MATHEMATICS Proceedings A 88 (2), June 17, 1985

Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie

par Etienne Ghys

UER de Mathématiques Pures et Appliquées ERA au CNRS 07590,
Université des Sciences et Techniques de Lille I 59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex - France

Communicated by Prof. W.T. van Est at the meeting of January 28, 1985

RÉSUMÉ

Nous décrivons des conditions nécessaires pour qu'un sous-groupe de génération finie d'un groupe de Lie G soit le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte.

1. INTRODUCTION

Etant donné un feuilletage, on lui associe classiquement un "pseudo-groupe transverse". Nous nous intéressons ici aux contraintes que peut imposer la compacité de la variété ambiante à ce pseudo-groupe. Il est clair que le premier cas à envisager est celui où le pseudo-groupe est un groupe et plus précisément celui des feuilletages de Lie.

Fixons nous un groupe de Lie simplement connexe G. Rappelons brièvement qu'un "G-feuilletage de Lie" sur une variété compacte M est un feuilletage $\mathscr{F}$ défini par des submersions locales sur G, les changements de cartes transverses étant des translations à droite de G. Dans une telle situation, le relevé $\tilde{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ dans le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est défini par une fibration localement triviale D de $\tilde{M}$ sur G. Cette fibration est "l'application développante". De plus, il existe une représentation "d'holonomie" H, du groupe fondamental de M dans G, telle que $D(\gamma\cdot x)=D(x)H(\gamma)$ (où γ est un élément de $\pi_1(M)$ et $\gamma\cdot x$ désigne l'action de γ sur le point x de $\tilde{M}$). L'image Γ de H est un sous-groupe de G, appelé "*groupe d'holonomie de* $\mathscr{F}$". Ce sous-groupe, défini à conjugaison intérieure près, contient toute la "structure transverse de $\mathscr{F}$". Pour toutes ces notions, voir [Fe] ou [Th].

Si G n'est pas compact, on a donc l'égalité:

$$\dim K = \dim G - 1$$

et Γ est uniforme et discret dans G.

Par conséquent, G est un groupe de Lie simplement connexe contenant un sous-groupe compact maximal de codimension 1; il a donc deux bouts. Puisque Γ est uniforme et discret dans G, c'est que Γ possède lui aussi deux bouts (voir [Ep]). D'après la classification des groupes à deux bouts, Γ est une extension finie de $\mathbb{Z}$. ■

PROPOSITION 2.3. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_l$ l matrices de $GL(n, \mathbb{R})$. Le groupe engendré par les A_i ne peut être le groupe d'holonomie d'un $GL(n, \mathbb{R})$-feuilletage de Lie sur une variété compacte que si les ln^2 coefficients des matrices A_i sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION. Si w est un mot non trivial du groupe libre à l générateurs, on désigne par $\bar{w}: M_n(\mathbb{R})^l \to M_n(\mathbb{R})$ l'application polynomiale à coefficients rationnels consistant à évaluer w sur l matrices. Les sous-variétés algébriques $\bar{w}^{-1}(id)$ sont strictes car il existe des sous-groupes libres à l générateurs dans $GL(n, \mathbb{R})$. Si les coefficients des A_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, le point $(A_1, A_2, \ldots, A_l)$ ne peut appartenir à aucune de ces sous-variétés $\bar{w}^{-1}(id)$ et le sous-groupe engendré par les A_i est alors libre. Ceci contredirait 2.2. ■

Pour démontrer 2.1, commençons par le lemme suivant:

LEMME 2.4. a) Soit $p: X \to B$ une fibration de Serre, de fibre F. Alors

$$dcr(X) \leq dcr(B) + dcr(F)$$

b) Soit $\pi: Y \to Z$ un revêtement galoisien de groupe Γ. Alors:

$$dcr(Z) \leq dcr(Y) + dcr(\Gamma).$$

DÉMONSTRATION. a) Si $\{E\}$ est un système local de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur X, il existe une suite spectrale E_*^{pq} telle que $E_2^{pq} = H^p(B; H^q(F, \{E\}))$ et convergeant vers la cohomologie de X à valeurs dans $\{E\}$. Si $p+q > dcr(B) + dcr(F)$, on a $p > dcr(B)$ ou $q > dcr(F)$, de telle sorte que $E_2^{pq} = 0$. Par conséquent, $H^{p+q}(Z, \{E\}) = 0$ et on a l'inégalité souhaitée.

b) On procède de même en utilisant la suite spectrale d'un revêtement galoisien. ■

DÉMONSTRATION DE 2.1. Soit $\pi: \tilde{M} \to M$ le revêtement de M associé au noyau de la représentation d'holonomie H. Ce revêtement est galoisien, de groupe Γ. De plus, la fibration D de $\tilde{M}$ sur G passe au quotient en une fibration $\bar{D}$ de $\bar{M}$ sur G car $D(\gamma \cdot x) = D(x)$ si $\gamma \in \operatorname{Ker} H$. La fibre de $\bar{D}$ est difféomorphe à n'importe quelle feuille L du feuilletage considéré car Γ opère sans point fixe sur G. D'après le lemme précédent, appliqué à $\bar{D}$ et à π, on a:

$$dcr(\bar{M}) \leq dcr(G) + dcr(L)$$

$$dcr(M) \leq dcr(\bar{M}) + dcr(\Gamma).$$

Puisque M est une variété compacte, on a $dcr(M) = \dim M$. De même, L étant une variété, on a $dcr(L) \leq \dim (L)$, l'inégalité étant stricte sauf si L est compacte. Enfin, on sait qu'un groupe de Lie simplement connexe a le type d'homotopie d'un sous-groupe compact maximal K. On a donc $dcr(G) = \dim K$ puisque K est une variété.

On obtient alors:

$$dcr(\Gamma) \geq dcr(M) - dcr(\bar{M}) \geq \dim M - \dim K - \dim L$$

En remarquant que $\dim M - \dim L$ est la codimension du feuilletage, c'est-à-dire la dimension de G, on obtient l'inégalité désirée. Cette inégalité est stricte sauf si L est compacte, c'est-à-dire si le feuilletage est une fibration au-dessus d'un quotient compact G/Γ. C'est donc le cas exactement lorsque Γ est uniforme et discret dans G. ■

QUESTION 2.5. La dimension cohomologique réelle de groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie est-elle toujours finie si par exemple G est contractile?

3. FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT AFFINES

Nous considérons ici le cas du groupe de Lie GA des bijections affines de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation. Commençons par décrire certains exemples, dûs à A. Haefliger.

Soit k un corps de nombre, $\mathcal{A}$ son anneau des entiers et U le groupe des unités de $\mathcal{A}$. Pour simplifier, nous ferons deux hypothèses sur k.

1) k est totalement réel, i.e. tout plongement de k dans $\mathbb{C}$ a son image contenue dans $\mathbb{R}$. Soit $i: k \to \mathbb{R}$ un de ces plongements.

2) si u est une unité de U telle que $i(u) > 0$, alors tous les conjugués u' de u satisfont aussi $i(u') > 0$.

Dans ces conditions, on a les propriétés suivantes; $\mathcal{A}$, comme groupe additif est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ où n est le degré de k sur $\mathbb{Q}$ et le groupe des unités u telles que $i(u) > 0$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$. (Voir [Sa]).

PROPOSITION 3.1. Sous les conditions 1) et 2) précédentes, il existe un GA-feuilletage de Lie sur une variété compacte dont le groupe d'holonomie est le groupe Γ des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a est un réel positif du type $i(u)$ ($u \in U$) et b est l'image par i d'un entier de $\mathcal{A}$.

DÉMONSTRATION. Le groupe des unités opère sur le groupe additif des

DÉMONSTRATION. Si l'image de $A \circ \phi$ est engendrée par un élément $u > 0$, l'image de ϕ ne peut être dense dans GA. L'adhérence de $\phi(\Gamma)$ est donc un sous-groupe de Lie de GA de dimension 0 ou 1. Tenant compte du fait que $GA/\overline{\phi(\Gamma)}$ doit être compact, on voit que $\overline{\phi(\Gamma)}$ doit être le groupe

$$\left\{\begin{pmatrix} u^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{R}\right\}$$

La composante connexe de l'identité de $\overline{\phi(\Gamma)}$ est identifiée à $\mathbb{R}$ par

$$b \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\phi(\Gamma) \cap \overline{\phi(\Gamma)}_e$ est distingué dans $\phi(\Gamma)$. La conjugaison interne par un élément de $\phi(\Gamma)$ du type

$$\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

opère par multiplication par u dans $\overline{\phi(\Gamma)}_e$ car:

$$\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ub \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le lemme précédent $\overline{\phi(\Gamma)}_e \cap \phi(\Gamma)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ de génération finie. Ce sous-groupe devant être invariant par multiplication par u, il est bien connu que ceci entraîne le fait que u est entier algébrique. Il en est alors de même pour toutes les puissances de u, c'est-à-dire pour les éléments de $A \circ \phi(\Gamma)$. ■

Dans le but de nous ramener au lemme précédent, nous allons "perturber" un morphisme réalisable.

LEMME 3.5. L'ensemble des morphismes réalisables de Γ dans G est ouvert dans l'espace des morphismes de Γ dans G (ce dernier espace est muni de la topologie de la convergence uniforme sur un système fini de générateurs de Γ).

DÉMONSTRATION. Ce lemme est "bien connu". Voici une esquisse de démonstration. Si $\mathcal{F}$ est un G-feuilletage sur M, on peut suspendre la représentation de $\pi_1(M)$ dans G. On obtient un G-fibré E au-dessus de M muni d'un feuilletage "horizontal" $\bar{\mathcal{F}}$. De plus, il existe une section naturelle s de M dans E, fournie par le cocycle de définition de $\mathfrak{F}$, telle que s est transverse à $\bar{\mathcal{F}}$ et que $\mathcal{F} = s^*(\bar{\mathcal{F}})$. Si ϕ' est une représentation proche de la représentation donnée de $\pi_1(M)$ dans G, on peut réaliser la suspension de ϕ' sur le même espace total E, de telle sorte que le nouveau feuilletage horizontal $\bar{\mathcal{F}}'$ soit proche de $\bar{\mathcal{F}}$ et donc transverse à s. Le feuilletage $s^*(\bar{\mathcal{F}}')$ est alors un G-feuilletage dont la représentation d'holonomie est ϕ'. ■

LEMME 3.6. On se place dans les conditions du théorème 3.2. Soit $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ le groupe libre à l générateurs et Γ le sous-groupe de GA

engendré par

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit j l'inclusion de Γ dans GA et π le morphisme naturel de $L(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ sur Γ, envoyant α_i sur

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, hook, "j"] & GA \\ L(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \arrow[u, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

Alors, tout morphisme de $L(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ dans GA se factorise à travers Γ.

DÉMONSTRATION. Le noyau de π est le groupe des "relations". Si w est un mot de $L(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ tel que $\pi(w) = \mathrm{id}$, on considère l'application $\bar{w}$ de $GA^l \to GA$ consistant à évaluer w sur un l-uplet de GA. Il s'agit d'une application polynomiale à coefficients rationnels. Puisque

$$\bar{w}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que les éléments $(a_1, b_1, \dots, a_l, b_l)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, c'est donc que la relation est identiquement vérifiée dans GA. C'est-à-dire que le noyau de π contient le noyau de tous les morphismes de $L(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ dans GA. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Supposons, par l'absurde, que l'inclusion $j : \Gamma \hookrightarrow GA$ est réalisable.

Approchons $j \circ \pi$ par un morphisme f de $L(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ dans GA tel que:

1. $A \circ f(\alpha_1)$ est transcendant
2. les réels $A \circ f(\alpha_i)$ sont des puissances rationnelles de $A \circ f(\alpha_1)$.

D'après le lemme 3.6, f s'écrit sous la forme $j_1 \circ \pi$ où j_1 est une représentation de Γ dans GA, proche de j. Celle-ci est encore réalisable d'après le lemme 3.5. et satisfait la condition du lemme 3.4. car le groupe engendré par les réels $A \circ f(\alpha_i)$ est cyclique. Le réel $A \circ f(\alpha_1)$ devrait alors être entier algébrique, ce qui est contraire à la condition 1. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2. ∎

Le résultat que nous venons de montrer suggère les questions suivantes:

QUESTION 3.7. Si G est un groupe résoluble, est-il vrai que le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie d'une variété compacte est nécessairement polycyclique? (Cf. [Wo]).

QUESTION 3.8. Si G est contractile, le groupe d'holonomie Γ d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte est-il toujours de présentation finie? $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ est-il de génération finie?

BIBLIOGRAPHIE

[Ca] Carriere, Y. – Flots riemanniens, à paraître dans Astérique.

[Ep] Epstein, D.B.A. – Ends, Topology of 3-manifolds and related topics, Ed. M.K. Fort, Prentice-Hall 110-117 (1962).

[Fe] Fédida, E. – Feuilletages de Lie, feuilletages du plan, thèse Strasbourg, 1973, Lecture Notes in Mathematics n° 352, 183-195.

[Ha] Haefliger, A. – Groupoïdes d'holonomie et classifiants, à paraître dans Astérique.

[Mo] Molino, P. – Feuilletages de Lie à feuilles denses, Séminaire de Géométrie différentielle de Montpellier, 1983.

[Sa] Samuel, P. – Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris 1971.

[Sm] Smillie, J. – An obstruction to the existence of affine structures, Inventiones Math. **64**, 411-415 (1981).

[Th] Thurston, W. – The Geometry and Topology of 3-manifolds, Lectures Notes, Princeton.

[Wo] Wolf, J. – Growth of finitely generated solvable groups and curvature of riemannian manifolds, J. of. Diff. Geom. **2**, 421-446 (1968).