Contemporary Mathematics
Volume 58, Part III, 1987

GROUPES D'HOMEOMORPHISMES DU CERCLE ET COHOMOLOGIE BORNEE

Etienne GHYS

ABSTRACT. We show that the second bounded cohomology group of a discrete group Γ can be used to study the dynamics of the actions of Γ on the circle.

1- Introduction.

Pour décrire la dynamique d'un homéomorphisme du cercle respectant l'orientation, on dispose de la notion de nombre de rotation. Il s'agit d'un élément de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui est un invariant de semi-conjugaison. La définition usuelle d'une semi-conjugaison n'étant pas symétrique, nous allons la modifier légèrement. Nous dirons qu'une application h du cercle $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans lui-même est croissante de degré 1 si elle se relève en une application croissante $\bar{h}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x, on a : $\bar{h}(x+1) = \bar{h}(x) + 1$. Deux homéomorphismes du cercle f et g seront alors dits "semi-conjugués" s'il existe une application h croissante de degré 1 telle que $f \circ h = h \circ g$. Il s'agit d'une relation d'équivalence (voir 2-1). La propriété essentielle du nombre de rotation peut alors s'exprimer de la façon suivante : deux homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation sont semi-conjugués si et seulement si leurs nombres de rotation sont égaux.

Nous nous proposons ici de généraliser cette notion.

1980 Mathematics Subject Classification. 58 D 05

aux groupes d'homéomorphismes. Soit Γ un groupe discret quelconque et ϕ_1, ϕ_2 deux représentations de Γ dans le groupe $\text{Homéo}^+(S^1)$ des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation. Nous dirons évidemment que ϕ_1 et ϕ_2 sont semi-conjuguées s'il existe une application h croissante de degré 1 telle que pour tout γ de Γ on ait $\phi_1(\gamma) o h = h o \phi_2(\gamma)$. Notre but est de construire un invariant complet de semi-conjugaison pour de telles représentations.

Un invariant existe déjà: la classe d'Euler. La donnée d'une représentation de Γ dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ permet en effet de construire, par suspension, un fibré en cercles au dessus de l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\Gamma,1)$. La classe d'Euler de ce fibré, élément de $H^2(\Gamma;\mathbf{Z})$, est un invariant de semi-conjugaison (voir 5-3). Il est clair, cependant, que cette classe d'Euler est insuffisante pour caractériser une représentation; lorsque $\Gamma = \mathbf{Z}$, on ne retrouve pas le nombre de rotation puisque, dans ce cas, la classe d'Euler est toujours nulle ($H^2(\mathbf{Z};\mathbf{Z}) = 0$).

L'invariant que nous construisons est un élément de la cohomologie bornée de Γ à coefficients entiers. Rappelons d'abord une définition (voir [Gr] pour cette définition et ses nombreuses motivations géométriques; voir aussi [Br-Se] et [Mit]). Désignons par A le groupe additif $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}$. On considère, pour chaque entier n, l'ensemble $C_b^n(\Gamma,A)$ formé des applications bornées de Γ^n dans A. Il est facile de vérifier que la collection des $C_b^n(\Gamma,A)$ forme un sous-complexe du complexe d'Eilenberg-MacLane de Γ (bar construction). La cohomologie de ce complexe est appelée " cohomologie bornée de Γ à coefficients dans A " et notée $H_b^*(\Gamma;A)$. Observons qu'il existe un morphisme naturel de $H_b^*(\Gamma;A)$ dans la cohomologie usuelle $H^*(\Gamma;A)$, obtenu en " oubliant " qu'un cocycle est borné.

Le fait que la classe d'Euler puisse être représentée par un cocycle borné a déjà été observé par plusieurs auteurs (voir [Mil],[Wo],[Su],[Gr],[Je], ...). Notre contribution consiste à montrer que si l'on se " rappelle " que la classe d'Euler est bornée, on obtient presque toute l'information relative à la dynamique de l'action de Γ sur $\mathbb{S}^1$.

<u>Théorème A</u> : Il existe une classe e dans $H_b^2(\text{Homéo}^+(\mathbb{S}^1);\mathbb{Z})$ ayant les propriétés suivantes:

1) Deux représentations ϕ_1 et ϕ_2 d'un groupe discret Γ dans $\text{Homéo}^+(\mathbb{S}^1)$ sont semi-conjuguées si et seulement si les deux éléments $\phi_1^*(e)$ et $\phi_2^*(e)$ de $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ sont égaux.

2) L'image de e par le morphisme naturel de $H_b^2(\text{Homéo}^+(\mathbb{S}^1);\mathbb{Z})$ dans $H^2(\text{Homéo}^+(\mathbb{S}^1);\mathbb{Z})$ n'est autre que la classe d'Euler.

3) On a $H_b^2(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et si $\phi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Homéo}^+(\mathbb{S}^1)$ est une représentation, alors $\phi^*(e) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le nombre de rotation de l'homéomorphisme $\phi(1)$.

Puisqu'une représentation est caractérisée par un élément de $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$, il est naturel de se demander, inversement, quels sont les éléments de $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ qui correspondent à une représentation. Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème B: Soit Γ un groupe dénombrable discret et z un élément de $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$. Il existe une représentation ϕ de Γ dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ telle que $\phi^*(e) = z$ si et seulement si z peut être représenté par un 2-cocycle qui ne prend que les valeurs 0 et 1.

Cet article est organisé de la façon suivante; le §2 traite de la notion de semi-conjugaison et le §3 donne deux exemples de calculs de cohomologie bornée. Le §4 est préparatoire au §5 où l'on démontre le théorème A. Enfin, le théorème B est démontré au §6.

2- Semi-conjugaisons d'homéomorphismes du cercle.

Commençons par démontrer un résultat énoncé dans l'introduction.

Proposition 2-1 : La relation de semi-conjugaison entre représentations d'un groupe dans $\text{Homéo}^+(S^1)$, telle qu'elle a été définie dans l'introduction, est une relation d'équivalence.

Démonstration : Seule la symétrie pose problème. Supposons donc que l'on dispose de deux représentations Φ_1 et Φ_2 du groupe Γ dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ et d'une application h croissante de degré 1 de S^1 dans S^1 telle que, pour tout γ de Γ , on ait $\Phi_1(\gamma)oh = ho\Phi_2(\gamma)$. Soit $\bar{h}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé croissant de h tel que $\bar{h}(x+1) = \bar{h}(x)+1$. Considérons alors l'application $\bar{h}^*$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\bar{h}^*(x) = \text{Sup}\{ y\in\mathbb{R} \mid \bar{h}(y) \leqslant x \}$$

Il est clair que $\bar{h}^*$ est croissante et vérifie $\bar{h}^*(x+1) = \bar{h}^*(x)+1$. Par passage au quotient, $\bar{h}^*$ définit donc une application h^* du cercle dans lui même, croissante de degré 1. Par construction de h^*, et puisque $\Phi_1(\gamma)oh = ho\Phi_2(\gamma)$, il est facile de vérifier que $h^*o\Phi_1(\gamma) = \Phi_2(\gamma)oh^*$. Ceci montre que la relation de semi-conjugaison est bien une relation d'équivalence. ||

Le but des propositions qui suivent est de préciser la signification dynamique de la notion de semi-conjugaison. Rappelons que si $\Phi:\Gamma \to \text{Homéo}^+(S^1)$ est une représentation, trois cas sont possibles:

1) Φ possède une orbite finie. Dans ce cas, toutes les orbites finies ont le même cardinal.

2) Φ est minimale, i.e. toutes ses orbites sont denses dans S^1.

3) Φ possède un " minimal exceptionnel ", i.e. il existe un ensemble de Cantor $K \subset S^1$ qui est invariant par Φ et tel que l'orbite de tout point de K est dense dans K. Un tel minimal K, s'il existe, est nécessairement unique (voir [He-Hi] Chap IV-3).

Essentiellement, la notion de semi-conjugaison s'avère extrémement puissante dans les cas 2) et 3) et assez faible dans le cas 1) puisqu'elle ne permet alors que de déterminer le comportement des orbites périodiques.

Proposition 2-2 : Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux représentations du groupe Γ dans Homéo$^+(S^1)$ et soit $h: S^1 \to S^1$ une application croissante de degré 1 qui est une semi-conjugaison entre ϕ_1 et ϕ_2 , i.e. $\phi_1(\gamma)oh = ho\phi_2(\gamma)$ pour tout γ de Γ .

1) Si ϕ_1 est minimale, alors h est injective.

2) Si ϕ_2 est minimale, alors h est surjective.

De sorte que, si ϕ_1 et ϕ_2 sont minimales, alors h est en fait une véritable conjugaison topologique entre ϕ_1 et ϕ_2.

Démonstration: Ceci résulte de la structure des applications croissantes. Si $h : S^1 \to S^1$ est croissante de degré 1, on peut définir deux ouverts U et V de S^1 de la façon suivante; U est la réunion des intérieurs des intervalles maximaux sur lesquels h est constante. Pour définir V, on constate que le complémentaire de l'image de h est une réunion disjointe d'intervalles. On définit alors V comme étant la réunion des intérieurs de ces intervalles. Si h est une semi-conjugaison entre ϕ_1 et ϕ_2 , il est clair que U est invariant par ϕ_1 et que V est invariant par ϕ_2. Si ϕ_1 est minimale, U doit être vide car, h n'étant pas constante, U ne peut être le cercle tout entier. Dans ces conditions, h n'est constante sur aucun intervalle et doit donc être injective car elle est de degré 1. De même, si ϕ_2 est minimale, V doit être vide car V n'est certainement pas le cercle tout entier. Dans ce cas, h est surjective. ||

<u>Proposition 2-3</u>: Soit $\phi_1 : \Gamma \longrightarrow$ Homéo$^+(S^1)$ une représentation possédant une orbite finie $O_1 \subset S^1$. Alors, une représentation $\phi_2 : \Gamma \longrightarrow$ Homéo$^+(S^1)$ est semi-conjuguée à ϕ_1 si et seulement si :

1) ϕ_2 a une orbite finie O_2 de même cardinal que O_1.

2) Il existe une " bijection ordonnée " de O_1 sur O_2 qui est équivariante sous les actions de ϕ_1 et ϕ_2 .

<u>Démonstration</u>: Supposons que ϕ_2 satisfait les conditions 1) et 2). Notons ($a_1,\dots,a_n$) les éléments de O_1 ordonnés cycliquement et ($b_1,\dots,b_n$) les images de ceux ci par la bijection de O_1 sur O_2 dont on dispose. Considérons alors l'application h croissante de degré 1 qui envoie les intervalles $[a_1,a_2[,\dots,[a_n,a_1[$ sur les points $b_1,\dots,b_n$. Il est clair que h est une semi-conjugaison entre ϕ_1 et ϕ_2.

Réciproquement, soit h une semi-conjugaison entre ϕ_2 et ϕ_1 , i.e. $\phi_2(\gamma) o h = h o \phi_1(\gamma)$. L'image de O_1 par h est une orbite finie O_2 pour ϕ_2 et il nous reste à montrer que la restriction de h à O_1 est une bijection de O_1 sur O_2. Si tel n'était pas le cas, O_2 aurait un cardinal strictement inférieur à celui de O_1. Si h^* désigne maintenant une application croissante de degré 1 telle que $\phi_1(\gamma) o h^* = h^* o \phi_2(\gamma)$, $h^*(O_2)$ serait une orbite finie de ϕ_1 qui aurait strictement moins d'éléments que O_1, ce qui est impossible. ||

$a(\gamma_1, \gamma_2)$ = Aire du triangle géodésique $(x, \gamma_1 x, \gamma_2 x)$.

Comme tout triangle géodésique a une aire inférieure à π , il s'agit d'un cocycle borné, de norme inférieure à π. Considérons alors une triangulation de Σ par des triangles géodésiques de sommets au point de Σ correspondant à x. Si l'on interprète ces triangles comme des simplexes du complexe d'Eilenberg-MacLane de $\pi_1(\Sigma)$, on obtient:

$$a([\Sigma]) = \text{Aire}(\Sigma) = -2\pi\chi(\Sigma) \quad \text{(Gauss-Bonnet)}.$$

Par conséquent, la classe de $-\dfrac{1}{2\pi\chi(\Sigma)}a$ dans $H_b^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{R})$ se projette dans $H^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{R})$ sur c_Σ . Ceci montre que c_Σ est dans la partie bornée de la cohomologie de $\pi_1(\Sigma)$.

Puisque la norme de $-\dfrac{1}{2\pi\chi(\Sigma)}\,a$ est inférieure à $-\dfrac{\pi}{2\pi\chi(\Sigma)}$, il nous reste à montrer que si a' est un cocycle borné se projettant sur c_Σ, alors $||a'|| \geqslant -\dfrac{1}{2\chi(\Sigma)}$. Soit g le genre de Σ et $\Sigma' \to \Sigma$ un revêtement à k feuillets. Le genre g' de Σ' est tel que $2g'-2 = k(2g-2)$. On peut alors représenter $k[\Sigma]$ par une somme de $4g'-2$ simplexes. On a alors:

$$a'(k[\Sigma]) = k \leqslant (4g'-2)||a'||$$

$$||a'|| \geqslant \frac{k}{4g'-2} = \frac{k}{4kg-4k+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2\chi(\Sigma)} .$$

Ceci démontre l'inégalité souhaitée.

La même formule montre que si $\chi(\Sigma) = 0$ (i.e. Σ est un tore), il ne peut exister de classe de cohomologie bornée a' qui se projette sur c_Σ . En effet, on a dans ce cas g=1 , de sorte que l'inégalité devient:

$$||a'|| \geqslant \frac{k}{2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est impossible. Ceci montre que si $\chi(\Sigma) = 0$, alors c_Σ n'est pas dans la partie bornée de la cohomologie de $\pi_1(\Sigma)$. ||

Remarque 3-2 : La première partie de la proposition peut être généralisée de la façon suivante: si Γ est un groupe moyennable, alors $H_b^*(\Gamma;\mathbb{R}) = 0$ (Voir [Gr]).

La borne supérieure du module d'un élément de $C_b^n(\Gamma;A)$ permet de définir, de manière naturelle, une " semi-norme" , notée $\|\ \|$, sur les groupes $H_b^*(\Gamma;A)$. L'image du morphisme de $H_b^*(\Gamma;A)$ dans $H^*(\Gamma;A)$ sera appelée " la partie bornée de la cohomologie de Γ à coefficients dans A ". Cette partie bornée est, elle aussi, munie d'une " semi-norme " naturelle, que nous noterons encore $\|\ \|$.

Notre second exemple est déjà traité dans [Gr] (dans le cadre de l'homologie singulière). Nous en donnons ici une démonstration dans notre langage.

Proposition 3-3 : Soit Σ une surface compacte orientable différente de la sphère, $\chi(\Sigma)$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré, $[\Sigma]$ sa classe fondamentale dans $H_2(\Sigma;\mathbb{R}) \sim H_2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{R})$ et c_Σ la classe fondamentale duale dans $H^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{R})$ (i.e. $c_\Sigma([\Sigma]) = 1$). Alors, c_Σ est dans la partie bornée de la cohomologie de $\pi_1(\Sigma)$ à coefficients réels si et seulement si $\chi(\Sigma)$ est non nulle. La semi-norme de c_Σ est alors $-\dfrac{1}{2\chi(\Sigma)}$.

Démonstration : Supposons d'abord que $\chi(\Sigma)$ est non nulle et munissons Σ d'une métrique à courbure -1, ce qui permet d'identifier $\pi_1(\Sigma)$ à un sous-groupe du groupe des isométries du disque de Poincaré D^2. Soit x un point de D^2. Définissons un 2-cocycle α sur $\pi_1(\Sigma)$ par :

3- Deux exemples.

Nous proposons dans ce paragraphe deux exemples de calculs de cohomologie bornée qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 3-1 : $H_b^2(\mathbf{Z};\mathbf{R}) = 0$; $H_b^2(\mathbf{Z};\mathbf{Z}) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Démonstration: Puisque $H^2(\mathbf{Z};\mathbf{R}) = 0$, un 2-cocycle de $\mathbf{Z}$ est une fonction $c: \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$ du type :

$$c(n,p) = du(n,p) = u(n+p) - u(n) - u(p)$$

où u est une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$ a priori non bornée.

Le cocycle c étant supposé borné, il existe une constante C telle que:

$$| u(n+p) - u(n) - u(p) | \leqslant C$$

Ceci implique l'existence d'un unique réel θ tel que :

$$v(n) = u(n) - \theta n$$

soit borné (voir [La] exercice 20 page 383). On a alors:

$$dv(n,p) = v(n+p) - v(n) - v(p) = c(n,p)$$

Autrement dit, c est nul dans $H_b^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$.

Etudions maintenant $H_b^2(\mathbf{Z};\mathbf{Z})$. Si θ est un réel, on considère le 2-cocycle entier c_θ de $\mathbf{Z}$ défini par:

$$c_\theta(n,p) = [\theta n+\theta p] - [\theta n] - [\theta p]$$

où [ ] désigne la partie entière. Ce cocycle est borné car il ne prend que les valeurs 0 ou 1. L'observation précédente montre que tout cocycle borné entier de $\mathbf{Z}$ est cohomologue (dans $H_b^2(\mathbf{Z};\mathbf{Z})$) à un certain c_θ . On vérifie par ailleurs que c_θ et c_ζ sont cohomologues si et seulement si $\theta-\zeta$ est un entier. ||

4- La section canonique et l'inégalité de Milnor-Wood.

Nous noterons dorénavant G le groupe Homéo$^+(S^1)$ et $\overline{G}$ son revêtement universel, c'est-à-dire le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ qui commutent avec les translations d'amplitudes entières. On a donc une extension centrale:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0$$

La classe d'Euler est l'obstruction à trouver un homomorphisme qui soit une section de p. Soit σ une section de p (qui n'est pas un morphisme). Considérons, pour g et h deux éléments de G, l'élément

$$c(g,h) = \sigma(fg)^{-1}\sigma(f)\sigma(g) \quad .$$

Cet élément est dans le noyau de p. C'est donc un entier. Nous obtenons donc un 2-cocycle de G dont la classe de cohomologie dans $H^2(G;\mathbb{Z})$ n'est autre que la classe d'Euler à laquelle nous nous intéressons.

Dans notre cas, il existe une façon naturelle de choisir une " section canonique " de p. Soit T le générateur du centre de $\overline{G}$ correspondant à la translation d'amplitude +1. Si g est un élément de G, les divers éléments de $p^{-1}(g)$ diffèrent des puissances de T ; il existe donc un unique élément $\overline{g}$ de $p^{-1}(g)$ tel que $\overline{g}(0) \in [0,1[$. La section canonique σ est alors celle définie par $\sigma(g) = \overline{g}$.

Proposition 4-1 : Le cocycle c associé à ce choix de σ ne prend que les valeurs 0 et 1 .

Démonstration : Soient g et h deux éléments de G. Par définition de la section canonique, on a :

$$\bar{h}(0) \in [0,1[\ .$$

Puisque $\bar{g}$ est croissant, on a :

$$\bar{g}(\bar{h}(0)) \in [\bar{g}(0),\bar{g}(1)[\ .$$

L'intervalle $[\bar{g}(0),\bar{g}(1)[$ est d'amplitude 1 et $\bar{g}(0) \in [0,1[$. On a donc:

$$\bar{g}\bar{h}(0) \in [0,2[.$$

Puisque $\bar{g}\bar{h}$ et $\overline{gh}$ sont deux relevés du même élément de G et que $\overline{gh}(0) \in [0,1[$, on a l'égalité

$$\bar{g}\bar{h} = \overline{gh}\ T^{\varepsilon}$$

où $\varepsilon = 0$ ou 1 . Ceci signifie que c(g,h) ne peut être égal qu'à 0 ou 1. ||

Corollaire 4-2 : La classe d'Euler peut être représentée par un cocycle borné réel de norme inférieure à 1/2.

Démonstration : Remarquons que le cocycle k défini par $k(g,h) = 1/2$ est le cobord de la cochaîne constante égale à $-1/2$. La classe d'Euler est donc représentée par le cocycle c-k qui ne prend que les valeurs +1/2 et -1/2 . ||

Corollaire 4-3 : (Inégalité de Milnor-Wood) Soit ϕ une représentation du groupe fondamental d'une surface compacte orientable Σ dans le groupe des homéomorphismes du cercle respectant l'orientation. Soit $eu(\phi)$ le nombre d'Euler du fibré en cercles associé à ϕ . Alors

$$|eu(\phi)| \leqslant |\chi(\Sigma)|\ .$$

Démonstration : On reprend les notations de 3-3. La classe d'Euler du fibré considéré est $eu(\phi)\ c_\Sigma$. Si $\chi(\Sigma) \neq 0$, la proposition 3-3 et le corollaire précédent montrent que:

$$|eu(\phi)\ (-\frac{1}{2\chi(\Sigma)})| \leqslant \frac{1}{2} \quad .$$

Ceci donne l'inégalité annoncée. Si $\chi(\Sigma) = 0$, nous savons que $eu(\phi)\ c_\Sigma$ est une classe de cohomologie bornée et que c_Σ ne l'est pas. Dans ce cas, $eu(\phi)$ est donc nul. ||

5- Démonstration du théorème A.

Puisque le 2-cocycle c que nous avons construit au paragraphe précédent ne prend que les valeurs 0 et 1 ,nous pouvons considérer sa classe de cohomologie dans $H_b^2(G;\mathbb{Z})$. Nous allons montrer que cette classe, notée e, vérifie les propriétés énoncées dans le théorème A.

Une partie du théorème est déjà claire:

Proposition 5-1 : L'image de e par le morphisme naturel de $H_b^2(G;\mathbb{Z})$ dans $H^2(G;\mathbb{Z})$ est la classe d'Euler. ||

Nous abordons maintenant la démonstration de la partie essentielle du théorème A.

Proposition 5-2 : Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux représentations d'un groupe Γ dans G. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont semi-conjuguées, alors les deux éléments $\phi_1^*(e)$ et $\phi_2^*(e)$ de $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ sont égaux.

<u>Démonstration</u> : Soit h une semi-conjugaison entre ϕ_1 et ϕ_2 et $\bar{h}$ l'application croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui relève h et telle que $\bar{h}(0) \in [0,1[$. Par hypothèse, pour tout γ de Γ, on a :

$$\phi_1(\gamma)h = h\phi_2(\gamma) .$$

Les deux applications croissantes $\overline{\phi_1(\gamma)}\bar{h}$ et $\bar{h}\overline{\phi_2(\gamma)}$ correspondent aux mêmes applications croissantes de degré 1 de S^1 dans S^1. Il existe donc une fonction u de Γ dans $\mathbf{Z}$ telle que :

$$\overline{\phi_1(\gamma)}\bar{h} = \bar{h}\overline{\phi_2(\gamma)}T^{u(\gamma)} \qquad (1)$$

Revenant à la définition du 2-cocycle c, on obtient:

$$\phi_1^*(c)(\gamma,\gamma') - \phi_2^*(c)(\gamma,\gamma') = u(\gamma\gamma') - u(\gamma) - u(\gamma') .$$

Pour démontrer que $\phi_1^*(e)$ et $\phi_2^*(e)$ sont égaux dans $H_b^2(\Gamma;\mathbf{Z})$, il suffit donc de montrer que u est bornée. Puisque

$$\bar{h}(0) \in [0,1[$$

$$\overline{\phi_1(\gamma)}(0) \in [0,1[$$

on a:

$$\overline{\phi_1(\gamma)}\bar{h}(0) \in [0,2[.$$

De même,

$$\bar{h}\overline{\phi_2(\gamma)}(0) \in [0,2[.$$

L'équation (1) montre alors que u ne peut prendre que les valeurs -1 , 0 ou +1 . ||

<u>Remarque 5-3</u> : Evidemment, cette proposition montre, en particulier, que la classe d'Euler est un invariant de semi-conjugaison.

<u>Proposition 5-4</u> : Réciproquement, si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux représentations de Γ dans G telles que $\phi_1^*(e)$ et $\phi_2^*(e)$ sont égaux dans $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$, alors ϕ_1 et ϕ_2 sont semi-conjuguées.

<u>Démonstration</u> : On suppose qu'il existe une fonction bornée u de Γ dans $\mathbb{Z}$ telle que :

$$\phi_2^*(c)(\gamma,\gamma') - \phi_1^*(c)(\gamma,\gamma') = u(\gamma\gamma') - u(\gamma) - u(\gamma) .$$

En particulier, les 2-cocycles $\phi_1^*(c)$ et $\phi_2^*(c)$ sont cohomologues dans $H^2(\Gamma;\mathbb{Z})$. On peut donc construire une extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\Gamma} \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 0$$

munie de deux sections s_1 et s_2 de π et ayant les deux propriétés suivantes. D'une part, si δ désigne l'image de 1 dans $\overline{\Gamma}$, on a:

$$s_2(\gamma) = s_1(\gamma)\delta^{u(\gamma)} .$$

D'autre part, les 2-cocycles de Γ associés aux sections s_1 et s_2 sont précisément $\phi_1^*(c)$ et $\phi_2^*(c)$.

Nous pouvons alors construire deux représentations $\overline{\phi}_1$ et $\overline{\phi}_2$ de $\overline{\Gamma}$ dans $\overline{G}$ en définissant:

$$\overline{\phi}_1(\delta) = T \qquad \overline{\phi}_2(\delta) = T$$

$$\overline{\phi}_1(s_1(\gamma)) = \overline{\phi_1(\gamma)} \qquad \overline{\phi}_2(s_2(\gamma)) = \overline{\phi_2(\gamma)} .$$

Avant de terminer la démonstration, nous allons démontrer le lemme suivant:

<u>Lemme 5-5</u> : Pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application

$$\alpha \in \overline{\Gamma} \longmapsto \overline{\phi}_1(\alpha)^{-1}\overline{\phi}_2(\alpha)(x) \in \mathbb{R}$$

a une image bornée.

Démonstration du lemme : Puisque les applications $\overline{\phi}_1(\alpha)$ et $\overline{\phi}_2(\alpha)$ commutent avec T, il suffit de démontrer le lemme lorsque x est un réel de $[0,1[$ De même, puisque $\overline{\phi}_1(\alpha)$ et $\overline{\phi}_2(\alpha)$ sont croissantes, il suffit de démontrer le lemme lorsque x est nul.

Le point $\overline{\phi}_1(\alpha)^{-1}\ \overline{\phi}_2(\alpha)(0)$ ne dépend évidemment que de la projection de α dans Γ car $\overline{\phi}_1(\delta) = \overline{\phi}_2(\delta) = T$ et T est dans le centre de $\overline{G}$. Par ailleurs, si $\alpha = s_2(\gamma)$,on a :

$$\overline{\phi}_1(\alpha) = \overline{\phi}_1(s_2(\gamma)) = \overline{\phi}_1(s_1(\gamma)\delta^{u(\gamma)}) = \overline{\phi_1(\gamma)}\ T^{u(\gamma)}$$

de sorte que :

$$\overline{\phi}_1(\alpha)(0) \in [u(\gamma),u(\gamma)+1[$$

car

$$\overline{\phi_1(\gamma)}(0) \in [0,1[\ .$$

Par conséquent,

$$\overline{\phi}_1(\alpha)^{-1}(0) \in [-u(\gamma)-1,-u(\gamma)[\ .$$

Puisque, par ailleurs:

$$\overline{\phi}_2(\alpha)(0) = \overline{\phi_2(\gamma)}(0) \in [0,1[\ ,$$

on a :

$$\overline{\phi}_1(\alpha)^{-1}\ \overline{\phi}_2(\alpha)(0) \in [-u(\gamma)-1,-u(\gamma)+1[\ .$$

Ceci démontre le lemme puisque, par hypothèse, u est bornée. ||

Fin de la démonstration de la proposition 5-4 :

On définit une fonction $\overline{h}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\overline{h}(x) = \sup_{\alpha\in\overline{\Gamma}}(\overline{\phi}_1(\alpha)^{-1}\ \overline{\phi}_2(\alpha)(x)) \ .$$

Il est clair que $\overline{h}$ est une fonction croissante qui commute avec T. Si α est un élément de Γ , on a :

$$\begin{aligned}\overline{h}(\overline{\Phi}(\alpha)(x)) &= \sup_{\beta\in\Gamma}(\overline{\Phi}(\beta)^{-1}\ \overline{\Phi}(\beta\alpha)(x))\\ &= \sup_{\beta\in\Gamma}(\overline{\Phi}(\beta\alpha^{-1})^{-1}\ \overline{\Phi}(\beta)(x))\\ &= \overline{\Phi}_1(\alpha)(\sup_{\beta\in\Gamma}(\overline{\Phi}_1(\beta)^{-1}\ \overline{\Phi}_2(\beta)(x))\\ &= \overline{\Phi}_1(\alpha)(\overline{h}(x)) \quad .\end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'on a

$$\overline{h}\ \overline{\Phi}_2 = \overline{\Phi}_1\ \overline{h} \quad .$$

Si l'on note h l'application croissante de degré 1 de S^1 dans S^1 qui est obtenue à partir de $\overline{h}$, on a :

$$h\ \phi_2 = \phi_1\ h \quad .$$

En d'autres termes, les représentations ϕ_1 et ϕ_2 sont semi-conjuguées. Ceci termine la démonstration de 5-4. ||

Pour terminer la démonstration du théorème A, il nous reste à démontrer la :

<u>Proposition 5-6</u> : Si $\Gamma = \mathbb{Z}$ et si $\phi:\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ est une représentation, alors l'élément $\phi^*(e)$ de $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z}) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le nombre de rotation de $\phi(1)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et R_θ la rotation " d'angle " θ définie par $R_\theta(x) = x + \theta \pmod{\mathbb{Z}}$. Soit $\phi_\theta:\mathbb{Z} \longrightarrow G$ la représentation envoyant 1 sur R_θ . On vérifie immédiatement que le 2-cocycle $\phi_\theta^*(c)$ est égal au 2-cocycle c_θ défini en 3-1. On obtient la proposition en remarquant que toute représentation

$\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ est semi-conjuguée à la représentation ϕ_θ où θ est le nombre de rotation de $\phi(1)$. ||

Remarque 5-7: Il est clair que, pour obtenir le théorème A, il nous faut considérer la cohomologie bornée à coefficients entiers et non pas à coefficients réels. Nous avons vu, en effet, que $H_b^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}) = 0$ de sorte que la cohomologie bornée réelle ne peut " contenir " la notion de nombre de rotation. Dans certains cas, cependant, la cohomologie bornée de Γ à coefficients réels peut suffire pour décrire les représentations de Γ dans G. Ce sera le cas si Γ est un groupe parfait car, dans ce cas, on vérifie que $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ s'injecte dans $H_b^2(\Gamma;\mathbb{R})$.

6- Démonstration du théorème B .

Une partie du théorème B est déjà claire : si $\phi : \Gamma \longrightarrow G$ est une représentation, la classe $\phi^*(e)$ est représentée par le 2-cocycle $\phi^*(c)$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 d'après la proposition 4-1.

Réciproquement, soit ω un 2-cocycle sur Γ qui ne prend que les valeurs 0 et 1. On peut alors construire une extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\Gamma} \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \Gamma \longrightarrow 0$$

et une section s telles que le cocycle ω soit défini par:

$$\omega(\gamma_1,\gamma_2) = s(\gamma_1\gamma_2)^{-1}s(\gamma_1)s(\gamma_2) \quad .$$

On note encore δ l'image de +1 dans $\bar{\Gamma}$. La donnée de s permet d'identifier $\bar{\Gamma}$, comme ensemble, à $\Gamma\times\mathbf{Z}$; la loi de multiplication dans ces coordonnées étant:

$$(\gamma_1,n_1)(\gamma_2,n_2) = (\gamma_1\gamma_2,n_1+n_2+\omega(\gamma_1,\gamma_2)) \qquad (2)$$

Nous ferons tout d'abord l'hypothèse que ω est un cocycle non dégénéré, c'est-à-dire qu'il satisfait la condition:

$$\omega(\gamma,1) = \omega(1,\gamma) = 0$$

(Le symbole 1 désignera aussi bien l'élément neutre de Γ que celui de $\bar{\Gamma}$, ainsi que, bien entendu, l'entier 1 ...)
Cette dernière condition est équivalente au fait que s(1) = 1 ou encore que (1,0) est l'élément neutre de $\bar{\Gamma}$. Nous nous débarasserons de cette hypothèse de non dégénérescence à la fin de ce paragraphe.

<u>Lemme 6-1</u> : Il existe une relation de préordre sur $\bar{\Gamma}$,notée $\preccurlyeq$ telle que:

i) $(1,0) \preccurlyeq (\gamma,n)$ si et seulement si $0 \leqslant n$;

ii) si $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2$, alors pour tout α de $\bar{\Gamma}$, on a $\alpha\alpha_1 \preccurlyeq \alpha\alpha_2$;

iii) $\preccurlyeq$ est une relation de préordre total.

<u>Démonstration</u> : Une relation de préordre satisfaisant ii) est parfaitement définie par l'ensemble des éléments supérieurs à l'élément neutre qui doit être un semi-groupe. Puisque ω ne prend que des valeurs positives, la relation (2) montre

que l'ensemble des éléments de $\overline{\Gamma}$ du type (γ,n) avec $n \geq 0$ est effectivement un semi-groupe. Les conditions i) et ii) définissent donc bien un préordre sur $\overline{\Gamma}$.

Puisque ω ne prend que les valeurs 0 et 1, l'inverse de l'élément (γ,n) de $\overline{\Gamma}$ est soit $(\gamma^{-1},-n)$ soit $(\gamma^{-1},-n-1)$. En observant que, pour tout entier n, on a:

$$0 \leq n \quad \text{ou} \quad (\ 0 \leq -n \quad \text{et} \quad 0 \leq -n-1 \ ) \ ,$$

on déduit que, pour tout élément (γ,n) de $\overline{\Gamma}$, on a :

$$(1,0) \preccurlyeq (\gamma,n) \quad \text{ou} \quad (1,0) \preccurlyeq (\gamma,n)^{-1}$$

ou encore, d'après ii) :

$$(1,0) \preccurlyeq (\gamma,n) \quad \text{ou} \quad (\gamma,n) \preccurlyeq (1,0) \ .$$

Ceci montre que $\preccurlyeq$ est une relation de préordre total. ||

<u>Lemme 6-2</u> : On suppose Γ dénombrable. Alors, il existe une application i de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

i) $i(1) = 0$;

ii) pour tout α de $\overline{\Gamma}$, on a $i(\delta\alpha) = i(\alpha) + 1$;

iii) $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2$ si et seulement si $i(\alpha_1) \leq i(\alpha_2)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $(1 , \gamma_1 , \gamma_2 , \ldots , \gamma_n , \ldots)$ une énumération de Γ . On suppose donnée une application i de $\pi^{-1}\{1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots , \gamma_n\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions i),ii) et iii). L'ensemble $\pi^{-1}\{\gamma_{n+1}\}$ est constitué de $s(\gamma_{n+1})$ et de ses translatés par les puissances de δ . Puisque la relation de préordre $\preccurlyeq$ est totale, il est facile de choisir un réel, noté $i(s(\gamma_{n+1}))$, de façon à satisfaire la condition iii) sur l'ensemble $\pi^{-1}\{ 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \} \cup s(\gamma_{n+1})$. On définit alors,

Supposons donc que t est un point d'accumulation unilatéral de $\overline{F}$, par exemple à gauche. Dans ce cas, t est l'extrémité gauche d'une composante connexe de $\mathbb{R}-\overline{F}$ et, d'après l'hypothèse faite, t est du type $i(\beta_1)$ pour un certain élément β_1 de Γ . Il suffit évidemment de montrer la continuité de $\overline{\phi}(\alpha)$ à gauche. Dans le cas contraire, on aurait:

$$\lim_{\substack{t'\to t\\ t'<t}} \overline{\Phi}(\alpha)(t') < \overline{\phi}(\alpha)(t)$$

Le membre de droite de cette inégalité est égal à $v = i(\alpha\beta_1)$. Quant au membre de gauche, d'après la définition de $\overline{\phi}(\alpha)$, il est égal à :

$$u = \operatorname{Sup}\{i(\alpha\tau) \mid \tau \prec \beta_1\}$$

où la notation $\tau \prec \beta_1$ signifie $i(\tau) < i(\beta_1)$. L'intervalle $]u,v[$ ne peut contenir d'élément de $i(\Gamma)$. En effet, si $i(\beta_2)$ est un élément de $]u,v[$, alors l'élément $\beta_3 = \alpha^{-1}\beta_2$ aurait la propriété que $\beta_3 \prec \beta_1$ ce qui entraînerait la contradiction suivante:

$$u = \operatorname{Sup}\{i(\alpha\tau) \mid \tau \prec \beta_1\} \geqslant i(\alpha\beta_3) = i(\beta_2) > u .$$

Comme u et v sont clairement des éléments de $\overline{F}$,l'intervalle $]u, v[$ est donc une composante connexe de $\mathbb{R}-\overline{F}$. D'après l'hypothèse faite, u est du type $i(\beta_4)$ pour un certain β_4 de Γ. La définition de u montre alors que β_4 est tel que $\tau \prec \beta_1$ si et seulement si $\alpha\tau \preccurlyeq \beta_4$. En d'autres termes, il n'y aurait aucun élément de $i(\Gamma)$ entre $i(\alpha^{-1}\beta_4)$ et $t = i(\beta_1)$ ce qui contredit le fait que t est un point d'accumulation à gauche de $i(\Gamma)$.

Dans le cas où t est un point d'accumulation bilatéral pour chaque entier k,

$$i(s(\gamma_{n+1})\,\delta^k) = i(s(\gamma_{n+1})) + k$$

de sorte que i est maintenant définie sur $\pi^{-1}\{1,\gamma_1,\dots,\gamma_{n+1}\}$ et vérifie toujours i), ii) et iii). Par récurrence, on construit donc l'application cherchée. ||

Remarquons que $\overline{\Gamma}$ opère sur lui-même par translations à gauche et que ces translations sont des bijections croissantes de l'ensemble préordonné $(\overline{\Gamma}, \preccurlyeq)$. Soit $\overline{F}$ l'adhérence de $i(\overline{\Gamma})$ dans $\mathbb{R}$ et α un élément de $\overline{\Gamma}$. On définit une fonction $\overline{\phi}(\alpha)$ de $\overline{F}$ dans $\overline{F}$ par:

$$\overline{\phi}(\alpha)(x) = \mathrm{Sup}\,\{\, i(\alpha\beta) \mid i(\beta) \leqslant x \,\}\ .$$

La restriction de $\overline{\phi}(\alpha)$ à $i(\overline{\Gamma})$ est une bijection car $\overline{\phi}(\alpha)(i(\beta)) = i(\alpha\beta)$. Il se peut cependant que $\overline{\phi}(\alpha)$ ne soit pas un homéomorphisme de $\overline{F}$. Le lemme suivant donne une condition pour que $\overline{\phi}(\alpha)$ soit un homéomorphisme.

<u>Lemme 6-3</u> : On suppose que les deux extrémités x et y de toute composante connexe $]x,y[$ de $\mathbb{R}-\overline{F}$ sont dans $i(\overline{\Gamma})$. Alors, pour tout α de $\overline{\Gamma}$, la fonction $\overline{\phi}(\alpha)$ est un homéomorphisme de $\overline{F}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que $\overline{\phi}(\alpha)$ est continue sur $\overline{F}$ car l'inverse de $\overline{\phi}(\alpha)$ sera évidemment $\overline{\phi}(\alpha^{-1})$.

Soit t un élément de $\overline{F}$. Trois cas sont a priori possibles: t peut être un point isolé de $\overline{F}$, un point d'accumulation "unilatéral" de $\overline{F}$ ou un point d'accumulation "bilatéral" de $\overline{F}$. La question de la continuité de $\overline{\phi}(\alpha)$ en t ne se pose évidemment que dans les deux derniers cas.

de l, les propriétés suivantes de l sont évidentes:

1- l est continue

2- la restriction de l à $i(\overline{\Gamma})$ est strictement croissante

3- la restriction de l à un élément de $\mathcal{C}$ est constante

Par conséquent, l'application $i = l \circ i_0$ vérifie toutes les conditions requises. ||

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la partie principale du théorème B.

<u>Proposition 6-5 :</u> Soit Γ un groupe dénombrable et ω un 2-cocycle non dégénéré sur Γ qui ne prend que les valeurs 0 et 1. Alors, il existe une représentation $\phi: \Gamma \to G$ telle que $\phi^*(c) = \omega$.

<u>Démonstration</u> : Soit $i : \overline{\Gamma} \to \mathbb{R}$ une application donnée par le lemme 6-4. Dans ce cas, d'après 6-3, $\overline{\Phi}(\alpha)$ est un homéomorphisme strictement croissant de $\overline{F}$. Prolongeons $\overline{\Phi}(\alpha)$ en un homéomorphisme de $\mathbb{R}$, encore noté $\overline{\Phi}(\alpha)$, en lui imposant d'être affine sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}-\overline{F}$. On obtient ainsi une représentation $\overline{\Phi} : \overline{\Gamma} \to \overline{G}$. Par passage au quotient, on obtient finalement une représentation $\phi: \Gamma \to G$. La construction même de ϕ montre que $\phi^*(c) = \omega$. ||

<u>Fin de la démonstration du théorème B :</u> Il nous reste à nous débarasser de l'hypothèse de non dégénérescence faite sur ω .

La condition exprimant que ω est un cocycle s'écrit:

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2) + \omega(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) = \omega(\gamma_2, \gamma_3) + \omega(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3)$$

On en déduit qu'il existe un entier ν tel que, pour tout γ de Γ, on ait :

$$\omega(1, \gamma) = \omega(\gamma, 1) = \nu$$

de $i(\overline{T})$, on procède de façon similaire pour montrer que $\overline{\Phi}(\alpha)$ est continu à gauche et à droite. ||

Lemme 6-4 : On suppose toujours que Γ est dénombrable. Alors, il existe une application i de $\overline{T}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions i), ii) et iii) du lemme 6-2 ainsi que la condition du lemme 6-3.

Démonstration : Soit $i_0 : \overline{T} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les conditions i), ii) et iii) du lemme 6-2. Nous allons définir une autre application $i : \overline{T} \to \mathbb{R}$ de la forme $i = l \circ i_0$ où $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sera une application croissante qui "écrase sur un point" les composantes connexes de $\mathbb{R}-\overline{F}$ ne satisfaisant pas à la condition du lemme 6-3. Plus précisément, soit $\mathcal{C}$ la collection des composantes connexes de $\mathbb{R}-\overline{F}$ dont au moins une des extrémités n'est pas dans $i(\overline{T})$. Si $]u,v[$ et $]v,w[$ sont deux éléments de $\mathcal{C}$ ayant une extrémité en commun, le point v est un point isolé de $\overline{F}$ et donc un élément de $i(\overline{T})$. Dans ce cas, u et w ne sont pas des éléments de $i(\overline{T})$. Considérons alors la réunion des intervalles du type $]u,w[$ ainsi décrits et des éléments de $\mathcal{C}$ qui n'ont pas d'extrémité commune avec un autre élément de $\mathcal{C}$. On obtient ainsi un ouvert dont le complémentaire $\overline{K}$ n'a pas de point isolé. Evidemment, $\overline{K}$ est invariant par translations entières. On peut donc trouver une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$, sans atome, dont le support est exactement $\overline{K}$, invariante par translations entières et telle que $\mu[0,1[= 1$. On considère alors la fonction $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $l(x) = \mu[0,x]$ si $x \geqslant 0$ et $l(x) = -\mu[x,0]$ si $x \leqslant 0$. Par construction même

BIBLIOGRAPHIE

[Br-Se] R. Brooks and C. Series : Bounded cohomology of surface groups, Topology 23(1984),29-36.

[Gr] M. Gromov : Volume and bounded cohomology, Pub.Math. I.H.E.S. 56(1982),5-100.

[He-Hi] G. Hector and U. Hirsch : Introduction to the geometry of foliations, Part B , Aspects Math. (1983)

[Je] S. Jekel : Simplicial categories and foliations, preprint Boston.

[La] S. Lang : Algebra, Addison Wesley (1965)

[Mil] J. Milnor : On the existence of a connection with curvature zero, Comment.Math.Helvetici32(1958),215-223.

[Mit] Y. Mitsumatsu : Bounded cohomology and l^1 homology of surfaces, to appear in Topology.

[Su] D. Sullivan : A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds, Comment.Math.Helvetici51(1976),183-189.

[Wo] J. Wood : Bundles with totally disconnected structure group, Comment.Math.Helv.46(1971),257-273.

Université des Sciences et Techniques de Lille I
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
E.R.A. au C.N.R.S. 07590
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
FRANCE

Cet entier ne peut être égal qu'à 0 ou 1 et ω est non dégénéré si et seulement si ν est nul. Supposons donc que $\nu = 1$ et définissons un 2-cocycle ω' par :

$$\omega'(\gamma_1, \gamma_2) = 1 - \omega(\gamma_1, \gamma_2) .$$

Il est clair que ω' est un 2- cocycle non dégénéré qui ne prend que les valeurs 0 et 1. Par ailleurs ω' et $-\omega$ sont cohomologues dans $H_b^2(\Gamma;\mathbf{Z})$ (car la fonction constante 1 de $C_b^2(\Gamma;\mathbf{Z})$ est le cobord de la fonction constante -1 de $C_b^1(\Gamma;\mathbf{Z})$).

D'après la proposition 6-5, il existe une représentation $\phi' : \Gamma \to G$ telle que $\phi'^*(c) = \omega'$. Si $\phi: \Gamma \to G$ désigne maintenant une représentation obtenue en conjugant ϕ' par une symétrie de $\mathbf{S}^1$ qui renverse l'orientation, $\phi^*(c)$ est évidemment cohomologue à $-\phi'^*(c)$, c'est-à-dire à $-\omega'$ et donc à ω .

Ceci montre le théorème B pour un cocycle dégénéré et termine donc la démonstration de ce théorème. $||$