatoire μ comme ci-dessus. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $k \geqslant 2$:*

– Γ possède la propriété (T).

– Il existe une constante $\kappa_n < 1$ telle que pour toute représentation linéaire isométrique ρ et toute application équivariante f, on a $E_\mu(M^n f) \leqslant \kappa_n E_\mu(f)$ (inégalité de KAZHDAN*).*

– Il existe une constante $\pi_k < k$ telle que pour toute représentation linéaire isométrique ρ et toute application équivariante f, on a $E_{\mu^k}(f) \leqslant \pi_k E_\mu(f)$ (inégalité de POINCARÉ*).*

Pour le montrer, on remarque d'abord que les points fixes de M correspondent exactement aux fonctions f qui sont constantes (donc à valeurs dans les points fixes de ρ). Il en résulte facilement que le groupe Γ a la propriété (T) si et seulement s'il existe $\sigma < 1$ tel que pour toute représentation ρ sans vecteur fixe non nul, le spectre de l'opérateur M correspondant est contenu dans $[0,\sigma]$. Par projection sur l'orthogonal de l'espace des vecteurs fixes de ρ, on se ramène au cas où ρ n'a pas de vecteur fixe non nul. On exprime ensuite les quantités qui sont en jeu en fonction de M. On trouve :

$$E_\mu(f) = \langle f|(\mathrm{Id}-M)f\rangle_\nu,\ E_\mu(M^n f) = \langle f|(\mathrm{Id}-M)M^{2n}f\rangle_\nu,\ E_{\mu^k}(f) = \langle f|(\mathrm{Id}-M^k)f\rangle_\nu.$$

Les trois propriétés énoncées dans le théorème sont maintenant clairement équivalentes, car $\sigma < 1$, $\sigma^{2n} < 1$, et $(1-\sigma^k)/(1-\sigma) < k$ sont équivalents.

Considérons le cas de la marche aléatoire simple sur un groupe Γ engendré par une partie finie symétrique S. Si $\overline{\Gamma}$ est un quotient de Γ, on dispose d'une représentation régulière naturelle de Γ sur l'espace $\ell^2(\overline{\Gamma})$, sans vecteur invariant non nul si $\overline{\Gamma}$ est infini. Le rayon spectral de l'opérateur M correspondant est le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur $\overline{\Gamma}$ et on retrouve bien le fait que nous avons déjà mentionné : les quotients infinis d'un groupe ayant la propriété (T) ont des marches aléatoires simples dont les rayons spectraux sont uniformément majorés par un réel $\theta < 1$.

Critères locaux pour la propriété (T)

Supposons maintenant que X soit l'ensemble des sommets d'un complexe simplicial connexe P de dimension 2 sur lequel Γ agit de manière libre avec un quotient fini P/Γ. Pour chaque x de X, on note $\tau(x)$ le nombre de triangles qui contiennent x et pour chaque couple (x, x') de sommets distincts, on note $\tau(x, x')$ le nombre de triangles qui les contiennent tous les deux. On suppose $\tau(x) \geqslant 1$ pour tout x, et on définit une marche aléatoire par $\mu_P(x \to y) = \tau(x, y)/2\tau(x)$ symétrique pour la mesure $\nu_P(x) = 2\tau(x)$.

Considérons le *link* d'un sommet x. Il s'agit du graphe fini dont l'ensemble des sommets X_x est l'ensemble des points de X à distance 1 de x dans le 1-squelette de P et dont l'ensemble des arêtes $A_x \subset X_x \times X_x$ contient les (y, y') tels que x, y, y' sont les trois sommets d'un triangle de P. On munit A_x de la mesure de probabilité uniforme μ_x donnant donc une masse $1/\tau(x)$ à chaque arête. On munit X_x de la mesure de probabilité $\nu_x = \mu_P(x \to)$ donnant donc à chaque sommet du link une masse proportionnelle à sa valence dans le link.

Supposons le link connexe et notons $\lambda_1(x) > 0$ la première valeur propre non nulle du laplacien de ce graphe fini. On a donc l'inégalité suivante pour toute fonction f de X_x vers un espace de HILBERT $\mathcal{H}$:

$$\sum_{(y,y') \in X_x \times X_x} ||f(y) - f(y')||^2 \nu_x(y)\nu_x(y') \leqslant \lambda_1(x)^{-1} \sum_{(y,y') \in A_x} ||f(y) - f(y')||^2 \mu_x(y, y').$$

Supposons maintenant que l'on dispose d'une minoration $\lambda_1(x) > \lambda > 0$ et soit $f : X \to \mathcal{H}$ une application Γ équivariante comme précédemment. On peut alors sommer les inégalités précédentes sur tous les sommets x modulo Γ, en les affectant du poids $\tau(x)$. Il est clair que l'inégalité obtenue peut aussi s'écrire :

$$\sum_{(y,y') \in X \times X/\Gamma} ||f(y) - f(y')||^2 \nu_P(y)\mu_P^2(y, y')$$
$$\leqslant \lambda^{-1} \sum_{(y,y') \in X \times X/\Gamma} ||f(y) - f(y')||^2 \nu_P(y)\mu_P(y, y').$$

Autrement dit, nous avons une inégalité de POINCARÉ $E_{\mu_P^2}(f) \leqslant \pi_2 E_{\mu_P}(f)$ avec $\pi_2 = \lambda^{-1}$ de sorte que si $\lambda > 1/2$, on peut conclure que Γ a la propriété (T). Nous avons donc montré :

THÉORÈME. — *Soit P un complexe simplicial connexe de dimension 2 dont tous les links des sommets sont connexes et ont une première valeur propre non nulle strictement supérieure à $1/2$. Si un groupe Γ agit librement sur P avec un quotient fini, alors Γ a la propriété (T).*

Ce théorème a une histoire intéressante : il prend sa source dans des théorèmes de H. GARLAND d'annulation de certaines cohomologies de réseaux arithmétiques [Ga73]. La preuve fut ensuite simplifiée par A. BOREL [Bo75]. Puis W. BALLMANN-J. SWIATKOWSKI, P. PANSU et A. ŻUK en déduisirent indépendamment une preuve de la propriété (T) pour certains groupes agissant sur certains immeubles de TITS euclidiens [BS97, Pa98, Zuk96]. L'énoncé général précédent est dû à W. BALLMANN-J. SWIATKOWSKI et A. ŻUK, et la preuve particulièrement élégante que nous venons de présenter est due à M. GROMOV [Gr03].

On peut appliquer ce résultat au 2-complexe de CAYLEY associé à une présentation de groupes si tous les relateurs sont des mots de longueur 3. A. ŻUK obtient ainsi des critères simples et effectifs qui permettent de garantir la propriété (T) à partir de propriétés combinatoires d'une présentation. Toute présentation peut d'ailleurs être triangulée et ce critère est donc de portée générale [Zuk03]. Nous renvoyons à l'exposé de A. VALETTE [Va02].

La connaissance assez précise des valeurs propres d'un graphe fini aléatoire (voir [Bo01]) permet à A. ŻUK d'appliquer ce critère pour une présentation triangulaire aléatoire. Considérons une paire de permutations σ_1, σ_2 de l'ensemble fini $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_\ell^{\pm 1}\}$ à 2ℓ éléments et associons-leur les 2ℓ relateurs triangulaires $a_i^{\pm 1}\sigma_1(a_i^{\pm 1})\sigma_2(a_i^{\pm 1})$. Un ensemble R de couples de permutations permet donc de définir une présentation de groupe à ℓ générateurs et $2\ell|R|$ relateurs. Fixons le cardinal de R (assez grand) et faisons tendre le nombre ℓ de *générateurs* vers l'infini. A. ŻUK *montre que les groupes ainsi définis ont très probablement la propriété (T) lorsque les R permutations sont choisies aléatoirement* [Zuk03].

Propriété (T) dans le modèle à graphe

Dans la construction limite, nous sommes partis d'un groupe hyperbolique possédant la propriété (T) de façon à s'assurer que tous ses quotients infinis ont également cette propriété et que leurs rayons spectraux ne s'approchent pas de 1. M. GROMOV montre dans [Gr03] que ce n'était pas nécessaire :

THÉORÈME. — *Soit (X_ℓ, A_ℓ) une suite de graphes finis vérifiant les propriétés (1-2-3) et qui est par ailleurs un expanseur. Alors, pour β suffisamment proche de 1, lorsque ℓ tend vers l'infini, le groupe défini par un étiquetage aléatoire possède très probablement la propriété (T).*

Même si ce théorème n'est pas nécessaire pour la construction de groupes ne se plongeant pas uniformément dans un espace de HILBERT, il est cependant remarquable car il montre une fois de plus le caractère générique de la propriété (T) (dans de nombreux modèles de graphes finis aléatoires, les propriétés (1-2) sont génériques, de même que la propriété d'expanseur). Nous n'avons malheureusement pas la place pour indiquer les étapes principales de la preuve et nous allons nous contenter d'indications très générales. L. SILBERMAN a rédigé une preuve complète [Si03] en accompagnement de l'article de M. GROMOV.

L'idée consiste à appliquer l'argument de géométrie intégrale que nous venons d'expliquer. Nous savons que, très probablement, le graphe de CAYLEY $X_{\Gamma,S}$ du groupe Γ défini par un étiquetage contient une copie quasi-isométrique Y_ℓ du graphe (X_ℓ, A_ℓ). Cette copie peut être translatée par chaque élément de Γ de sorte que $X_{\Gamma,S}$ est « pavé » par ces diverses copies. Si $f : X_{\Gamma,S} \to \mathcal{H}$ est une application équivariante, on peut la restreindre à chacun de ces pavés $\gamma.Y_\ell$ et utiliser le fait que la première valeur propre de (X_ℓ, A_ℓ) est minorée. Ceci donne une minoration de type POINCARÉ pour la moyenne des $||f(x) - f(x')||^2$ lorsque (x, x') décrit tous les sommets de $\gamma.Y_\ell$ à distance n en termes de la moyenne de cette même quantité lorsque (x, x') ne décrit que les arêtes, c'est-à-dire les sommets à distance 1. En sommant cette inégalité sur tous les pavés, on obtient une inégalité de type POINCARÉ entre deux énergies de f de la forme $E_{\mu_n}(f) < \pi_n E_\mu(f)$ pour certaines marches aléatoires μ, μ_n. Mais il n'est pas vrai que μ_n coïncide avec μ^n et l'inégalité ainsi obtenue ne garantit pas immédiatement la propriété (T). Puisque Γ est un quotient du groupe libre, on peut relever les fonctions f et ces inégalités sur le groupe libre à g générateurs. De même, les mesures μ et μ_n se relèvent au niveau du groupe libre. L'avantage est maintenant que ce sont deux mesures sur un espace fixe, indépendant de l'étiquetage, et on peut donc en considérer les moyennes $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\mu}_n$ sur tous les étiquetages. L'étude de $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\mu}_n$ est facile car ce sont des mesures radiales dans le groupe libre et M. GROMOV montre que le phénomène bien connu de concentration permet de passer d'estimations concernant la moyenne de mesures, à des estimations presque aussi bonnes pour la majorité des étiquetages. Ceci donne finalement une bonne inégalité de type POINCARÉ pour la majorité des étiquetages et entraîne le théorème.

Remarques finales

Beaucoup d'idées contenues dans [Gr03] n'ont pas été évoquées dans cet exposé. L'une des principales est probablement l'introduction de versions renforcées de la propriété (T) qui permettent de garantir l'existence de points fixes pour des actions isométriques sur des espaces métriques « réguliers » à courbure négative ou nulle. M. GROMOV montre que les groupes définis par les graphes (X_ℓ, A_ℓ) possèdent très probablement cette propriété, et il en résulte par exemple qu'ils ne peuvent pas se plonger dans un groupe linéaire.

Comme le lecteur l'aura constaté, les groupes aléatoires que nous avons considérés sont « lacunaires » dans le sens où les relations imposées entre les générateurs, bien que nombreuses, viennent en « paquets » de longueurs très différentes. Est-il possible de comprendre la structure d'un groupe aléatoire dont la répartition des relations est plus homogène ?

La théorie géométrique des groupes s'intéresse (à juste titre) à des groupes bien différents des groupes aléatoires, possédant souvent une géométrie plus riche. Il faudra peut-être chercher d'autres modèles probabilistes, se concentrant autour de la densité $1/2$, pour rendre compte d'une abondance de groupes ayant ces riches propriétés géométriques, comme par exemple une dimension cohomologique supérieure ou égale à 3. Faudra-t-il se résigner au fait que les groupes aléatoires ne sont après tout que des « quite simple two-dimensional creatures » [Gr87] ?

RÉFÉRENCES

[Al91] J.M. ALONSO et al. – « Notes on word hyperbolic groups », in *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste 1990)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991, p. 3–63.

[Ar97] G. ARZHANTSEVA – « Sur les groupes dont les sous-groupes ayant un nombre fixé de générateurs sont libres », *Fundam. Prikl. Mat.* **3** (1997), no. 3, p. 675–683, (en russe).

[Ar98] ______, « Generic properties of finetely presented groups and Howson's theorem », *Comm. Algebra* **26** (1998), no. 11, p. 3783–3792.

[AO96] G. ARZHANTSEVA & A.YU. OL'SHANSKIĬ – « Généricité de la classe des groupes dont les sous-groupes ayant moins de générateurs sont libres », *Mat. Zametki* **59** (1996), no. 4, p. 489–496, (en russe).

[BS97] W. BALLMANN & J. SWIATKOWSKI – « On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 4, p. 615–645.

[Bo01] B. BOLLOBÁS – *Random graphs*, 2e éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Bo75] A. BOREL – « Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p-adique (d'après H. Garland) », in *Séminaire Bourbaki (1973/1974)*, Lect. Notes in Math., vol. 431, Springer, Berlin, 1975, exp. no 437, p. 12–35.

[BH99] M.R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Ch91] C. CHAMPETIER – « Propriétés génériques des groupes de présentation finie », Thèse de doctorat, Université de Lyon I, décembre 1991.

[Ch93] ______, « Cocroissance des groupes à petite simplification », *Bull. London Math. Soc.* **25** (1993), no. 5, p. 438–444.

[Ch94] ______, « Petite simplification dans les groupes hyperboliques », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **3** (1994), no. 2, p. 161–221.

[Ch95] ______, « Propriétés statistiques des groupes de présentation finie », *Adv. Math.* **116** (1995), no. 2, p. 197–262.

[Ch00] ______, « L'espace des groupes de type fini », *Topology* **39** (2000), no. 4, p. 657–680.

[CM82] B. Chandler & W. Magnus – *The history of combinatorial group theory*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1982, A case study in the history of ideas.

[CDP90] M. Coornaert, T. Delzant & A. Papadopoulos – *Géométrie et théorie des groupes*, Lect. Notes in Math., vol. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Les groupes hyperboliques de Gromov.

[De96] T. Delzant – « Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques », *Duke Math. J.* **83** (1996), no. 3, p. 661–682.

[De03] ______, « Mesoscopic curvature and very small cancellation theory (after M. Gromov) », manuscrit, 2003.

[Ga73] H. Garland – « p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups », *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 375–423.

[Gh90] E. Ghys – « Les groupes hyperboliques », in *Séminaire Bourbaki (1989/1990)*, Astérisque, vol. 189-190, Société Mathématique de France, Paris, 1990, exp. n° 722, p. 203–238.

[GhH90] E. Ghys & P. de la Harpe – *Sur les groupes hyperboliques, d'après M. Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, Boston, 1990.

[Gri85] R. Grigorchuk – « Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means », *Mathematics of the USSR Izvestiya* **25** (1985), no. 2, p. 259–300.

[Gr81] M. Gromov – « Hyperbolic manifolds, groups and actions », in *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y. 1978)*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, p. 183–213.

[Gr84] ______, « Infinite groups as geometric objects », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Varsovie 1983)*, PWN, Varsovie, 1984, p. 385–392.

[Gr87] ______, « Hyperbolic groups », in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, p. 75–263.

[Gr93] ______, « Asymptotic invariants of infinite groups », in *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex 1991)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, 1993, p. 1–295.

[Gr01a] ______, « CAT(κ)-spaces : construction and concentration », *Geom. i Topol.* **7** (2001), p. 100–140, 299–300, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) vol. 280.

[Gr01b] ______, « Mesoscopic curvature and hyperbolicity », in *Global differential geometry : the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao 2000)*, Contemp. Math., vol. 288, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, p. 58–69.

[Gr01c] ______, « Small cancellation, unfolded hyperbolicity, and transversal measures », in *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., Genève, 2001, p. 371–399.

[Gr03] ______, « Random walk in random groups », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 1, p. 73–146.

[Ha00] P. de la Harpe – *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics Series, 2000.

[HV89] P. de la Harpe & A. Valette – *La propriété* (T) *de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque, no. 175, Société Mathématique de France, Paris, 1989, appendice de Marc Burger.

[HLS02] N. Higson, V. Lafforgue & G. Skandalis – « Counterexamples to the Baum-Connes conjecture », *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), p. 330–354.

[HR00] N. Higson & J. Roe – « Amenable group actions and the Novikov conjecture », *J. reine Angew. Math.* **519** (2000), p. 143–153.

[IO96] S. Ivanov & A.Yu. Ol'shanskiĭ – « Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents », *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 6, p. 2091–2138.

[KS02] I. Kapovich & P. Schupp – « Genericity, the Arzhantseva-Ol'shanskii method and the isomorphism problem for one-relator groups », Prépublication, `ArXiv:math.GR/0210307`, octobre 2002.

[Ke59] H. Kesten – « Symmetric random walks on groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959), p. 336–354.

[Lu94] A. Lubotzky – *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Math., vol. 125, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994, appendice de Jonathan D. Rogawski.

[LS01] R.C. Lyndon & P.E. Schupp – *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2001, nouveau tirage de l'édition de 1977.

[Ne37] B.H. Neumann – « Some remarks on infinite groups », *J. London Mat. Soc.* **12** (1937), p. 120–127.

[Oll03a] Y. Ollivier – « Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups », *Geom. Funct. Anal.* (2003), à paraître, prépublication, `ArXiv:math.GR/0301187`.

[Oll03b] ______, « On a small cancellation theorem of Gromov », manuscrit, janvier 2003.

[Oll03c] ______, « Critical densities for random quotients of hyperbolic groups », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **336** (2003), no. 5, p. 391–394.

[Ols92a] A.Yu. Ol'shanskiĭ – « Almost every group is hyperbolic », *Internat. J. Algebra Comput.* **2** (1992), no. 1, p. 1–17.

[Ols92b] ______, « Periodic factor groups of hyperbolic groups », *Mathematics of the USSR Sbornik* **72** (1992), p. 519–541.

[Pa98] P. Pansu – « Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles », *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), no. 1, p. 107–139.

[Pa96] P. Papasoglu – « An algorithm detecting hyperbolicity », in *Geometric and computational perspectives on infinite groups (Minneapolis, MN and New Brunswick, NJ 1994)*, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 193–200.

[Se92] Z. Sela – « Uniform embeddings of hyperbolic groups in Hilbert spaces », *Israel J. Math.* **80** (1992), no. 1-2, p. 171–181.

[Si03] L. Silberman – « Addendum to : "Random walk in random groups" [Geom. Funct. Anal. 13 (2003), no. 1, 73–146 ; MR1978492] by M. Gromov », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 1, p. 147–177.

[Sk00] G. Skandalis – « Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes. Contribution de Vincent Lafforgue », in *Séminaire Bourbaki (1999/2000)*, Astérisque, vol. 276, Société Mathématique de France, Paris, 2002, exp. n° 829, p. 105–135.

[SZ94] G. Stuck & R.J. Zimmer – « Stabilizers for ergodic actions of higher rank semisimple groups », *Annals Math.* **139** (1994), p. 723–747.

[TV99] S. Thomas & B. Velickovic – « On the complexity of the isomorphism relation for finitely generated groups », *J. Algebra* **217** (1999), no. 1, p. 352–373.

[Va02] A. Valette – « Nouvelles approches de la propriété (T) de Kazhdan », in *Séminaire Bourbaki (2002/2003)*, exp. n° 913, ce volume.

[Yu00] G. Yu – « The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space », *Invent. Math.* **139** (2000), no. 1, p. 201–240.

[Zuk96] A. Żuk – « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 5, p. 453–458.

[Zuk03] ———, « Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 3, p. 643–670.

Étienne GHYS

École Normale Supérieure de Lyon
UMPA – UMR CNRS 5669
46 allée d'Italie
F-69364 Lyon Cedex 7
E-mail : `etienne.ghys@umpa.ens-lyon.fr`