

Laminations par surfaces de Riemann

par Étienne GHYS

1 Introduction

Les *laminations par surfaces de Riemann* sont des généralisations feuilletées des surfaces de Riemann classiques que l'on rencontre dans un grand nombre de situations géométriques ou dynamiques. Le but de cet article est de décrire quelques résultats généraux concernant ces laminations en centrant la discussion autour des théorèmes fondamentaux sur les surfaces de Riemann :

Classification topologique : *Une surface de Riemann compacte est déterminée à homéomorphisme près par son genre.*

Théorème d'uniformisation : *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphiquement équivalente à la droite projective complexe \mathbf{CP}^1 , à la droite affine complexe \mathbf{C} ou au disque unité \mathbf{D} .*

Théorème de Riemann : *Toute surface de Riemann possède des fonctions méromorphes non constantes.*

Dans quelle mesure ces théorèmes de base se généralisent-ils aux laminations par surfaces de Riemann ? Nous verrons qu'un certain nombre de résultats positifs sont encourageants mais que la situation générale n'est pas si simple. . .

Cet article contient peu de démonstrations et on n'y trouvera pas de résultat nouveau, à part dans le paragraphe 7. Nous nous inspirons de beaucoup de travaux que nous citerons au fur et à mesure et nous n'avons pas hésité à nous copier nous-même en adaptant des parties de [23]. Ce texte diffère peu de celui distribué aux participants de la session "État de la recherche" de janvier 1997 ; nous avons ajouté le paragraphe 6.4 en suivant une idée de R. Kenyon et nous avons corrigé quelques énoncés qui étaient parfois un peu "optimistes" dans la première version.

Table des matières

2 Exemples

Nous commençons par la définition des laminations par surfaces de Riemann.

On considère un espace métrique *compact* M recouvert par des ouverts U_i (que nous appellerons les *ouverts distingués*) munis d'homéomorphismes h_i de U_i sur $\mathbf{D} \times T_i$ où \mathbf{D} est le disque unité dans \mathbf{C} et T_i un certain espace topologique. On dit que ces ouverts définissent un *atlas* d'une structure de lamination par surfaces de Riemann sur M si les *changements de cartes* $h_{ij} = h_j \circ h_i^{-1}$, sur leur domaine de définition, sont de la forme :

$$h_{ij}(z, t) = (f_{ij}(z, t), \gamma_{ij}(t))$$

où $f_{ij}(z, t)$ dépend holomorphiquement de la variable z et continûment de la variable t . Deux atlas sont équivalents si leur réunion est un atlas. Une *lamination par surfaces de Riemann* est un espace compact M muni d'une classe d'équivalence d'atlas \mathcal{L} .

On appelle *plaque* un ensemble de la forme $h_i^{-1}(\mathbf{D} \times \{t\})$. Les *feuilles* de \mathcal{L} sont les plus petits ensembles connexes tels que si une plaque les rencontre, elle y est entièrement contenue.

Parfois, nous écrirons simplement “lamination” au lieu de “lamination par surfaces de Riemann”.

On dit qu'une partie F de M est *saturée* si c'est une réunion de feuilles. Si F est fermée, la restriction de la lamination à F définit une structure de lamination sur F .

Un fermé F contenu dans M est appelé un *ensemble minimal* s'il est saturé, non vide, et s'il est minimal parmi les ensembles fermés possédant ces propriétés. Cela revient à dire que toute feuille contenue dans F est dense dans F . Par le lemme de Zorn, l'adhérence de toute feuille contient un ensemble minimal. On dit qu'une lamination est *minimale* si toutes ses feuilles sont denses, c'est-à-dire si l'espace ambiant M tout entier est un ensemble minimal.

Nous allons maintenant donner une série d'exemples. Il convient avant tout de remarquer qu'une surface de Riemann compacte connexe est une lamination qui possède un atlas pour lequel les espaces transverses T_i sont réduits à des points et qui ne possède qu'une seule feuille. Le problème discuté dans cet article est celui de savoir si cet “exemple trivial” est suffisamment significatif.

2.1 Les feuilletages de dimension 2

Il s'agit du cas où M est une variété différentiable compacte et où les feuilles sont données par les surfaces intégrales d'un champ de plans orientable de dimension 2 complètement intégrable. Nous allons expliquer comment le choix d'une métrique riemannienne sur M permet de considérer ce feuilletage comme une lamination par surfaces de Riemann.

Pour cela, rappelons un théorème local démontré par Gauss dans le cas analy-

tique réel, puis amélioré progressivement jusqu'à des hypothèses de régularité très faibles. Soit g une métrique riemannienne sur une surface orientée connexe S . Au voisinage de chaque point p de S , on peut introduire un système de *coordonnées isothermes*, c'est-à-dire un difféomorphisme conforme ϕ d'un voisinage de p sur un ouvert du plan euclidien. Bien entendu, deux tels difféomorphismes ϕ diffèrent par un difféomorphisme conforme d'un ouvert du plan euclidien, c'est-à-dire par un difféomorphisme holomorphe d'un ouvert de \mathbf{C} (si l'on impose à ϕ de respecter l'orientation). Autrement dit, toute métrique riemannienne sur une surface orientée détermine naturellement une structure de *surface de Riemann*. Ce théorème dépend continûment de la métrique c'est-à-dire que si l'on dispose d'une famille de métriques riemanniennes sur une surface dépendant continûment d'un paramètre, les coordonnées isothermes dépendent continûment de ce paramètre [3]. Par conséquent, *la donnée d'une métrique riemannienne sur le fibré tangent aux feuilles d'un feuilletage orienté de dimension 2 définit naturellement une structure de lamination par surfaces de Riemann* sur ce feuilletage : il suffit d'appliquer le théorème que nous venons de citer dans des ouverts distingués pour le feuilletage.

Il existe beaucoup de méthodes de construction de feuilletages. Nous recommandons la lecture de [24, 30] pour des exemples. Nous allons nous contenter ici de quelques constructions dans le but d'illustrer la complexité de la situation.

Parmi les exemples les plus simples, il faut citer les feuilletages linéaires sur les tores. Partant du feuilletage de \mathbf{R}^3 dont les feuilles sont les plans parallèles à un plan donné Π , on passe au quotient par les translations entières de \mathbf{Z}^3 qui préservent évidemment ce feuilletage. Sur le tore quotient, on obtient un feuilletage dont les feuilles sont toutes homéomorphes à des plans si Π est "totalement irrationnel".

Une méthode très générale pour construire des exemples est la *suspension*. Soit S une variété (qui sera une surface de Riemann compacte dans notre cas) et T une variété compacte. Considérons un homomorphisme h du groupe fondamental Γ de S vers le groupe des homéomorphismes de T . Le groupe Γ opère alors diagonalement sur le produit $\tilde{S} \times T$ du revêtement universel de S et de T en préservant le feuilletage trivial dont les feuilles sont les $\tilde{S} \times \{\star\}$. Par passage au quotient, on obtient une variété M qui fibre sur S avec fibres homéomorphes à T , munie d'un feuilletage \mathcal{F} transverse à cette fibration. Les feuilles de ce feuilletage sont des revêtements de la base S et coupent les fibres T sur les orbites du groupe $h(\Gamma)$.

Par exemple, choisissons pour S une surface de Riemann compacte de genre 2 et soit π une surjection de son groupe fondamental sur un groupe libre à deux générateurs $L(\alpha, \beta)$. Si l'on choisit deux homéomorphismes a et b de T , on définit ainsi un homomorphisme de $L(\alpha, \beta)$ dans le groupe des homéomorphismes de T envoyant α sur a et β sur b . En composant avec π , on obtient un homomorphisme h de Γ vers le groupe des homéomorphismes de T et donc un feuilletage sur un fibré au dessus de S . Particularisons encore en choisissant pour T la droite projective \mathbf{CP}^1 et pour α et β deux homographies qui engendrent un groupe kleinéen $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ dont l'ensemble limite $\Lambda \subset \mathbf{CP}^1$ est un ensemble de Cantor. La suspension est dans ce cas une surface complexe M , fibrée en \mathbf{CP}^1 au dessus de S , dont le groupe structural est réduit à G . Il résulte du théorème de plagement de Kodaira que M est une surface algébrique, c'est-à-dire qui se plonge holomorphiquement dans \mathbf{CP}^N

(voir [27]). Par ailleurs, à la partie G -invariante Λ de \mathbf{CP}^1 correspond un compact $X \subset M$ qui est saturé par le feuilletage et qui coupe chaque fibre sur un ensemble de Cantor. Ce compact X , équipé de la restriction \mathcal{L} de \mathcal{F} , est un exemple typique de lamination minimale par surfaces de Riemann sur un espace qui n'est pas une variété. (La minimalité résulte du fait que toutes les orbites de l'ensemble limite d'un groupe kleinéen sont denses dans cet ensemble limite). Il existe un plongement de X dans \mathbf{CP}^N qui est continu et holomorphe en restriction aux feuilles. En choisissant une projection générique, on peut même montrer que X se plonge dans \mathbf{CP}^3 . En résumé, *il existe des laminations minimales, non réduites à une surface de Riemann, plongées holomorphiquement dans \mathbf{CP}^3 .*

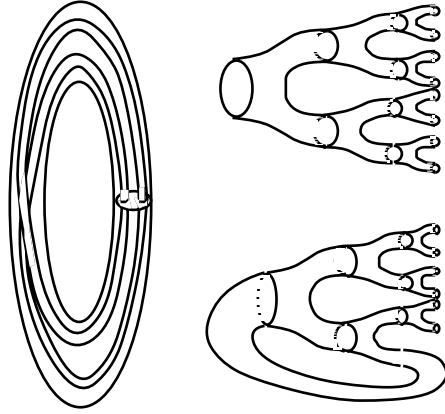
Bien entendu, si l'on projette génériquement ce dernier exemple sur un plan projectif \mathbf{CP}^2 , les feuilles ne seront plus nécessairement plongées mais seulement immergées et on n'obtient pas une lamination dans \mathbf{CP}^2 . *Nous ignorons s'il existe des laminations minimales plongées holomorphiquement dans \mathbf{CP}^2 qui ne se réduisent pas à une surface de Riemann compacte.* Cette question est une version forte de la question de l'existence d'un "minimal exceptionnel" pour les équations différentielles polynomiales dans \mathbf{C}^2 que nous allons rappeler ici car il s'agit de l'une des motivations pour l'étude systématique des laminations. Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux en deux variables complexes et considérons l'équation différentielle ordinaire dans \mathbf{C}^2 :

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

En dehors des zéros communs de P et de Q , cette équation définit un feuilletage holomorphe dont les feuilles sont les solutions complexes. Lorsque l'on compactifie \mathbf{C}^2 en \mathbf{CP}^2 , il n'est pas difficile de s'assurer que ce feuilletage se prolonge en un feuilletage holomorphe de \mathbf{CP}^2 en dehors d'un nombre fini de singularités. La question (dite "du minimal exceptionnel") est de savoir si *l'adhérence de toute feuille contient un point singulier*. Ce problème a été beaucoup étudié et semble difficile (voir [6, 8, 9]) ; une réponse positive donnerait un analogue complexe au théorème classique de Poincaré-Bendixson qui décrit les ensembles limites des champs de vecteurs sur la sphère de dimension 2 réelle. Si une feuille du feuilletage polynomial de \mathbf{CP}^2 ne s'accumulait sur aucune singularité, son adhérence serait une lamination plongée et on pourrait considérer une sous-lamination minimale \mathcal{L} contenue dans cette adhérence. Il est facile de vérifier que \mathcal{L} ne peut pas se réduire à une surface de Riemann compacte : le fibré normal d'une feuille d'un feuilletage possède en effet une connexion plate donnée par l'holonomie et il en résulte que si un feuilletage du type précédent dans \mathbf{CP}^2 avait une feuille compacte, celle-ci serait une surface de Riemann plongée dans \mathbf{CP}^2 d'auto-intersection nulle. Ceci contredit bien sûr le théorème de Bezout. Ainsi, *la question de l'existence d'une lamination minimale non triviale plongée dans \mathbf{CP}^2 est plus forte que celle du "minimal exceptionnel".*

Voici un autre exemple de feuilletage de dimension 2, dû à M. Hirsch. Dans un tore solide $\overline{\mathbf{D}} \times \mathbf{S}^1$, on retire l'intérieur d'un tore solide, voisinage d'une tresse à deux brins par exemple (voir figure). On obtient ainsi une variété de dimension 3 dont le bord est constitué de deux tores. Cette variété est naturellement feuilletée par des "pantalons", c'est-à-dire des sphères moins trois disques. Ce feuilletage est transverse au bord et induit sur chaque composante du bord un feuilletage trivial,

c'est-à-dire un feuilletage du tore dont les feuilles sont des cercles. En recollant les deux composantes connexes du bord par un difféomorphisme convenable, on obtient une variété fermée de dimension 3 munie d'un feuilletage de dimension 2. Les feuilles de ce feuilletage sont toutes homéomorphes à une sphère privée d'un ensemble de Cantor sauf celles qui correspondent aux "points périodiques" du recollement, qui ont un genre non nul.



2.2 Systèmes dynamiques de dimension 1

Nous allons décrire ici une méthode, due à D. Sullivan, qui permet d'associer une lamination à certains systèmes dynamiques de façon telle que les dynamiques sont conjuguées si et seulement si les laminations associées sont isomorphes [44].

Cette idée de coder une dynamique par un objet géométrique n'est pas nouvelle et nous commençons par en donner un exemple élémentaire. Soit $f : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de difféomorphisme holomorphe contractant. On lui associe la courbe elliptique E qui est le quotient d'un voisinage épointé assez petit de l'origine par l'action de f . Cette courbe complexe E est marquée, dans le sens où elle possède une classe d'homotopie privilégiée (celle qui correspond à f). Il est très facile de vérifier que deux germes sont holomorphiquement conjugués si et seulement si les courbes elliptiques marquées sont isomorphes. On peut procéder de la même manière en dimension supérieure et ceci permet de montrer que l'étude dynamique des germes de biholomorphismes contractants est équivalente à celle de la géométrie des variétés de Hopf [29]. Dans le même ordre d'idée, on pourra consulter [32, 33] qui étudient certains systèmes dynamiques holomorphes locaux à travers des variétés complexes naturellement associées.

Pour expliquer la construction de D. Sullivan, on commence par remarquer que la droite affine orientée \mathbf{R} peut être considérée comme le bord du demi-plan supérieur de Poincaré $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0\}$ de manière naturelle, c'est-à-dire que toute application affine $x \in \mathbf{R} \mapsto ax+b \in \mathbf{R}$ avec $a > 0$ se prolonge en un biholomorphisme $z \in \mathbf{H} \mapsto az + b \in \mathbf{H}$. Une autre manière d'exprimer la même chose consiste à dire que l'ensemble des vecteurs non nuls et positivement orientés d'une droite affine orientée s'identifie naturellement au demi-plan supérieur de Poincaré.

Supposons maintenant que l'on dispose d'un difféomorphisme f d'une variété

compacte V qui préserve un feuilletage \mathcal{F} orienté de dimension réelle 1 avec les propriétés suivantes.

1. f dilate les feuilles de \mathcal{F} . Cela signifie que si l'on munit V d'une métrique riemannienne convenable, la différentielle de f dilate les vecteurs tangents à \mathcal{F} .
2. f agit affinement sur les feuilles de \mathcal{F} . Cela signifie que l'on suppose que ces feuilles sont identifiées à des droites affines et que ces structures affines sont préservées par f . Nous discuterons cette condition plus loin et nous verrons qu'elle résulte en fait de la condition 1.

On peut alors considérer l'espace V' formé des vecteurs tangents à \mathcal{F} , non nuls et positivement orientés. Il s'agit d'une variété non compacte, munie d'un feuilletage \mathcal{F}' par des copies du demi-plan \mathbf{H} et sur laquelle la différentielle de f agit, de manière holomorphe (et isométrique) dans les feuilles. La condition 1 entraîne que l'action de f sur V' est libre et propre de sorte que le quotient de V' par f est une variété compacte \overline{V} équipée d'un feuilletage (et donc d'une lamination) $\overline{\mathcal{F}}$ dont les feuilles sont des quotients de \mathbf{H} . Plus précisément, on distingue deux cas. Si une feuille de \mathcal{F} n'est préservée par aucune puissance de f , la feuille de $\overline{\mathcal{F}}$ qui lui correspond est isomorphe à \mathbf{H} . Par contre, si une feuille de \mathcal{F} est préservée par f^n (et par aucun f^i avec $0 < i < n$), alors f^n agit sur cette feuille comme une homothétie de rapport $\lambda > 1$ et la feuille correspondante de $\overline{\mathcal{F}}$ est le quotient de \mathbf{H} par cette homothétie : c'est un cylindre isomorphe, en tant que surface de Riemann, à l'anneau de module $\log(\lambda)$ défini par $\{w \in \mathbf{C} \mid 1 < |w| < \lambda\}$.

Nous n'allons pas montrer en détail comment la condition 1 entraîne la condition 2. Une métrique riemannienne sur V permet de paramétrer les feuilles de \mathcal{F} par longueur d'arc et ceci définit en particulier une structure affine sur les feuilles de \mathcal{F} . Bien entendu, cette structure ne satisfait pas à la condition 2 car f ne multiplie pas nécessairement les longueurs des vecteurs tangents à \mathcal{F} par une constante. L'idée consiste alors à itérer la structure affine par les puissances de f et à montrer que cette suite de structures converge vers une structure affine qui satisfait 2. Concrètement, définir une structure affine sur une variété de dimension 1 est essentiellement équivalent à donner une définition de barycentre, par exemple du milieu de deux points. Si a, b sont deux points situés sur la même feuille de \mathcal{F} , on considère les points $f^n(c_n)$ où c_n est le milieu du segment joignant $f^{-n}(a)$ à $f^{-n}(b)$, calculé avec la métrique riemannienne auxiliaire. On montre que c_n converge et on définit le milieu du segment $[a, b]$ comme la limite de cette suite ; ceci définit la structure affine invariante cherchée. Pour établir la convergence, la condition de dilatation intervient clairement de manière importante. Pour la démonstration précise et pour les hypothèses de différentiabilité requises, on consultera [34].

Il faut encore décrire des situations où l'on rencontre de tels difféomorphismes dilatant un feuilletage de dimension 1. Le cas le plus évident et qui a été le plus étudié est celui d'un difféomorphisme d'Anosov dont l'un des feuilletages invariants est de dimension 1. On obtient ainsi beaucoup d'exemples.

Cependant, le cas étudié par D. Sullivan est différent. Considérons une application $g : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ du cercle dans lui même et qui est dilatante, *i.e.* dont la dérivée

est partout strictement supérieure à 1. Une telle application ne peut bien sûr pas être un difféomorphisme ; c'est un revêtement du cercle. Pour transformer la dynamique non inversible de g en une dynamique inversible, on considère son *extension naturelle* définie de la manière suivante. Soit V l'ensemble des suites de points du cercle $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ qui sont des orbites de g , c'est-à-dire telles que $g(x_n) = x_{n+1}$. Cet espace, muni de la topologie induite par la topologie produit, est un espace compact qui possède une bijection naturelle f définie par $f((x_n)) = ((x_{n+1}))$ et une projection $\pi : (x_n) \in V \mapsto x_0 \in \mathbf{S}^1$. Les fibres de π sont des ensembles de Cantor et on a évidemment $g \circ \pi = \pi \circ f$. Il existe un "feuilletage de dimension 1" sur V qui est invariant et dilaté par f . En effet, se donner un point de V revient à se donner un point x_0 du cercle et à choisir une suite de pré-images successives par g . Si le point x_0 se déplace continûment sur le cercle, on peut suivre ces choix de pré-images par continuité et on décrit ainsi une courbe dans V . Ces courbes sont les feuilles de ce feuilletage \mathcal{F} . On peut aussi définir ces feuilles comme les variétés instables de f : deux points a, b de V sont dans la même feuille de \mathcal{F} si et seulement si la distance entre $f^{-n}(a)$ et $f^{-n}(b)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous sommes exactement dans la même situation que précédemment à ceci près que V n'est pas une variété. On peut cependant faire la même construction : on produit une structure affine invariante sur les feuilles de \mathcal{F} puis on en déduit une lamination par surfaces de Riemann $\overline{\mathcal{F}}$ comme précédemment. *En résumé, nous avons associé une lamination par surfaces de Riemann à toute application dilatante g du cercle.* À chaque point périodique x de g , de période n correspond une feuille de cette lamination qui est un anneau dont le module est $\log((g^n)'(x))$. Puisque le module d'un anneau est un invariant holomorphe, on voit que si deux applications dilatantes du cercle définissent des laminations isomorphes, les dérivées de ces deux applications sont les mêmes en leurs points périodiques. C'est cette remarque qui est à la base du théorème de D. Sullivan suivant lequel *deux applications dilatantes du cercle de classe C^r ($r \geq 2$) sont conjuguées par un difféomorphisme de classe C^r si et seulement si les laminations qui leur sont associées sont holomorphiquement équivalentes.*

On peut aussi procéder de manière analogue avec des applications polynomiales d'une variable complexe. Plus généralement, soit U un ouvert simplement connexe de \mathbf{C} et $F : U \rightarrow F(U)$ une application holomorphe propre telle que $\overline{U} \subset F(U)$. Pour une telle application à *allure polynomiale* (voir [16]), on définit l'*ensemble de Julia rempli* K comme l'intersection des $F^{-n}(U)$ pour $n \geq 0$. C'est un compact que nous supposons connexe. On considère alors l'ensemble V' des suites de points $(z_n)_{n \geq 0} \in U \setminus K$ telles que $F(z_n) = z_{n-1}$ pour tout $n > 0$. Convenons de dire que deux suites z_n et z'_n sont équivalentes s'il existe un entier k tel que $z_n = z'_{n+k}$ pour tout n assez grand. Le quotient V de V' par cette relation d'équivalence est un compact muni d'une lamination par surfaces de Riemann. Les feuilles de cette lamination s'obtiennent en déplaçant z_0 dans $F(U) \setminus K$ et en suivant par continuité les choix des pré-images z_n . *Ceci permet d'associer une lamination par surfaces de Riemann à toute application holomorphe à allure polynomiale.*

En fait ces deux dernières constructions sont reliées. Par représentation conforme, on peut envoyer le complémentaire de K sur le complémentaire du disque unité dans \mathbf{C} . L'application F , conjuguée par cette représentation conforme, est alors définie

dans un anneau de la forme $\{w \in \mathbf{C} \mid 1 < |w| < 1 + \epsilon\}$ et se prolonge, par le principe de réflexion de Schwarz, au cercle unité. On montre que cette extension est une application dilatante du cercle et que la lamination associée à celle-ci est isomorphe à la lamination associée à l'application F . Pour les détails et beaucoup d'informations complémentaires, on consultera [34].

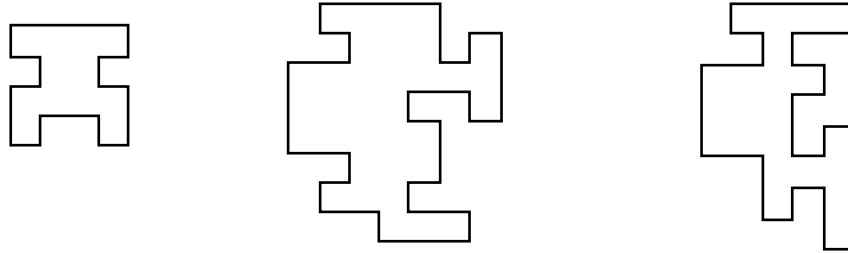
2.3 Pavages polygonaux, immeubles de Tits

Nous allons décrire ici d'autres exemples de laminations qui apparaissent naturellement comme des objets abstraits non plongés dans des variétés, autrement dit pour lesquels les espaces transverses T_i ne sont pas des variétés.

Considérons un nombre fini de polygones P_1, P_2, \dots, P_k dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 . Supposons que ces polygones pavent le plan par translation, c'est-à-dire qu'on puisse recouvrir \mathbf{R}^2 par des pavés qui sont des translatés des P_i de façon que deux de ces translatés qui ne sont pas disjoints se rencontrent le long d'une réunion de côtés. Soit \mathcal{P} l'ensemble des pavages de ce type. Insistons sur le fait que deux pavages qui diffèrent d'une translation de \mathbf{R}^2 sont a priori différents : deux pavages ne sont considérés comme identiques que s'ils ont les *mêmes* pavés. Nous allons faire de \mathcal{P} un espace métrique compact équipé d'une lamination naturelle. Pour illustrer la situation, considérons d'abord le cas trivial où on ne dispose que d'un polygone qui est le carré unité dans \mathbf{R}^2 . À translation près, il n'y a qu'un pavage possible, qui est préservé par les translations entières. Ainsi, dans ce cas, l'espace \mathcal{P} s'identifie à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ c'est-à-dire au tore de dimension 2 correspondant à la position de l'origine par rapport à la maille du pavage.

Plus généralement, si Π_1 et Π_2 désignent deux pavages de \mathcal{P} , on note $R(\Pi_1, \Pi_2)$ le plus grand réel positif R (éventuellement infini) tel que les deux pavages Π_1 et Π_2 coïncident en restriction au disque de centre l'origine et de rayon R . Si $v \in \mathbf{R}^2$ et $\Pi \in \mathcal{P}$, on note $\Pi + v$ le pavage obtenu à partir de Π en le translatant par le vecteur v . Soient ϵ, ϵ' deux réels strictement positifs (petits), N un réel positif (grand) et Π un pavage dans \mathcal{P} . On note $U_{\epsilon, \epsilon', N}(\Pi) \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des Π' de \mathcal{P} tels qu'il existe deux vecteurs v, v' avec $\|v\| < \epsilon$, $\|v'\| < \epsilon'$ et $R(\Pi + v, \Pi' + v') > N$. Ces ensembles forment une base de topologie qui fait de \mathcal{P} un espace compact (métrisable). Deux pavages sont proches si, en les translatant par de petits vecteurs, on peut les faire coïncider sur un grand disque centré à l'origine. La compacité résulte d'un procédé diagonal classique et du fait que dans un disque de rayon donné, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour un pavage dont l'un des sommets est en un point donné. Nous laissons les détails au lecteur. Bien sûr, \mathbf{R}^2 agit par translations sur le compact \mathcal{P} . Les orbites définissent une structure de lamination sur \mathcal{P} . Les feuilles sont des plans euclidiens, des cylindres ou des tores ; elles correspondent bijectivement aux types de pavages, où on identifie maintenant deux pavages s'ils diffèrent d'une translation. Les orbites compactes correspondent aux pavages périodiques et, en général, le stabilisateur d'un point de \mathcal{P} est le groupe de symétries de ce pavage, c'est-à-dire le groupe des translations qui le préservent. Ainsi, *nous avons associé à la famille de polygones P_1, \dots, P_k une lamination dont la structure dynamique décrit précisément l'espace des pavages considérés.*

On dispose aujourd’hui de nombreux exemples de jeux de polygones P_i qui pavent le plan par translations mais qui ne le pavent pas de manière périodique. Les exemples les plus célèbres sont ceux de Penrose : on pourra consulter [28] pour une description de ces pavages. Voici un exemple (extrait de [37]) de trois “polyominos” qui pavent le plan, mais pas de manière périodique. Ils fournissent donc des exemples de laminations sans feuille compacte. (Pour être précis, il faudrait ajouter à ces trois polygones leurs images par les isométries $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$ ou $(\pm y, \pm x)$.)

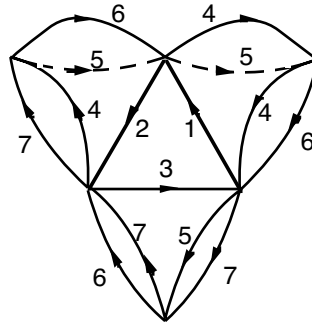


On peut procéder de manière analogue lorsque l’on s’intéresse à des pavages dont les pavés ne sont pas translatés des P_i mais où l’on s’autorise également des déplacements du plan euclidien \mathbf{R}^2 . Il faut modifier en conséquence la définition de la distance entre pavages : deux pavages seront proches si on peut les faire coïncider sur un grand disque centré sur l’origine en les déplaçant par des isométries proches de l’identité. L’espace \mathcal{P} correspondant est encore compact et muni d’une action du groupe des déplacements : les orbites du groupe des translations définissent alors une lamination sur \mathcal{P} .

On peut encore modifier la construction en partant de polygones P_i dans le disque de Poincaré \mathbf{D} muni de sa métrique hyperbolique. On utilise alors le groupe des isométries directes de \mathbf{D} , isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ (le stabilisateur d’un point étant isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$). On obtient un espace compact \mathcal{P} muni d’une action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ dont les orbites sont de dimension 3. L’action du sous-groupe $\mathrm{SO}(2)$ est libre sauf dans le cas très particulier où certains pavages sont invariants par certaines rotations. Dans l’espace quotient par cette action de $\mathrm{SO}(2)$, on obtient une lamination dont les feuilles sont de dimension 2 ; la feuille passant par un pavage Π est le quotient de \mathbf{D} par le groupe des isométries de \mathbf{D} préservant le pavage. Dans le cas où l’action de $\mathrm{SO}(2)$ n’est pas libre, on est dans une situation semblable à celle du quotient d’une surface de Riemann par un groupe fini, qui conduit comme on le sait à des “orbifolds” dont la théorie est très analogue à celle des surfaces de Riemann classiques.

Dans le même esprit, on peut construire des exemples intéressants de laminations à partir de certains *immeubles de Tits*. Nous renvoyons à [7] pour un excellent exposé de la théorie générale et nous nous contenterons ici d’un exemple. Un immeuble de Tits de type \tilde{A}_2 est un complexe simplicial particulier de dimension 2 dont les faces sont des triangles appelés *chambres* qui sont équipés d’une métrique plate qui en fait des triangles équilatéraux de côtés de longueur 1. On considère (la réalisation géométrique de) ce complexe comme un espace métrique pour lequel la distance entre deux points est la longueur du plus court chemin qui les joint. Par ailleurs certains sous-complexes sont privilégiés et appelés *appartements* ; ils

sont isomorphes à un plan euclidien pavé par triangles équilatéraux. Les conditions imposées à ces appartements et ces chambres sont les suivantes. Tout d'abord, deux chambres quelconques appartiennent à un même appartement. D'autre part, si deux appartements ont une partie commune, il doit exister un isomorphisme de la réunion qui permute les deux appartements et qui est l'identité sur l'intersection. L'une des raisons principales qui justifient l'étude de ces objets est qu'ils jouent le rôle des espaces symétriques pour les groupes de Lie p -adiques : pour chaque nombre premier p , il existe par exemple un immeuble I_p de type \tilde{A}_2 sur lequel le groupe $SL(3, \mathbf{Q}_p)$ agit naturellement. Chaque arête est incidente à $p + 1$ chambres et la situation locale au voisinage d'un sommet est décrite de la manière suivante : il y a une arête qui émane d'un sommet pour chaque point et chaque droite du plan projectif sur le corps fini \mathbf{F}_p et deux telles arêtes sont dans la même chambre si elles correspondent à un point et à une droite qui sont incidentes. Chaque sous-groupe Γ de $SL(3, \mathbf{Q}_p)$ agit sur I_p et il existe de nombreux exemples arithmétiquement intéressants de groupes Γ pour lesquels l'action est libre et le quotient I_p/Γ est un polyèdre fini P . L'étude de ces quotients finis est analogue à celle des quotients du disque de Poincaré par les groupes fuchsien arithmétiques. Voici un exemple très concret d'un tel quotient P pour $p = 2$, extrait de [5]. Dans la figure, il faut identifier 3 par 3 les arêtes portant le même numéro ; le polyèdre P qui en résulte a 1 sommet, 7 faces et 7 arêtes.



Montrons comment associer une lamination à une telle situation. Soit \tilde{E} l'espace des plongements isométriques du plan euclidien \mathbf{R}^2 dans I_p (l'image est alors un appartement) muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Le groupe Γ agit naturellement sur \tilde{E} par composition au but et le quotient est un espace compact E . Le groupe additif \mathbf{R}^2 agit par translations à la source ; ses orbites définissent une lamination sur E . L'étude dynamique de ces laminations est très intéressante : par exemple, on peut montrer que la réunion des feuilles compactes est dense dans E .

De la même manière, on peut construire de nombreuses laminations dont les feuilles ne sont plus des surfaces plates mais des surfaces à courbure -1 . Il suffit de considérer des immeubles d'un autre type dont les appartements sont maintenant des disques de Poincaré, pavés par des polygones hyperboliques. On trouve de nombreux exemples dans les travaux de M. Gromov, N. Benakli et F. Haglund.

Voici encore un exemple de lamination obtenue par le même genre de procédé. Soit S une surface de Riemann compacte. On peut considérer la famille des revêtements

finis (étales) de S . Ceci forme un système projectif naturel : la limite projective de ce système est une lamination \mathcal{L}_S sur un espace compact M_S . Concrètement, un point de m de M_S est une application qui associe à chaque revêtement fini $\pi : \Sigma \rightarrow S$ un point $m(\pi)$ dans Σ de sorte que si $p : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ est un revêtement fini, on a $p(m(\pi \circ p)) = m(\pi)$. Comprendre la dynamique d'une telle lamination n'est pas facile...

Nous ne développerons pas plus ces exemples. Notre seul but était d'insister sur le fait que l'étude des laminations ne doit pas se limiter au cas des systèmes dynamiques "classiques".

3 Mesures transverses, mesures harmoniques

3.1 Classe fondamentale

On se fixe une lamination \mathcal{L} sur un espace compact M et un atlas $h_i : U_i \rightarrow \mathbf{D} \times T_i$ dont les changements de cartes sont de la forme $h_{ij}(z, t) = (f_{ij}(z, t), \gamma_{ij}(t))$.

Dans le but d'essayer de généraliser la théorie des surfaces de Riemann, on est amené à introduire les formes différentielles sur M .

Dans un ouvert distingué du type $\mathbf{D} \times T$, nous appellerons *k-forme différentielle* une famille de k -formes différentielles réelles (disons de classe C^∞) dans les plaques $\mathbf{D} \times \{t\}$ qui dépend continûment du paramètre transverse t (dans la topologie C^∞).

Une k -forme différentielle sur la lamination \mathcal{L} est donnée par des k -formes différentielles dans les ouverts distingués d'un atlas qui sont compatibles sur les intersections dans un sens évident. On notera $A^k(\mathcal{L})$ l'espace des k -formes sur \mathcal{L} ; c'est un espace vectoriel topologique. L'opérateur de différentiation le long des feuilles définit un opérateur $d : A^k(\mathcal{L}) \rightarrow A^{k+1}(\mathcal{L})$. On définit de même des formes différentielles de classe C^r pour $0 \leq r \leq \infty$.

Exactement de la même manière, on peut exploiter la structure complexe des feuilles et définir des espaces $A^{p,q}(\mathcal{L})$ de formes (à valeurs complexes) de type (p, q) et des opérateurs $\partial, \bar{\partial}$ de $A^{p,q}(\mathcal{L})$ vers $A^{p+1,q}(\mathcal{L})$ et $A^{p,q+1}(\mathcal{L})$ respectivement.

Plus généralement, on peut étendre sans aucune difficulté la plupart des définitions classiques relatives aux surfaces de Riemann : dans chaque situation, on considère des objets qui dépendent continûment du point et qui sont lisses ou holomorphes dans les feuilles suivant les cas considérés. On suppose toujours que les dérivées le long des feuilles sont continues dans M .

La situation la plus proche de celle des surfaces de Riemann est celle où on dispose d'une *classe fondamentale* : il s'agit de pouvoir intégrer une 2-forme. Une 2-forme est dite (strictement) *positive* si elle est (strictement) positive en restriction aux feuilles.

Définition 3.1 *Un cycle feuilleté pour la lamination \mathcal{L} est un opérateur linéaire continu $I : A^2(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}$ qui est strictement positif sur les formes strictement positives et nul sur les formes exactes.*

L'exemple le plus évident est celui donné par le courant d'intégration sur une feuille compacte. Ce concept a été introduit sous une forme plus générale par D. Sullivan dans [43] et fait suite aux travaux de nombreux auteurs dont J. Plante [39]. Le résultat important est que ces cycles feuilletés correspondent aux *mesures transverses invariantes*.

Définition 3.2 *Une mesure transverse invariante μ pour la lamination \mathcal{L} est la donnée d'une mesure positive μ_i sur chaque espace transverse T_i de telle sorte que si $B \subset T_i$ est un borélien contenu dans le domaine de définition de γ_{ij} , alors $\mu_i(B) = \mu_j(\gamma_{ij}(B))$.*

Il n'est pas difficile de s'assurer que la donnée d'une mesure transverse invariante pour un atlas en produit une autre pour tout atlas équivalent.

Soit μ une mesure transverse invariante et f_i une partition de l'unité relative au recouvrement par les U_i (on s'assure facilement de l'existence de telles partitions de l'unité, lisses dans les feuilles). Soit ω une 2-forme sur \mathcal{L} . Si le support de ω est contenu dans un ouvert distingué U_i , on peut considérer ω comme une forme sur $\mathbf{D} \times T_i$. En intégrant sur les plaques $\mathbf{D} \times \{t\}$, on obtient une fonction sur T_i qui peut être à son tour intégrée par rapport à la mesure μ_i . On note alors $I(\omega)$ le nombre obtenu. Lorsque ω n'est pas à support dans un ouvert U_i , on décompose ω sous la forme $\sum_i f_i \cdot \omega$ et on définit $I(\omega)$ comme la somme $\sum_i I(f_i \cdot \omega)$. Ceci définit un opérateur linéaire $I : A^2(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}$ dont on s'assure facilement qu'il ne dépend pas des choix faits (atlas, partition de l'unité) et qu'il s'agit bien d'un cycle feuilleté (*i.e.* qu'il est nul sur les formes exactes). Ainsi, toute mesure transverse invariante donne lieu à un cycle feuilleté. Il se trouve que la réciproque est également vraie de sorte que les deux points de vue sont équivalents [43].

L'une des difficultés majeures de cette approche est qu'un grand nombre de laminations ne possèdent pas de cycle feuilleté. Le théorème de Hahn-Banach donne :

Proposition 3.3 ([43]) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *La lamination \mathcal{L} ne possède pas de cycle feuilleté.*
- *Il existe une 2-forme exacte qui est strictement positive.*

En pratique, il est plus facile de vérifier s'il existe une mesure transverse invariante. Nous encourageons le lecteur à déterminer parmi les exemples que nous avons décrits quelles sont les laminations qui possèdent des mesures transverses invariantes. Pour une lamination définie par la suspension d'un homomorphisme du groupe fondamental d'une surface vers le groupe des homéomorphismes du compact T , l'existence d'une mesure transverse invariante est équivalente à celle d'une mesure finie sur T invariante par l'action du groupe. On voit donc qu'en général, l'existence d'un cycle feuilleté est une hypothèse très forte.

Il existe cependant des hypothèses géométriques sur les feuilles, liées par exemple à leur croissance, qui impliquent l'existence d'un cycle feuilleté (voir par exemple [26, 39]).

Une notion plus générale que celle de cycle feuilleté est celle de courant harmonique, introduit par L. Garnett dans un contexte plus général [19]. On remarque d'abord que $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$ est un opérateur réel de $A^0(\mathcal{L})$ vers $A^2(\mathcal{L})$ dont l'image est contenue dans l'espace des formes exactes.

Définition 3.4 *Un courant harmonique (feuilleté) est un opérateur linéaire $I : A^2(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}$ qui est continu, strictement positif sur les formes strictement positives, et nul sur les formes du type $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ pour toute fonction u continue sur M et lisse dans les feuilles.*

Évidemment un cycle feuilleté est un courant harmonique. L'intérêt de cette notion vient du résultat suivant :

Proposition 3.5 ([19]) *Toute lamination possède au moins un courant harmonique.*

Démonstration D'après le théorème de Hahn-Banach, il s'agit de montrer qu'une 2-forme strictement positive ω ne peut pas être limite de formes du type $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_n$. Il suffit donc de montrer que $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ ne peut pas être strictement positif. Puisque M est compact, u atteint son maximum en un certain point x . La restriction de u à la feuille passant par x atteint elle aussi son maximum en x et $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ est donc négatif ou nul en ce point (en coordonnées locales $x + \sqrt{-1}y$, on a $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u = 1/2(\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2) dx dy$). \square

Une façon moins canonique de définir ces courants harmoniques consiste à choisir une métrique hermitienne sur le fibré tangent à \mathcal{L} . Ceci définit un élément d'aire le long des feuilles et permet donc d'identifier $A^2(\mathcal{L})$ à l'espace des fonctions sur M . Le courant I définit donc un élément du dual de l'espace des fonctions sur M , et la condition de positivité montre que I se prolonge à l'espace des fonctions continues, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une mesure positive μ sur M . Avec ce point de vue, la condition d'harmonicité sur la mesure μ s'exprime de la façon suivante. L'intégrale $\int \Delta u d\mu$ est nulle pour toute fonction lisse u sur M où Δ désigne le laplacien de long des feuilles pour la métrique hermitienne choisie. Pour cette raison, nous parlerons souvent de mesure harmonique, même si cela suppose un choix non canonique d'une métrique hermitienne le long des feuilles.

La nature locale des courants harmoniques est facile à décrire [19]. Considérons un courant harmonique I et considérons sa restriction à un ouvert distingué $U_i \simeq \mathbf{D} \times T_i$. Alors, il existe une mesure de probabilité ν_i sur T_i et une fonction $\phi_i : \mathbf{D} \times T_i \rightarrow \mathbf{R}^+$ qui, pour ν_i -presque tout point t de T_i , est définie et harmonique sur toute la plaque $\mathbf{D} \times \{t\}$, de telle sorte que si ω est une 2-forme à support dans U_i , on a :

$$I(\omega) = \int_{T_i} \left(\int_{\mathbf{D} \times \{t\}} \phi_i \omega \right) d\nu_i(t).$$

Cette écriture locale n'est pas unique. Cependant, si on dispose de deux écritures locales, utilisant deux systèmes ν_i, ϕ_i et ν'_i, ϕ'_i , alors, il existe une fonction $\delta_i : T_i \rightarrow \mathbf{R}_*^+$ définie ν_i -presque partout telle que :

$$\nu'_i = \delta_i^{-1} \nu_i \quad \phi'_i(z, t) = \delta_i(t) \phi_i(z, t).$$

Il en résulte que les fonctions harmoniques $\phi_i(z, t)$ définies sur les plaques sont compatibles sur leurs intersections à une constante multiplicative près et ceci permet donc de définir des fonctions harmoniques positives $\tilde{\phi}$ sur le revêtement universel de presque toute feuille (en fait sur un revêtement abélien).

Les courants harmoniques qui sont des cycles feuilletés sont caractérisés par le fait que les fonctions $\phi_i(z, t)$ ne dépendent pas de la variable z autrement dit que $\tilde{\phi}$ est une constante. Puisque toute fonction harmonique positive sur \mathbf{C} est constante, on obtient le corollaire suivant :

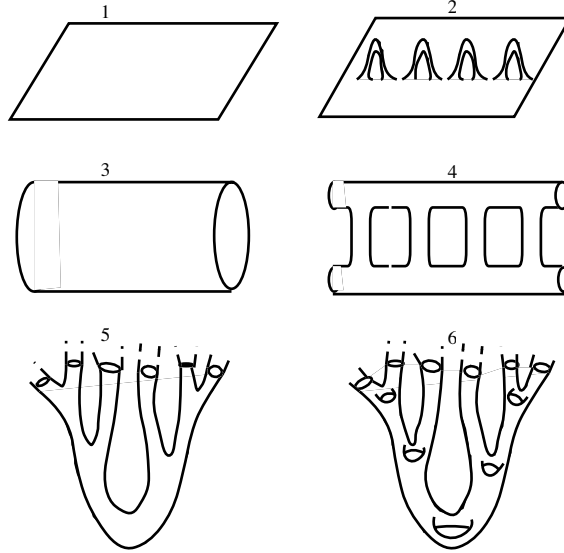
Corollaire 3.6 *Soit μ une mesure harmonique pour une lamination. Si le revêtement universel de μ -presque toute feuille est conformément équivalent à \mathbf{C} , alors μ est en fait un cycle feuilleté.*

3.2 Le théorème ergodique, le type topologique des feuilles

Comme application de la notion de mesure harmonique, nous allons décrire rapidement un invariant d'une lamination, analogue au genre d'une surface de Riemann. Il est clair que la classification à homéomorphismes près des laminations n'est pas raisonnable. Un théorème de J. Cantwell et L. Conlon affirme par exemple que pour toute surface connexe non compacte L , et pour toute variété compacte de dimension 3, il existe un feuilletage de dimension 2 sur M dont l'une des feuilles est homéomorphe à L [11]. On remarquera qu'il existe un nombre non dénombrable de types d'homéomorphismes des surfaces non compactes. . . Par contre, si l'on cherche plus modestement à étudier la topologie de presque toutes les feuilles, par rapport à une mesure harmonique, on a :

Théorème 3.7 ([22]) *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination et μ une mesure harmonique. Alors, pour μ -presque tout point x de M , la feuille de \mathcal{L} qui passe par x est soit une surface de Riemann compacte, soit homéomorphe à l'une des six surfaces suivantes :*

1. le plan,
2. le plan auquel on ajoute une infinité d'anses (le "monstre du Loch-Ness"),
3. le cylindre,
4. le cylindre auquel on ajoute une infinité d'anses s'accumulant sur les deux bouts (l'"échelle de Jacob"),
5. la sphère privée d'un ensemble de Cantor,
6. la sphère privée d'un ensemble de Cantor à laquelle on ajoute une infinité d'anses s'accumulant sur tous les bouts.



Nous n'allons pas entrer dans les détails de la preuve et nous allons uniquement donner l'idée d'un cas particulier. Ceci nous permettra de montrer comment la donnée d'une mesure harmonique permet une étude ergodique des laminations.

Soit L une variété riemannienne, $x \in L$ un point base et $\Omega_x(L)$ l'ensemble des applications continues γ de \mathbf{R}^+ dans L telles que $\gamma(0) = x$. En utilisant le noyau de la chaleur sur la variété L , la théorie du mouvement brownien permet de construire une mesure de probabilité naturelle, dite de Wiener, notée w_x , sur $\Omega_x(L)$.

Cette construction s'applique en particulier à la feuille L_x de la lamination \mathcal{L} passant par le point x de M . La réunion Ω des $\Omega_x(L_x)$ est l'espace des applications continues de \mathbf{R}^+ dans M dont l'image est contenue dans une feuille. La donnée d'une mesure finie μ sur M permet d'intégrer toutes ces mesures w_x pour produire une mesure $\bar{\mu}$ sur Ω . Précisément, si B est un borélien de Ω , on pose $\bar{\mu}(B) = \int_M w_x(B \cap \Omega_x(L_x)) d\mu$. L'intérêt de cet espace Ω est qu'il est muni d'une dynamique : si $\tau > 0$ et si $\gamma \in \Omega$, on pose $S_\tau(\gamma)(s) = \gamma(s + \tau)$. Ces transformations S_τ de Ω forment un semi-groupe, *i.e.* $S_{\tau_1 + \tau_2} = S_{\tau_1} \circ S_{\tau_2}$ et on peut montrer facilement que S_τ préserve $\bar{\mu}$ si et seulement si μ est harmonique. En résumé, la donnée d'une mesure harmonique pour une lamination mène à un semi-groupe à un paramètre de transformations qui préservent une mesure finie pour lequel on peut appliquer les méthodes classiques de la théorie ergodique par exemple le théorème ergodique de Birkhoff :

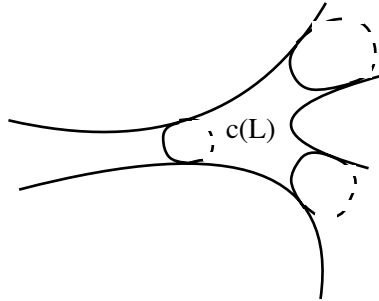
Théorème 3.8 Soit μ une mesure harmonique pour une lamination (M, \mathcal{L}) équipée d'une métrique hermitienne. Soit B un borélien de M . Alors, pour μ -presque tout point x de M , et pour w_x -presque tout chemin γ de $\Omega_x(L_x)$ la limite suivante existe :

$$l(x, \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m\{\tau \in [0, t] \mid \gamma(\tau) \in B\}$$

où m désigne la mesure de Lebesgue. De plus, il existe une fonction mesurable $l : M \rightarrow \mathbf{R}$ constante sur les feuilles de (M, \mathcal{L}) telle que pour μ -presque tout x et pour w_x -presque tout γ , on ait $l(x) = l(x, \gamma)$. Enfin, $\int l(x) d\mu = \mu(B)$.

Pour illustrer l'usage du théorème ergodique, nous allons montrer qu'il n'existe pas de lamination (M, \mathcal{L}) dont toutes les feuilles sont homéomorphes à une sphère moins trois points. C'est bien sûr un cas très particulier du théorème 3.7. En fait, pour simplifier encore la situation, nous allons supposer de plus que toutes les feuilles sont à courbure constante -1 . Nous discuterons de cette hypothèse au paragraphe 5.2 et nous verrons que c'est en fait une hypothèse anodine.

Sur une surface L homéomorphe à une sphère moins trois points, il existe trois classes d'homotopie de courbes fermées simples non homotopes à un point. Si une surface riemannienne à courbure négative est une feuille d'une lamination, elle est complète et chacune de ces classes d'homotopie contient une unique géodésique fermée. En effet, dans une lamination, une courbe fermée contenue dans une feuille et suffisamment courte est contenue dans une plaque ; elle est donc homotope à un point dans cette feuille. Les trois géodésiques de L bordent un domaine compact $c(L) \subset L$: le "cœur convexe" de L .



Supposons maintenant qu'il existe une lamination dont toutes les feuilles soient de ce type et considérons la réunion B de tous les cœurs convexes de toutes les feuilles. Il n'est pas difficile de s'assurer que B est un borélien et on peut donc lui appliquer le théorème ergodique pour une certaine mesure harmonique μ . La mesure $\mu(B)$ est certainement non nulle car d'après la description locale des mesures harmoniques, un borélien de mesure nulle rencontre presque toute feuille sur un borélien d'aire nulle (pour l'élément d'aire des feuilles). D'après le théorème ergodique, on conclut que pour μ -presque tout point x et pour w_x -presque tout chemin $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow L_x$, le temps moyen passé par γ dans le cœur $c(L_x)$ existe et n'est pas nul. Il est intuitivement clair, et facile à établir, que ceci n'est pas possible : pour w_x -presque tout chemin $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow L_x$, la courbe γ tend au contraire vers l'infini dans L_x et en particulier le temps moyen de passage dans $c(L_x)$ est nul. C'est la contradiction cherchée.

Il y a des preuves plus élémentaires du fait qu'il n'existe pas de laminations dont toutes les feuilles sont homéomorphes à des sphères moins trois points. Nous avons cependant esquissé celle-ci car c'est essentiellement la même idée qui permet de démontrer le théorème 3.7 : on montre qu'il est possible de définir un analogue du cœur convexe pour toute surface qui n'est pas l'une des six décrites plus haut.

Très récemment, J. Cantwell et L. Conlon ont obtenu un analogue topologique de 3.7 (voir [12]). Ils montrent en particulier que pour toute lamination *minimale* (M, \mathcal{L}) , il existe un G_δ dense $X \subset M$ qui est réunion de feuilles homéomorphes à l'une des six feuilles décrites dans 3.7.

4 Théorèmes de Gauss-Bonnet et de Riemann-Roch

4.1 Quelques contre-exemples

On peut être tenté d'essayer de généraliser aux laminations le formalisme cohomologique et les théorèmes de type de Rham, Gauss-Bonnet ou Riemann-Roch. Nous allons commencer par donner quelques exemples montrant que ce n'est pas si simple !

Considérons tout d'abord la cohomologie de de Rham $H^*(\mathcal{L})$, obtenue en quotientant les formes fermées par les formes exactes. La difficulté rencontrée est que cet espace peut être de dimension infinie même dans les cas les plus élémentaires.

L'exemple le plus simple où se produit ce phénomène est celui d'une lamination produit $S \times T$ d'une surface de Riemann S par un espace compact T . Une forme fermée (*resp.* exacte) pour \mathcal{L} n'est autre qu'une application continue de T dans l'espace des formes fermées (*resp.* exactes) de S . Par conséquent, la cohomologie de de Rham de \mathcal{L} est l'espace, en général de dimension infinie, des applications continues de T dans la cohomologie de de Rham de S .

Cet exemple peut sembler artificiel car il ne correspond pas à une lamination minimale. L'exemple des feuilletages linéaires sur les tores est plus convaincant. Nous ne ferons que l'esquisser car il est maintenant bien connu (voir aussi [17] pour d'autres exemples de calculs). Considérons donc le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ dont le groupe fondamental est engendré par deux éléments qui commutent a et b et soit h l'homomorphisme de ce groupe dans le groupe des difféomorphismes du cercle \mathbf{R}/\mathbf{Z} envoyant a et b sur des rotations d'angles α et β respectivement. Le feuilletage obtenu par suspension est un feuilletage \mathcal{L} linéaire sur le tore \mathbf{T}^3 . On peut considérer le cercle \mathbf{R}/\mathbf{Z} comme plongé dans \mathbf{T}^3 de manière transverse au feuilletage. Si x est un point de \mathbf{R}/\mathbf{Z} et si on relève un lacet homotope à a (*resp.* b) dans les feuilles avec le point x comme origine, l'extrémité du chemin a_x (*resp.* b_x) ainsi obtenu est $x + \alpha$ (*resp.* $x + \beta$). Nous supposons que α et β sont deux nombres linéairement indépendants sur \mathbf{Q} de sorte que toutes les feuilles de \mathcal{L} sont denses et sont homéomorphes à des plans.

Évaluons le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathcal{L})$.

Soit ω une 1-forme fermée. L'intégrale de ω sur a_x (*resp.* b_x) définit une fonction continue A (*resp.* B): $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$. La condition de fermeture de ω montre que :

$$A(x) + B(x + \alpha) = B(x) + A(x + \beta). \quad (1)$$

Si ω est la différentielle d'une fonction $f : \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, la restriction F de f à la fibre \mathbf{R}/\mathbf{Z} au dessus du point base de \mathbf{T}^2 est telle que :

$$A(x) = F(x + \alpha) - F(x) \quad B(x) = F(x + \beta) - F(x). \quad (2)$$

Réciproquement, il est facile d'établir que $H^1(\mathcal{L})$ est isomorphe à l'espace des couples de fonctions A, B vérifiant 1 modulo ceux de la forme 2. Il est alors naturel de

développer A, B et F en séries de Fourier :

$$A(x) = \sum_n a_n \exp(2\sqrt{-1}\pi n) \quad B(x) = \sum_n b_n \exp(2\sqrt{-1}\pi n)$$

$$F(x) = \sum_n f_n \exp(2\sqrt{-1}\pi n).$$

La condition 1 s'écrit :

$$a_n(1 - \exp(2\sqrt{-1}\pi\beta n)) = b_n(1 - \exp(2\sqrt{-1}\pi\alpha n)). \quad (3)$$

La relation 2 devient :

$$a_n = (\exp(2\sqrt{-1}\pi n\alpha) - 1)f_n \quad b_n = (\exp(2\sqrt{-1}\pi n\beta) - 1)f_n. \quad (4)$$

Pour qu'un couple A, B corresponde à un cobord, il faut donc que a_0 et b_0 soient nuls. Réciproquement, si a_0 et b_0 sont nuls, la formule 4 permet de calculer les f_n de deux manières qui sont compatibles d'après 3.

$$f_n = a_n(\exp(2\sqrt{-1}\pi n\alpha) - 1)^{-1} = b_n(\exp(2\sqrt{-1}\pi n\beta) - 1)^{-1}.$$

Cependant, la série de Fourier dont les coefficients sont les f_n peut diverger même si celles dont les coefficients sont a_n et b_n convergent. C'est le phénomène bien connu des *petits diviseurs*. Si les nombres α ou β ne satisfont pas de condition diophantienne, $(\exp(2\sqrt{-1}\pi n\alpha) - 1)$ peut être petit pour des valeurs de n pas trop grandes. . . On voit donc que l'espace des couples A, B pour lesquels la série de Fourier de coefficients f_n converge peut être de codimension infinie.

En choisissant convenablement α et β , on obtient donc des exemples pour lesquels $H^1(\mathcal{F})$ est de dimension infinie. On constatera par ailleurs que $H^1(\mathcal{F})$ n'est pas séparé comme espace vectoriel topologique quotient. A priori, on aurait pu également définir la cohomologie $H^1(\mathcal{L})$ en utilisant des formes différentielles moins régulières, par exemple qui ne dépendraient que mesurablement du point dans la direction transverse. Ceci changerait effectivement le groupe $H^1(\mathcal{F})$ mais n'éliminerait pas le fait que la dimension puisse être infinie.

Dans le même ordre d'idée, *l'espace de Teichmüller d'une lamination peut être de dimension infinie*. Pour donner un sens à cette dernière assertion, donnons les définitions suivantes. Un homéomorphisme quasiconforme $f : M \rightarrow M$ est un homéomorphisme qui préserve chaque feuille de \mathcal{L} et y induit un homéomorphisme (uniformément) quasiconforme [2]. L'espace de Teichmüller de la lamination (M, \mathcal{L}) est l'espace $\mathcal{T}(M, \mathcal{F})$ des homéomorphismes quasiconformes f où l'on identifie f_1 et f_2 si $f_1 \circ f_2^{-1}$ est holomorphe dans les feuilles et homotope à l'identité par une homotopie formée d'homéomorphismes quasiconformes préservant chaque feuille.

Considérons une lamination produit $S \times \mathbf{S}^1$ où S est une surface de Riemann différente de la sphère. Évidemment, l'espace de Teichmüller de cette lamination est l'espace des applications continues de \mathbf{S}^1 dans l'espace de Teichmüller de S . Il est donc de dimension infinie mais il ne s'agit pas d'une lamination minimale.

Un exemple beaucoup plus intéressant d'une telle situation est donné par la construction de Sullivan, décrite en 2.2. Nous avons vu en effet qu'à toute application

dilatante du cercle g correspond une lamination \mathcal{L}_g . Il n'est pas difficile de s'assurer que toutes ces laminations associées à des applications g de même degré topologique sont quasi-conformément équivalentes entre elles et nous avons signalé qu'elles ne sont holomorphiquement équivalentes que si les applications g correspondantes sont différentiablement conjuguées. Or l'espace des classes de conjugaisons d'applications dilatantes du cercle, de degré donné, est de dimension infinie. En effet, une application dilatante du cercle a un nombre infini de points périodiques et si l'on fixe un nombre fini d'entre eux, on peut prescrire arbitrairement les dérivées (> 1) en ces points.

4.2 Le théorème de l'indice

Nous allons énoncer le théorème de l'indice feuilleté de A. Connes en nous limitant d'une part aux laminations par surfaces de Riemann et, d'autre part, au cas où il existe un cycle feuilleté. Pour la théorie générale, on consultera [13, 14].

Fixons une lamination (M, \mathcal{L}) munie d'un cycle feuilleté μ que nous penserons aussi comme une mesure transverse invariante. Choisissons une métrique hermitienne le long des feuilles. Fixons un entier $l = 0, 1$ ou 2 .

Pour chaque point x de M , la feuille $L(x)$ passant par x est en général une variété riemannienne non compacte de sorte que l'espace des formes harmoniques de degré l sur $L(x)$ est en général de dimension infinie. Notons $\mathcal{H}^l(L(x))$ l'espace de Hilbert des l -formes harmoniques de carré intégrable sur $L(x)$. On obtient ainsi un fibré mesurable en espaces de Hilbert au dessus de M . Bien entendu, les fibres au dessus de deux points situées dans la même feuille sont canoniquement identifiées, de sorte qu'il est préférable de penser à ce fibré comme au dessus de l'"espace des feuilles" même si celui-ci est en général non séparé.

En fait, pour des raisons techniques, il est nécessaire de considérer, pour chaque point x , le revêtement d'holonomie $\overline{L}(x)$ de la feuille $L(x)$ et nous noterons plutôt $\mathcal{H}^l(\overline{L}(x))$ l'espace des l -formes de carré intégrable sur $\overline{L}(x)$ (voir par exemple [24]). Dans la plupart des cas, il se trouve que presque toutes les feuilles ont une holonomie triviale, et donc que $L(x) = \overline{L}(x)$ pour presque tout x , de sorte que les deux définitions sont les mêmes presque partout.

Voici une autre façon de construire un tel "fibré au dessus de l'espace des feuilles". Soit $B \subset M$ un borélien *transverse* à \mathcal{L} , c'est-à-dire qui rencontre chaque feuille sur un ensemble fini ou dénombrable. Ceci permet de définir sans ambiguïté la mesure transverse $\mu(B)$. Pour chaque point x de M , on peut considérer l'espace de Hilbert $l^2(B \cap L(x))$ des fonctions de carré intégrable sur cet ensemble dénombrable. C'est aussi un fibré en espaces de Hilbert, "constant" sur les feuilles. On appelle *dimension de Murray-Von Neumann* de ce fibré en espaces de Hilbert le nombre $\mu(B)$. Cette définition est justifiée par le lemme suivant (voir [13, 14]).

Lemme 4.1 *Soient B_1 et B_2 deux boréliens transverses à \mathcal{L} . On suppose qu'il existe une application mesurable associant à μ -presque tout point x de M une isométrie Φ_x entre $l^2(B_1 \cap L(x))$ et $l^2(B_2 \cap L(x))$ et qui est constante sur les feuilles. Alors, les mesures $\mu(B_1)$ et $\mu(B_2)$ sont égales.*

Revenant à notre fibré en espaces de Hilbert $\mathcal{H}^l(L(x))$, A. Connes établit qu'il est isomorphe à un fibré de la forme $l^2(B \cap L(x))$ pour un certain borélien transverse de sorte qu'on peut définir sa dimension de Murray-Von Neumann. Le nombre (réel positif ou nul) ainsi obtenu s'appelle le l -ème nombre de Betti de la lamination relativement au cycle feuilleté μ et se note $\beta_l(\mathcal{L}, \mu)$. Il est facile de s'assurer que ce nombre ne dépend pas du choix de la métrique le long des feuilles.

Soit k la courbure de la métrique ; suivant le point de vue, on peut envisager k comme une 2-forme sur \mathcal{L} ou comme une fonction sur M . Nous pouvons maintenant énoncer la version feuilletée du théorème de Gauss-Bonnet qui évalue l'intégrale de k sur le cycle feuilleté μ , notée $\int_M k d\mu$.

Théorème 4.2 ([13, 14]) $\int_M k d\mu = \beta_0(\mathcal{L}, \mu) - \beta_1(\mathcal{L}, \mu) + \beta_2(\mathcal{L}, \mu)$.

Ce nombre, obtenu soit à partir d'une métrique le long des feuilles, soit à partir des nombres de Betti feuilletés, est bien sûr appelé *caractéristique d'Euler-Poincaré feuilletée* et noté $\chi(\mathcal{L}, \mu)$. Voir [38, 44] pour une interprétation concrète de ce nombre comme moyenne de caractéristiques d'Euler-Poincaré de grands domaines contenus dans les feuilles.

Les nombres $\beta_0(\mathcal{L}, \mu)$ et $\beta_2(\mathcal{L}, \mu)$ sont bien entendu égaux et faciles à évaluer : il ne peut exister de fonction non nulle harmonique et de carré intégrable sur $\overline{L}(x)$ que si cette variété est compacte. Quant à $\beta_1(\mathcal{L}, \mu)$, bien que plus difficile à évaluer, il est positif ou nul... On en déduit :

Corollaire 4.3 ([13, 14]) *Si la réunion des feuilles compactes de (M, \mathcal{L}) est de mesure nulle pour μ , l'intégrale $\int_M k d\mu$ est négative ou nulle.*

Le lecteur aura compris que le théorème 4.2 est valable dans une situation beaucoup plus générale qui recouvre tous les opérateurs elliptiques définis le long des feuilles. Nous ne citerons ici que le théorème de Riemann-Roch feuilleté.

On considère un fibré en droites holomorphe E au dessus de la lamination (M, \mathcal{L}) . Il s'agit simplement d'un fibré en droites qui se trivialisent au dessus des ouverts distingués $U_i \simeq \mathbf{D} \times T_i$ de telle sorte que les changements de cartes soient de la forme :

$$(z, t, \zeta) \in \mathbf{D} \times T_i \times \mathbf{C} \mapsto (f_{ij}(z, t), \gamma_{ij}(t), g_{ij}(z, t)\zeta) \in \mathbf{D} \times T_j \times \mathbf{C}$$

où $g_{ij}(z, t) \in \mathbf{C}^*$ dépend continûment de (z, t) et holomorphiquement de z .

De même que pour le cas classique, le choix d'une métrique hermitienne $\| \cdot \|$ sur les fibres de E permet de définir une 2-forme "de courbure" qui en coordonnées locales s'écrit :

$$\gamma_i = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \partial\bar{\partial}(\log \|(z, t, 1)\|^2).$$

Le fait que $g_{ij}(z, t)$ soit holomorphe en z montre que ces 2-formes sont compatibles sur les intersections des U_i . Elles définissent donc une 2-forme γ sur \mathcal{L} .

Lorsque l'on change la métrique hermitienne, le rapport entre les deux métriques est une fonction strictement positive sur M du type $\exp u$ et la forme γ devient $\gamma + 1/2\sqrt{-1}\pi\partial\bar{\partial}u$. En particulier, γ est bien définie modulo les formes exactes. La classe de $H^2(\mathcal{L})$ ainsi définie s'appelle bien sûr la *classe de Chern* de E et se note $c(E)$.

Il est important cependant de remarquer qu'il est préférable de considérer γ comme bien défini modulo les formes du type $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ ce qui est bien plus précis que le seul fait d'être défini modulo les formes exactes. Cette observation, due à A. Candel, montre en particulier que *l'on peut définir sans ambiguïté l'accouplement $\langle c(E), \mu \rangle$ de la classe de Chern avec un courant harmonique même si celui-ci n'est pas un cycle feuilleté.*

Pour $l = 0, 1$, et x un point de M , on note $\mathcal{H}^l(L(x), E)$ l'espace de Hilbert des l -formes holomorphes de $L(x)$ (ou plus précisément de son revêtement d'holonomie $\bar{L}(x)$) à valeurs dans E qui sont de carré intégrable. De la même façon que précédemment, ce fibré en espaces de Hilbert possède une dimension de Murray-Von Neumann, notée $h^l(E, \mu)$.

La version du théorème de Riemann-Roch démontrée par A. Connes devient :

Théorème 4.4 ([14]) $h^0(E, \mu) - h^1(E, \mu) = \langle c(E), \mu \rangle + \frac{1}{2}\chi(\mathcal{L}, \mu)$.

On trouvera dans [31] une description détaillée de ce théorème ainsi que des exemples intéressants.

Le lemme suivant ne sera utilisé que dans le paragraphe 7 mais sa preuve peut servir d'illustration aux idées que nous venons d'introduire.

Lemme 4.5 *Soit E un fibré en droites holomorphe au dessus d'une lamination (M, \mathcal{L}) et $c(E)$ sa classe de Chern. On suppose qu'il existe un cycle feuilleté μ et que E possède une section holomorphe s qui n'est identiquement nulle sur aucune feuille de \mathcal{L} . Alors $\langle c(E), \mu \rangle \geq 0$. Si l'ensemble des feuilles qui rencontrent le lieu des zéros de s n'est pas négligeable pour μ , alors $\langle c(E), \mu \rangle > 0$.*

Démonstration Soit $\| \cdot \|$ une métrique hermitienne sur E et γ sa forme de courbure. On remarquera que la fonction $\log(\|s\|) : M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est localement intégrable sur chaque feuille.

Nous devons évaluer $\langle c(E), \mu \rangle = \langle \gamma, \mu \rangle$. Pour cela, nous choisissons un recouvrement U_i par des ouverts trivialisant à la fois le fibré et la lamination. Soit s_i une section holomorphe sans zéro au dessus de U_i et f_i la fonction holomorphe sur U_i telle que $s = f_i \cdot s_i$. Choisissons une partition de l'unité ϕ_i relative à ce recouvrement.

On a $\langle \gamma, \mu \rangle = \sum_i \langle \phi_i \gamma, \mu \rangle$ et chaque terme de cette somme peut être calculé dans un ouvert $U_i \simeq \mathbf{D} \times T_i$ pour lequel nous avons une description locale du cycle feuilleté. Il s'agit d'intégrer la 2-forme $\phi_i \gamma$ sur chaque plaque $P_t = \mathbf{D} \times \{t\}$ puis d'intégrer cette fonction de t contre une certaine mesure ν_i de T_i .

Sur chaque plaque P_t de U_i , on a $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \partial\bar{\partial}(\log \|s_i\|^2)$. Puisque $s = f_i \cdot s_i$, sur chaque plaque, on a :

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \partial\bar{\partial}(\log \|s\|^2) + [D_{P_t}]$$

au sens des distributions, où $[D_{P_t}]$ désigne la somme des masses de Dirac aux points de P_t où la section s s'annule, affectées des multiplicités d'annulation (qui sont des entiers positifs). Dans notre cas de dimension 1, cette formule, dite de Poincaré-Lelong, n'est bien sûr qu'une version de la formule de Cauchy-Green-Stokes... (voir par exemple [15]). En particulier, en appliquant cette formule à la fonction test ϕ_i restreinte à la plaque P_t , on obtient :

$$\int_{P_t} \phi_i \gamma = \int_{P_t} \log \|s\| \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}\pi} \partial\bar{\partial}\phi_i + \sum m_\alpha \phi_i(z_\alpha) \geq \int_{P_t} \log \|s\| \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}\pi} \partial\bar{\partial}\phi_i$$

où les z_α sont les zéros de s sur la plaque P_t et m_α leurs multiplicités. En intégrant contre la mesure transverse ν_i de T_i , on a :

$$\langle \phi_i \gamma, \mu \rangle \geq \langle \log \|s\| \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}\pi} \partial\bar{\partial}\phi_i, \mu \rangle.$$

Le second terme a un sens car $\log \|s\|$ est intégrable. Puisque $\sum_i \phi_i = 1$, on obtient, en sommant sur i :

$$\langle c(E), \mu \rangle = \langle \gamma, \mu \rangle \geq 0.$$

C'est la première partie du lemme. On constate par ailleurs que l'inégalité est stricte sauf si pour chaque U_i , ν_i -presque toute plaque ne rencontre pas le lieu des zéros de s . Autrement dit, si l'ensemble des feuilles qui rencontrent le lieu des zéros de s n'est pas μ -négligeable, on a bien $\langle c(E), \mu \rangle > 0$. \square

5 Uniformisation des laminations

5.1 Le type conforme des feuilles

L'un des résultats principaux de la théorie des surfaces de Riemann est le théorème d'uniformisation selon lequel le revêtement universel de toute surface de Riemann (connexe) est isomorphe à \mathbf{CP}^1 (type *elliptique*), \mathbf{C} (type *parabolique*) ou \mathbf{D} (type *hyperbolique*). Autrement dit, toute surface de Riemann s'obtient à partir de l'un de ces trois exemples en passant au quotient par un groupe discret Γ opérant holomorphiquement, librement et proprement. Nous dirons qu'une surface de Riemann est elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant le type de son revêtement universel. Cette terminologie ne coïncide pas avec celle utilisée en théorie du potentiel. Il faut aussi prendre garde au fait qu'une courbe elliptique, *i.e.* un tore complexe, est de type parabolique puisque son revêtement universel est \mathbf{C} !

Dans le cas hyperbolique, les automorphismes de \mathbf{D} sont aussi les isométries directes du disque de Poincaré. Les surfaces de Riemann de ce type s'obtiennent donc en quotientant \mathbf{D} par un sous-groupe discret et sans torsion du groupe des

isométries de ce disque, isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Les surfaces de Riemann de type hyperbolique sont donc équipées naturellement d'une métrique hermitienne complète à courbure constante -1 . Cette métrique est *unique* car la métrique de Poincaré est l'unique métrique hermitienne complète à courbure -1 sur le disque.

Dans le cas parabolique, les automorphismes de \mathbf{C} sont les transformations affines complexes et seules les translations opèrent sans point fixe. Les surfaces de Riemann de type parabolique sont donc, à isomorphismes près, le plan \mathbf{C} , le quotient $\mathbf{C}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^*$, et les courbes elliptiques, quotients de \mathbf{C} par un réseau. On notera que dans ce cas, la métrique hermitienne complète plate de \mathbf{C} est invariante de sorte que ces surfaces de Riemann paraboliques sont aussi des surfaces plates. Cette métrique hermitienne plate est unique à un facteur multiplicatif constant près car la métrique hermitienne canonique sur \mathbf{C} est l'unique métrique plate et complète sur \mathbf{C} , à un facteur multiplicatif constant près.

Dans le cas elliptique, tout isomorphisme de \mathbf{CP}^1 est une homographie et possède donc un point fixe. Par conséquent \mathbf{CP}^1 est la seule surface de Riemann de type elliptique. Bien sûr, \mathbf{CP}^1 possède une métrique hermitienne à courbure constante $+1$.

Si on considère une lamination par surfaces de Riemann (M, \mathcal{L}) , on peut appliquer ce théorème d'uniformisation à chaque feuille. La question dont nous allons discuter dans ce paragraphe consiste à savoir si les uniformisations des feuilles dépendent continûment des feuilles. Une première question plus naïve est celle d'étudier la partition de M par le type des feuilles. Le cas elliptique est "facile" : il s'agit d'un cas du théorème de stabilité de Reeb (voir par exemple [24]).

Théorème 5.1 *La réunion des feuilles elliptiques de la lamination \mathcal{L} est ouverte. Dans cet ouvert U , les feuilles de \mathcal{L} sont les fibres d'une fibration localement triviale.*

Démonstration Le théorème de stabilité de Reeb affirme que dans un feuilletage quelconque, la réunion des feuilles compactes simplement connexes est un ouvert et que chacune de ces feuilles possède un voisinage feuilleté trivialement. Ce théorème s'applique au cas général des laminations que nous considérons, c'est-à-dire sur des espaces qui ne sont pas nécessairement des variétés, bien qu'à vrai dire, nous ne connaissions pas de référence pour cet énoncé général... (Voir cependant [10].) \square

Par conséquent, en ôtant à une lamination les feuilles de type elliptique, on obtient un nouvel espace compact, et donc une nouvelle lamination sans feuille elliptique. Dans toute la suite, *nous supposons donc que la lamination que nous étudions n'a pas de feuille elliptique.*

Le cas des feuilles paraboliques est plus difficile. Citons cependant la proposition suivante qui sera démontrée plus loin.

Proposition 5.2 *La réunion des feuilles paraboliques est un G_δ au sens de Baire, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts.*

Il existe des laminations qui possèdent à la fois des feuilles paraboliques et hyperboliques. Partant par exemple d'un feuilletage sur une variété de dimension 3,

on le modifie par “tourbillonnement de Reeb” (voir par exemple [24]). Ceci a pour résultat d’introduire un tore solide feuilleté par plans de type parabolique et bordé par un tore, de type parabolique lui aussi. Les feuilles extérieures au tore solide ont en général une topologie différente de celle du plan, du cylindre ou du tore et sont donc de type hyperbolique. Comme on le voit, ces exemples ne sont pas satisfaisants car les types ne sont pas véritablement mélangés. L. Mosher et U. Oertel ont construit un exemple de lamination telle que la réunion des feuilles paraboliques n’est pas fermée [36]. Dans cet exemple, il existe un unique ensemble minimal constitué de feuilles hyperboliques. Nous décrirons au paragraphe 6.4 un exemple où les feuilles sont *toutes* denses et où il y a mélange de types conformes.

Nous avons déjà observé que la donnée d’une métrique riemannienne le long des feuilles d’un feuilletage de dimension 2 définit une structure de lamination par surfaces de Riemann. Il convient de remarquer que le type conforme des surfaces de Riemann ainsi obtenues ne dépend pas de la métrique riemannienne car le disque, le plan et la sphère ne sont pas quasiconformément isomorphes entre eux.

5.2 Uniformisation des laminations hyperboliques

Nous allons décrire ici le résultat de A. Candel qui traite complètement du cas hyperbolique. Rappelons qu’une métrique hermitienne sur une lamination est la donnée de métriques hermitiennes lisses dans les feuilles qui dépendent continûment (ainsi que leurs dérivées) du point de M .

Théorème 5.3 ([10]) *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination par surfaces de Riemann. Il existe une métrique hermitienne sur (M, \mathcal{L}) dont la courbure est constante égale à -1 si et seulement si, pour tout cycle feuilleté μ , la caractéristique d’Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{L}, \mu)$ est strictement négative.*

La condition nécessaire, c’est-à-dire la négativité de $\chi(\mathcal{L}, \mu)$, résulte évidemment du théorème de Gauss-Bonnet feuilleté 4.2.

Notons que ce théorème rend compte du cas (très général) où il n’existe pas de cycle feuilleté...

Avant de donner quelques indications sur la preuve du théorème 5.3, nous commençons par quelques propriétés générales. Fixons une métrique hermitienne g sur (M, \mathcal{L}) et notons $k : M \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction courbure des feuilles. Soit $u : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse le long des feuilles et notons g' la métrique hermitienne $\exp(2u)g$. La formule donnant la courbure k' de g' est bien connue :

$$k' = \exp(-2u)(k - \Delta u) \tag{5}$$

où Δ désigne le laplacien le long des feuilles.

Nous savons que sur toute feuille de type hyperbolique $L(x)$, il existe une unique fonction lisse $u : L(x) \rightarrow \mathbf{R}$ telle que la métrique $\exp(2u)g$ sur la feuille $L(x)$ est complète à courbure -1 . Si la feuille $L(x)$ est de type parabolique, on pose $u = -\infty$

sur cette feuille. Ceci définit une fonction globale $u : M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ qui vérifie, là où elle est finie :

$$k = \Delta u - \exp(2u).$$

Proposition 5.4 ([20, 45]) *Pour toute lamination (sans feuille de type elliptique), la fonction u est semi-continue supérieurement et son gradient le long des feuilles est borné.*

Esquisse de démonstration Soit $x \in M$ tel que la feuille $L(x)$ soit de type hyperbolique et $f : \mathbf{D} \rightarrow L(x)$ un revêtement holomorphe tel que $f(0) = x$. Par définition de la fonction u , la norme de la dérivée de f en 0 est $\exp(-u(x))$. Soit $0 < r < 1$ et considérons la restriction de f au disque D_r de centre 0 et de rayon r . Puisque D_r est simplement connexe et relativement compact dans \mathbf{D} , il existe un espace pointé $(Q, *)$ et une application $F : D_r \times Q \rightarrow M$ telle que :

- $F(z, *) = f(z)$
- F est un homéomorphisme local sur un voisinage de x
- La restriction de F à $D_r \times \{q\}$ est une application holomorphe dans une feuille.

En utilisant le lemme de Schwarz dans les feuilles, on voit donc la norme de la dérivée en z de $F(z, q)$ est inférieure ou égale à $\exp(-u(F(z, q)))$ lorsque l'on calcule la norme avec la métrique de Poincaré à la source et la métrique g au but. On a donc trouvé des fonctions continues, localement définies, qui majorent la fonction u . En faisant tendre r vers 1, il n'est pas difficile de s'assurer que u est la borne inférieure de ces fonctions continues et ceci établit la semi-continuité. La démonstration du fait que le gradient de u est borné est élémentaire et se réduit au lemme de distorsion de Koebe : si $j : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ est une application holomorphe injective avec $j(0) = 0$ et $j'(0) = 1$, alors $|j''(0)| \leq 2$. Pour plus de détails, on consultera [20]. \square

On remarquera en particulier que cette proposition montre que l'ensemble des points où $u = -\infty$ est un G_δ au sens de Baire : c'est la proposition 5.2. C'est cette proposition qui nous a aussi permis d'étendre dans [20] le corollaire 4.3 :

Corollaire 5.5 ([20]) *Soit μ une mesure harmonique quelconque. Alors l'intégrale $\int k d\mu$ est négative ou nulle.*

Esquisse de démonstration On a :

$$\int k d\mu = \int \Delta u d\mu - \int \exp(2u) d\mu.$$

Par définition d'une mesure harmonique, la première intégrale du membre de droite s'annulerait si u était continue. Il se trouve que la semi-continuité et la borne sur le gradient suffisent à assurer l'annulation (voir [20]). Le signe de l'intégrale de courbure en résulte. \square

On consultera [18, 42] pour d'autres démonstrations du corollaire 5.5 et pour des développements intéressants.

Revenons au théorème de A. Candel. La démonstration se décompose en deux parties. La première, dans le même esprit que le corollaire 3.6, permet d'affirmer que si $\chi(\mathcal{L}, \mu) < 0$ pour tout cycle feuilleté μ , toutes les feuilles sont de type hyperbolique :

Proposition 5.6 *Si une lamination (M, \mathcal{L}) possède une feuille L de type parabolique, il existe un cycle feuilleté μ (dont le support est contenu dans l'adhérence de L) tel que $\chi(\mathcal{L}, \mu) = 0$.*

Esquisse de démonstration On suppose par exemple qu'il existe un difféomorphisme holomorphe $f : \mathbf{C} \rightarrow L$ car le cas du cylindre est analogue (et celui du tore est trivial). Notons $|df|$ la norme de la différentielle de f , calculée avec la métrique euclidienne dans \mathbf{C} et avec la métrique g dans L . Soit D_r le disque de rayon $r > 0$ dans \mathbf{C} et $L_r = f(D_r)$. L'aire de L_r pour la métrique g est l'intégrale sur D_r de $|df|^2$ et la longueur du bord ∂L_r est l'intégrale de $|df|$ sur le cercle de rayon r . Un lemme classique, dû à Ahlfors, (qui revient à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz) permet de conclure que :

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(\partial L_r)}{\text{aire}(L_r)} = 0.$$

Ceci signifie que les L_r constituent une *suite moyennisante*, c'est-à-dire que si l'on considère le courant d'intégration c_r sur les disques L_r , il existe une sous-suite c_{r_n} avec r_n tendant vers l'infini, qui converge vers un cycle feuilleté μ (car le bord de L_r "disparaît" quand r tend vers l'infini : voir [26]). Il reste à montrer que $\chi(\mathcal{L}, \mu) = 0$. Ceci se fait en intégrant la courbure sur L_r , en utilisant le théorème de Gauss-Bonnet classique, et en montrant que l'effet de bord disparaît quand r tend vers l'infini. \square

La deuxième partie de la démonstration du théorème 5.3 est la suivante :

Proposition 5.7 *Si toutes les feuilles d'une lamination sont de type hyperbolique, il existe une métrique hermitienne à courbure -1 .*

Esquisse de démonstration Il s'agit de montrer que si la fonction u ne prend pas la valeur $-\infty$, elle est continue. D'après la proposition 5.4, il suffit de montrer que u est semi-continue inférieurement. Soit \mathcal{K} l'espace des applications holomorphes du disque \mathbf{D} dans (une feuille de) (M, \mathcal{L}) , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On montre d'abord que \mathcal{K} est compact. Pour cela, on considère une suite d'applications holomorphes $f_n : \mathbf{D} \rightarrow M$ sans sous-suite convergente. En dilatant leurs domaines de définition par des homothéties convenables et en passant à des sous-suites, on construit une application holomorphe non constante de \mathbf{C} vers une feuille de \mathcal{L} (lemme de Brody). Ceci contredit le fait que toutes les feuilles sont de type hyperbolique. Finalement, pour démontrer la semi-continuité inférieure de u , il suffit de l'exprimer comme :

$$\exp(u(x)) = \inf_{f \in \mathcal{K}} \{ |df(0)|^{-1} \in \mathbf{R}_*^+ \mid f(0) = x \}$$

car la fonction $f \in \mathcal{K} \mapsto |df(0)| \in \mathbf{R}_*^+$ est continue sur le compact \mathcal{K} . \square

6 Uniformisation des laminations paraboliques

L'uniformisation des laminations dont toutes les feuilles sont hyperboliques étant acquise, nous étudions maintenant les laminations dont *toutes* les feuilles sont paraboliques. La question qui se pose alors est de savoir s'il existe une métrique hermitienne plate le long des feuilles.

6.1 Uniformisation approchée et un contre-exemple

Théorème 6.1 ([23]) *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination dont toutes les feuilles sont paraboliques. Alors, il existe une suite de métriques hermitiennes lisses g_n sur (M, \mathcal{L}) telle que la forme de courbure de g_n tende uniformément vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Insistons sur le fait qu'il n'y aurait aucun intérêt à faire tendre la *fonction* courbure vers 0. En multipliant une métrique g par une constante tendant vers l'infini, la courbure tend évidemment vers 0... Cependant, l'élément d'aire da est multiplié par le carré de cette constante de sorte que la forme de courbure $k da$ est préservée ! C'est pour cette raison que le théorème 6.1 considère la forme de courbure.

Démonstration Nous fixons donc une lamination (M, \mathcal{L}) dont toutes les feuilles sont paraboliques ainsi qu'une métrique hermitienne g . Soit $k : M \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction courbure. Une autre manière d'exprimer la formule 5 qui donne le changement de courbure par changement conforme d'une métrique est la suivante. Si $k da$ désigne la forme de courbure de g la forme de courbure $k' da'$ de $g' = \exp(2u)g$ est :

$$k' da' = k da - 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u.$$

Pour établir le théorème, il s'agit de trouver une suite de fonctions lisses u_n telle que $2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_n$ tende uniformément vers $k da$.

Soit \mathcal{E} l'espace de Banach des 2-formes sur \mathcal{L} continues sur M et \mathcal{H} le sous-espace des formes du type $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ avec u lisse. Par définition les mesures harmoniques sont les éléments du dual topologique de \mathcal{E} qui s'annulent sur \mathcal{H} et qui prennent des valeurs positives sur les éléments positifs. Une forme linéaire continue sur \mathcal{E} qui s'annule sur \mathcal{H} est donc la différence de deux mesures harmoniques. Le théorème de Hahn-Banach permet donc de conclure qu'un élément est dans l'adhérence de \mathcal{H} si et seulement si il s'annule sur toutes les mesures harmoniques.

Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\int k d\mu$ est nul pour toute mesure harmonique. D'après le lemme 3.6, toutes les mesures harmoniques proviennent d'une mesure transverse invariante et le théorème 4.2 permet donc de conclure. \square

Il est facile de construire des laminations dont toutes les feuilles sont paraboliques et pour lesquelles il n'existe pas de métrique riemannienne lisse qui soit plate dans les feuilles. L'exemple le plus simple est le feuilletage de Reeb habituel sur la sphère \mathbf{S}^3 . S'il existait une métrique sur la sphère telle que toutes les feuilles soient plates, les feuilles non compactes seraient isométriques à un plan euclidien. La croissance

des aires des disques dans les feuilles non compactes serait donc quadratique ce qui contredit le fait que cette croissance est évidemment linéaire. Cet exemple n'est cependant pas satisfaisant pour deux raisons. La première est que les feuilles ne sont pas denses et il est plus raisonnable de s'intéresser aux laminations minimales. D'autre part, on remarque dans l'exemple du feuilletage de Reeb qu'il existe une métrique riemannienne *mesurable*, lisse dans les feuilles et plate. Cette métrique est en fait continue dans le complémentaire de la feuille compacte et tend vers l'infini lorsqu'on tend vers cette feuille compacte. Nous nous limiterons par la suite aux laminations minimales et nous chercherons des métriques mesurables.

Théorème 6.2 ([23]) *Il existe une lamination (M, \mathcal{L}) telle que :*

- *toutes les feuilles de \mathcal{L} sont paraboliques,*
- *toutes les feuilles de \mathcal{L} sont denses,*
- *il n'existe aucune métrique hermitienne mesurable sur M , différentiable dans les feuilles, qui soit complète et plate dans les feuilles.*

Nous allons nous contenter ici de construire ce contre-exemple et de renvoyer le lecteur à [23] pour la preuve que cet exemple possède bien les propriétés requises.

On considère tout d'abord les trois sous-groupes à 1 paramètre complexe de $SL(2, \mathbf{C})$ définis de la manière suivante :

$$d^t = \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \quad h_+^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h_-^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces groupes à 1-paramètre vérifient :

$$d^t h_{\pm}^s d^{-t} = h_{\pm}^{\exp(\pm 2t)s}.$$

Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage de $SL(2, \mathbf{C})$ dont les feuilles sont les classes à gauche de $\{h_+^s\}$. Ses feuilles sont paramétrées par \mathbf{C} et sont donc équipées d'une métrique plate naturelle. La relation ci-dessus montre que la translation à gauche par d^t préserve globalement les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ et opère comme une similitude sur celles-ci.

Soit Γ un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbf{C})$ tel que le quotient $M = SL(2, \mathbf{C})/\Gamma$ soit compact. Il existe bien sûr de nombreux exemples de tels groupes, associés aux variétés hyperboliques réelles de dimension 3. Puisque les translations à droite commutent avec les translations à gauche, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ passe au quotient en un feuilletage \mathcal{F} sur M . Les feuilles de \mathcal{F} sont les orbites de l'action naturelle holomorphe d'un groupe à 1 paramètre complexe que nous notons encore h_+^s de sorte que toutes les feuilles sont équipées d'une métrique plate. Le feuilletage \mathcal{F} n'est donc *pas* le contre-exemple cherché !

Nous modifions cet exemple de la manière suivante. On sait qu'il existe des variétés hyperboliques réelles de dimension 3 dont le premier nombre de Betti est non nul. Il existe donc des exemples de groupes Γ possédant un homomorphisme

non trivial $c : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}$. Soit ϵ un réel positif. On considère l'action à droite de Γ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ définie par :

$$(x, \gamma) \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \times \Gamma \mapsto d^{\epsilon \cdot c(\gamma)} x \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}).$$

Il se trouve que si ϵ est assez petit, cette action est libre, propre et co-compacte [21]. On note $M_{\epsilon, c}$ la variété compacte quotient. On remarque que cette nouvelle action préserve encore globalement le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ et définit donc un feuilletage holomorphe \mathcal{L} sur la variété $M_{\epsilon, c}$. Cependant la métrique plate des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ n'est plus préservée et les feuilles de \mathcal{L} ne sont pas a priori munies d'une métrique plate. Par contre, l'action est conforme dans les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ de sorte que les feuilles de \mathcal{L} sont naturellement munies d'une structure conforme, qui dépend analytiquement du point dans $M_{\epsilon, c}$. En d'autres termes, il existe une métrique riemannienne analytique réelle g définie sur le fibré tangent aux feuilles sur $M_{\epsilon, c}$ qui, lorsqu'on la relève à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, et qu'on la restreint à une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$, est conforme à la métrique plate naturelle de cette feuille.

On montre que c'est effectivement un feuilletage non uniformisable dans le sens où *il n'existe aucune fonction mesurable $u : M_{\epsilon, c} \rightarrow \mathbf{R}$, différentiable le long des feuilles, telle que la métrique $g' = \exp(2u)g$ soit complète et plate dans les feuilles.* La preuve n'est pas très difficile même si elle utilise des résultats délicats concernant la théorie ergodique du flot horicyclique des variétés compactes à courbure négative, et plus précisément de leurs revêtements cycliques [23].

6.2 Continuité de la structure affine

Nous avons vu qu'il n'est en général pas possible de construire une métrique plate le long des feuilles d'une lamination à feuilles paraboliques. Nous allons indiquer cependant qu'il existe une *structure affine plate* le long des feuilles qui est continue. Expliquons cela.

Soit S une surface de Riemann parabolique. L'application conforme ρ entre le revêtement universel de S et \mathbf{C} est unique à application affine près de sorte que S est naturellement munie d'une structure affine complexe. Par exemple, si x, y, z sont trois points distincts proches de S , on peut choisir trois relevés proches $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ dans le revêtement universel et le rapport $(\rho(\tilde{x}) - \rho(\tilde{y})) / (\rho(\tilde{x}) - \rho(\tilde{z})) \in \mathbf{C}$ est indépendant du choix des relevés et du choix de ρ ; nous noterons ce rapport $(x - y) / (x - z)$.

Théorème 6.3 ([23]) *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination dont toutes les feuilles sont de type parabolique. Alors, la structure affine des feuilles est continue dans le sens suivant. Soit (x_i, y_i, z_i) ($i \geq 0$) une suite de triplets de points distincts contenus dans un même ouvert distingué et telle que, pour chaque i , les points x_i, y_i, z_i sont dans la même plaque. On suppose que x_i, y_i, z_i convergent respectivement vers des points distincts $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$ de ce même ouvert distingué. Alors $(x_i - y_i) / (x_i - z_i)$ converge vers $(x_\infty - y_\infty) / (x_\infty - z_\infty)$ lorsque i tend vers l'infini.*

Nous renvoyons le lecteur à [23] pour la démonstration et nous allons nous limiter ici à indiquer les outils utilisés. Nous fixons une lamination (M, \mathcal{L}) dont toutes les feuilles sont paraboliques, munie d'une métrique lisse g .

Soit $*$ un point base dans M . Nous notons L_* la feuille qui passe par $*$. Puisque le revêtement universel de L_* est conformément équivalent à la droite complexe, on dispose d'un revêtement conforme $\psi : \mathbf{C} \rightarrow L_*$ tel que $\psi(0) = *$. Soit D_n le disque de centre 0 dans \mathbf{C} et de rayon n (entier positif). Puisque D_n est simplement connexe, le disque immergé $\psi(D_n)$ peut se relever dans les feuilles voisines. Cela signifie qu'il existe des homéomorphismes locaux :

$$\Psi_n : D_n \times Q_n \longrightarrow M$$

où les Q_n forment une famille décroissante de voisinages ouverts d'un point base q_∞ dans un espace Q , tels que :

- la restriction de Ψ_n à $D_n \times \{q_\infty\}$ coïncide avec la restriction de ψ à D_n .
- l'image de Ψ_n est un voisinage ouvert de $*$.
- Ψ_n immerge chaque $D_n \times \{q\}$ dans une feuille de \mathcal{L} .

Soit ϵ_n une suite de réels positifs tendant vers 0 en décroissant. Quitte à restreindre Q_n , on peut toujours supposer que :

- la restriction de Ψ_n à chaque $D_n \times \{q\}$ est une immersion $(1 + \epsilon_n)$ -quasiconforme dans une feuille de \mathcal{L} (voir [2]).

La démonstration du théorème utilise alors deux faits.

Le premier résulte facilement des théorèmes généraux concernant les applications quasiconformes [2]. Soient D^a, D^b, D^c trois (petits) disques fermés disjoints, contenus dans un disque fermé $D \subset \mathbf{C}$ de centre 0. Pour tout réel η strictement positif, il existe ϵ strictement positif tel que si $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ est un homéomorphisme $(1 + \epsilon)$ -quasiconforme qui fixe l'origine, et si a, b, c sont des points de D^a, D^b, D^c respectivement, alors :

$$\left| \frac{a - b}{a - c} - \frac{f(a) - f(b)}{f(a) - f(c)} \right| < \eta.$$

Le second est le théorème de distorsion de Koebe (voir [41]). Rappelons que ce théorème entraîne en particulier que si h est une fonction holomorphe univalente $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ et si $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sont trois points de \mathbf{D} de modules plus petits que $r < 1$, alors :

$$\left| \frac{h(\zeta_1) - h(\zeta_2)}{h(\zeta_1) - h(\zeta_3)} - \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_3} \right| < A(r) \tag{6}$$

où $A(r)$ est une fonction universelle qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

D'après le premier fait, les identifications entre plaques proches sont presque affines, par rapport aux structures affines données par leur plongement dans D_n pour n grand. D'après le second fait, les plongements de D_n dans les revêtements universels des feuilles donnés par les Ψ_n sont presque affines en restriction à un D_i fixé, pour n tendant vers l'infini. Ceci permet de montrer assez facilement que la structure affine des feuilles est effectivement continue.

6.3 Un problème concernant les feuilletages linéaires des tores

L'exemple le plus simple de feuilletage parabolique est bien sûr un feuilletage \mathcal{F} linéaire de codimension 1 sur le tore $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ de dimension 3.

Soit g une métrique riemannienne lisse le long des feuilles de \mathcal{F} . Comme nous l'avons vu, ceci permet de définir une structure de lamination par surfaces de Riemann sur \mathcal{F} .

Nous ignorons s'il est toujours possible de trouver une fonction continue (ou même mesurable) $u : \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\exp(u)g$ soit complète et plate le long des feuilles.

Le seul (petit) résultat que nous avons dans cette direction est le suivant. Nous dirons que qu'un nombre réel α satisfait une *condition diophantienne* s'il existe des constantes $C > 0$ et $\epsilon > 0$ telles que, pour tous les entiers (p, q) avec $q > 0$, on ait :

$$\left| \alpha_1 - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{2+\epsilon}}.$$

Proposition 6.4 ([23]) *Soit \mathcal{F} le feuilletage linéaire de $\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ d'équation $dt = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ et g une métrique de classe C^∞ . Si le sous-groupe de \mathbf{R} engendré par α_1 et α_2 contient un nombre rationnel non nul ou un nombre satisfaisant une condition diophantienne, il existe une fonction $u : \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que $\exp(u)g$ soit plate dans les feuilles.*

Le fait que ce théorème soit valable à la fois dans le cas rationnel et dans le cas irrationnel diophantien suggère qu'il est peut-être valable sans aucune hypothèse arithmétique ?

Nous reproduisons ici la preuve donnée dans [23]. Soit donc \mathcal{F} le feuilletage linéaire du tore $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ d'équation $dt = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ (où (x, y, t) désignent les coordonnées de \mathbf{R}^3) et soit g une métrique de classe C^∞ sur \mathbf{T}^3 . On peut envisager \mathcal{F} comme le quotient de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, feuilleté par plans $\mathbf{R}^2 \times \{*\}$, par le groupe engendré par les deux difféomorphismes commutant :

$$T_1 : (x, y, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (x + 1, y, t + \alpha_1) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z},$$

$$T_2 : (x, y, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (x, y + 1, t + \alpha_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Pour chaque $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, le plan $\mathbf{R}^2 \times \{t\}$ est muni de la métrique \tilde{g}_t obtenue par relèvement de g . Il existe un unique difféomorphisme conforme ψ_t de $(\mathbf{R}^2 \times \{t\}, \tilde{g}_t)$ sur le plan complexe \mathbf{C} qui envoie les points $(0, 0, t)$ et $(0, 1, t)$ sur 0 et 1 respectivement. Puisque nous supposons que la métrique g est de classe C^∞ , la métrique \tilde{g}_t dépend de t de manière C^∞ . La version à paramètres du théorème d'uniformisation donnée dans [1, 2] montre que la bijection :

$$F : (x, y, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (\psi_t(x, y), t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ .

Puisque T_1 et T_2 opèrent par isométries de \tilde{g} , leurs conjugués par F doivent opérer conformément sur les $\mathbf{C} \times \{*\}$. Autrement dit, $T'_1 = F \circ T_1 \circ F^{-1}$ s'écrit :

$$T'_1(\zeta, t) = (a'_1(t)\zeta + b'_1(t), t + \alpha_1).$$

où les fonctions $a'_1, b'_1 : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}^*$ sont de classe C^∞ .

Étudions d'abord le cas où α_1 est nul.

Alors, puisque T'_1 opère librement sur $\mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on constate que $a'_1(t)$ doit être identiquement égal à 1 de sorte que T'_1 opère sur chaque $\mathbf{C} \times \{t\}$ comme une translation non triviale d'amplitude $b'_1(t)$. Conjuguons T'_1 par :

$$G : (\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (b_1^{-1}(t)\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

On obtient :

$$T''_1 = G \circ T'_1 \circ G^{-1} : (\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (\zeta + 1, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Cherchons maintenant $T''_2 = (G \circ F) \circ T_2 \circ (G \circ F)^{-1}$ sous la forme :

$$T''_2(\zeta, t) = (a''_2(t)\zeta + b''_2(t), t + \alpha_2).$$

La condition de commutation entre T''_1 et T''_2 s'écrit :

$$a''_2(t) = 1$$

c'est-à-dire que T''_2 opère aussi par translations. Cela signifie que la métrique obtenue en transportant la métrique euclidienne de $\mathbf{C} \times \{*\}$ par $(G \circ F)^{-1}$ est invariante par T_1 et T_2 simultanément et passe donc au quotient sur le tore \mathbf{T}^3 . La métrique ainsi obtenue sur \mathbf{T}^3 est lisse, plate dans les feuilles, et conforme à g . Le théorème 6.4 est donc établi dans le cas particulier où $\alpha_1 = 0$.

Plus généralement, supposons que le sous-groupe de \mathbf{R} engendré par α_1 , α_2 et 1 soit de rang inférieur ou égal à 2. Alors les feuilles du feuilletage \mathcal{F} sont toutes des cylindres ou toutes des tores. En transformant le feuilletage par un difféomorphisme linéaire de \mathbf{T}^3 convenable, on se ramène au cas que nous venons d'étudier où $\alpha_1 = 0$ et le théorème 6.4 est donc aussi établi dans ce cas.

Nous abordons maintenant le cas plus intéressant où α_1 satisfait une condition diophantienne.

La proposition suivante est bien connue ; elle est le résultat le plus élémentaire de la théorie des petits dénominateurs (voir par exemple [4]). Elle se démontre simplement en évaluant les coefficients de Fourier et en majorant grâce à l'estimation diophantienne.

Proposition 6.5 *Si α_1 satisfait une condition diophantienne du type précédent, pour toute fonction $v : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ il existe une constante \bar{v} et une fonction $w : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que :*

$$v(t) = w(t + \alpha_1) - w(t) + \bar{v}.$$

Reprenons l'étude de :

$$T_1'(\zeta, t) = (a_1'(t)\zeta + b_1'(t), t + \alpha_1).$$

Appliquons la proposition 6.5 à la fonction $v(t) = \log |a_1(t)|$. Il existe donc une fonction $w : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ et une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation homologique :

$$|\exp(w(t + \alpha_1) \exp(-t))| = k|a_1(t)|.$$

Alors, on peut considérer le difféomorphisme :

$$G : (\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (\exp(-v(t))\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

En posant $T_1'' = (G \circ F) \circ T_1 \circ (G \circ F)^{-1}$, on obtient :

$$T_1'' : (\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (a_1''(t)\zeta + b_1''(t), t + \alpha_1) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

avec :

$$|a_1''(t)| = k.$$

Nous affirmons que $k = 1$. Ceci pourrait se déduire du théorème 6.1 mais c'est élémentaire dans ce cas. En effet, notons b_1'' une borne supérieure du module de $b_1''(t)$. Alors, on vérifie par récurrence que la n -ième puissance de T_1'' vérifie pour $n > 0$:

$$T_1''^n(0, 0) = (\zeta_n, t + n\alpha_1)$$

avec :

$$|\zeta_n| \leq b_1''(1 + k + \dots + k^{n-1}).$$

Supposons que $k < 1$ par exemple. Alors la formule précédente montre que les points $T_1''^n(0, 0)$ restent dans un compact de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Ceci est impossible car le groupe abélien engendré par T_1 et T_2 agit proprement sur $\mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. On montre de même que k ne peut pas non plus être strictement supérieur à 1 en considérant les itérés négatifs de T_1'' . Nous avons donc bien montré que $k = 1$.

Autrement dit T_1'' opère par isométries dans les $\mathbf{C} \times \{*\}$. Posons $T_2'' = (G \circ F) \circ T_2 \circ (G \circ F)^{-1}$. Nous affirmons que T_2'' opère nécessairement lui aussi par isométries. En effet, écrivons T_2'' sous la forme :

$$T_2'' : (\zeta, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (a_2''(t)\zeta + b_2''(t), t + \alpha_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Écrivons la relation de commutation entre T_1'' et T_2'' . On obtient :

$$a_1''(t)a_2''(t + \alpha_1) = a_2''(t)a_1''(t + \alpha_2)$$

$$a_1''(t + \alpha_2)b_2''(t) + b_1''(t + \alpha_2) = a_2''(t + \alpha_1)b_1''(t) + b_2''(t + \alpha_1).$$

L'irrationalité de α_1 et le fait que le module de $a_1''(t)$ soit égal à 1 montrent donc que $a_2''(t)$ est de module constant. Exactement comme nous avons montré plus haut que $k = 1$, on montre ici que le module de $a_2''(t)$ est en fait 1.

En résumé, nous avons montré que si l'on conjugue simultanément T_1 et T_2 par $G \circ F$, on obtient des difféomorphismes qui opèrent isométriquement dans les $\mathbf{C} \times \{*\}$.

Autrement dit, la métrique euclidienne des droites complexes $\mathbf{C} \times \{*\}$ est invariante par T_1'' et T_2'' . Cette métrique euclidienne, transportée par $G \circ F$, passe donc au quotient dans le tore \mathbf{T}^3 . Nous avons bien obtenu une métrique lisse, plate dans les feuilles et conforme à g , comme affirmé.

Lorsque le groupe engendré par α_1 , α_2 et 1 contient un nombre satisfaisant une condition diophantienne, on se ramène par changement de base dans le réseau \mathbf{Z}^3 au cas où α_1 satisfait une condition diophantienne. Puisque nous venons d'étudier ce cas, ceci termine la preuve du théorème 6.4.

Signalons encore un problème qui mériterait probablement une étude détaillée. Soit (M, \mathcal{L}) une lamination compacte dont toutes les feuilles sont denses et paraboliques (nous avons vu que ceci ne dépend pas du choix d'une métrique). *Existe-t-il une métrique riemannienne lisse (ou même mesurable) qui est plate dans les feuilles ?* Cette question est différente de celle étudiée dans ce paragraphe car la métrique cherchée n'est pas nécessairement hermitienne.

6.4 Un exemple de lamination où les types conformes se mélangent

Lors des conférences "État de la recherche", nous avons mentionné le problème de l'existence d'une lamination minimale dont certaines feuilles sont de type parabolique et d'autres de type hyperbolique. Richard Kenyon nous a indiqué une jolie idée pour construire un exemple que nous allons décrire ici. Nous le remercions d'avoir bien voulu nous autoriser à inclure cet exemple dans cet article.

Théorème 6.6 *Il existe une lamination \mathcal{L} par surfaces de Riemann sur un espace métrique compact $\tilde{\mathbf{X}}$ telle que :*

- *Toutes les feuilles de \mathcal{L} sont denses.*
- *Une feuille de \mathcal{L} est conformétement équivalente à une sphère moins quatre points (et donc hyperbolique). Toutes les autres feuilles sont conformétement équivalentes soit au plan \mathbf{C} soit au cylindre parabolique $\mathbf{C}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^*$.*
- *Toutes les feuilles de \mathcal{L} sont sans holonomie et ont une croissance polynômiale.*

Le dernier point n'est pas le plus important : pour les notions de croissance et d'holonomie, voir [24].

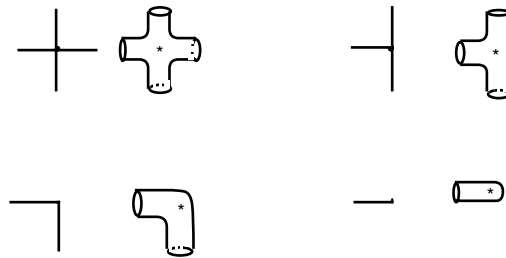
Nous commençons par décrire un espace métrique très général analogue à ceux que nous avons décrits en 2.3. Considérons le graphe G dont les sommets sont les points entiers $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ dans le plan \mathbf{R}^2 et dont les arêtes sont les segments horizontaux $[i, i+1] \times \{j\}$ ou verticaux $\{i\} \times [j, j+1]$ pour $(i, j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Soit \mathbf{A} l'ensemble des sous-graphes (finis ou infinis) de G qui contiennent l'origine $(0, 0)$ et qui sont des arbres (*i.e.* connexes et sans cycles). La *distance* entre deux sommets d'un arbre est la longueur minimale d'un chemin qui les joint dans ce graphe. Si T est un arbre de \mathbf{A} , si $p = (i, j)$ est l'un de ses sommets et si n est un entier, on notera $T(p, n)$ la

boule de centre p et de rayon n , c'est-à-dire le sous-arbre dont les sommets sont les sommets à distance inférieure ou égale à n de p . Nous allons faire de \mathbf{A} un espace métrique compact. Soient T_1 et T_2 deux éléments de \mathbf{A} . Par définition, la distance entre T_1 et T_2 est $\exp(-n)$ où n est le plus grand entier (éventuellement $+\infty$) tel que $T_1((0,0),n) = T_2((0,0),n)$. Par un procédé diagonal, on montre que \mathbf{A} muni de cette métrique est compact. Le point important est bien sûr qu'une limite d'arbres est un arbre.

Sur \mathbf{A} on dispose d'une relation d'équivalence naturelle qui consiste à changer de point base. Plus précisément, si T_1 et T_2 sont deux arbres de \mathbf{A} , on dira qu'ils sont équivalents s'il existe une translation entière du plan qui envoie T_1 sur T_2 . Les classes d'équivalence correspondantes sont dénombrables.

Nous allons maintenant modifier légèrement l'espace \mathbf{A} pour construire une lamination. Notre but est de construire un espace métrique compact $\tilde{\mathbf{A}}$ muni d'une lamination \mathcal{L} et contenant une copie de \mathbf{A} de telle sorte que les feuilles de \mathcal{L} intersectent \mathbf{A} sur les orbites de la relation d'équivalence que nous venons de définir dans \mathbf{A} .

Considérons un arbre T de \mathbf{A} . La boule de centre l'origine et de rayon 1 dans T peut être de 16 types différents suivant les sommets de T à distance 1 de l'origine qui peuvent constituer une partie quelconque de l'ensemble à quatre éléments $\{(\pm 1, \pm 1)\}$. Ainsi, \mathbf{A} est la réunion disjointe de 16 parties \mathbf{A}_P indexées par les parties P de $\{(\pm 1, \pm 1)\}$. Ces \mathbf{A}_P sont des ouverts fermés de \mathbf{A} . Pour chaque partie P , on considère une surface compacte à bord Σ_P qui est homéomorphe à une sphère à laquelle on a ôté des disques ouverts en nombre égal au cardinal de P . Les composantes du bord de Σ_P sont indexées par les éléments de P : nous noterons $\partial_p \Sigma_P$ la composante du bord de Σ_P indexée par $p \in P$. On choisit de plus des métriques riemanniennes sur ces Σ_P des telle sorte que toutes les composantes connexes des bords ont des voisinages ouverts isométriques à un anneau euclidien $\mathbf{S}^1 \times [0, 1[$ et on fixe de telles isométries. Enfin, on choisit un point base arbitraire \star_P dans chaque Σ_P . Sur la figure, nous avons indiqué 4 des 16 possibilités.



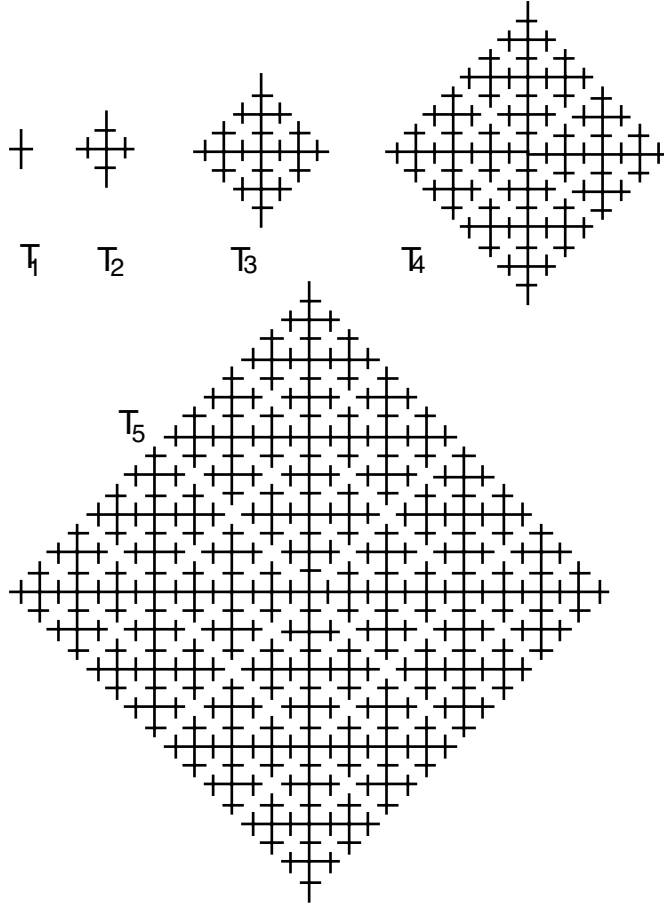
L'espace cherché $\tilde{\mathbf{A}}$ sera obtenu en recollant convenablement les bords de la réunion des $\tilde{\mathbf{A}}_P = \mathbf{A}_P \times \Sigma_P$. Précisément, soit T un élément de \mathbf{A} , soit P la partie telle que $T \in \mathbf{A}_P$ et choisissons un élément $p \in \{(\pm 1, \pm 1)\}$ de P . Le translaté $T + p$ de T par le vecteur p est un autre élément de \mathbf{A} et la partie Q telle que $T + p \in \mathbf{A}_Q$ contient le vecteur $-p$. Les bords $\partial_p(\Sigma_P)$ et $\partial_{-p}(\Sigma_Q)$ sont tous deux identifiés au cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbf{S}^1 \times [0, 1[$. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on identifie le

point θ de l'un des bords avec le point $-\theta$ de l'autre bord. On fait ces recollements pour tout arbre $T \in \mathbf{A}$. On vérifie que l'espace ainsi obtenu est compact ; le point important étant que pour chaque couple de parties (P, Q) tel qu'il existe un élément $p \in \{(\pm 1, \pm 1)\}$ avec $p \in P$ et $-p \in Q$, l'ensemble des arbres T tels que $T \in \mathbf{A}_P$ et $T + p \in \mathbf{A}_Q$ est un ouvert fermé de \mathbf{A} . Le plongement de chaque $\mathbf{A}_P \simeq \mathbf{A}_P \times \{\star_P\}$ dans $\mathbf{A}_P \times \Sigma_P$ fournit un plongement de \mathbf{A} dans $\tilde{\mathbf{A}}$.

Évidemment, les divers recollements que nous venons de décrire sont compatibles avec les laminations triviales des $\mathbf{A}_P \times \Sigma_P$ par les surfaces à bords Σ_P . On obtient ainsi une lamination \mathcal{L} sur $\tilde{\mathbf{A}}$. Les feuilles de cette lamination sont équipées d'une métrique riemannienne et on peut donc considérer \mathcal{L} comme une lamination par surfaces de Riemann. Chaque feuille de \mathcal{L} rencontre \mathbf{A} sur une classe d'équivalence de la relation sur \mathbf{A} que nous avons décrite plus haut. Chaque feuille L de \mathcal{L} correspond à un arbre T de \mathbf{A} défini à translations entières près. L'arbre T se plonge en fait dans L comme un "squelette", c'est-à-dire que tout point de L est à une distance uniformément bornée de T . Ainsi, étudier la géométrie des feuilles revient essentiellement à étudier la géométrie de l'arbre qui lui correspond. Le cas où P est vide est peu intéressant ; seul l'arbre réduit à l'origine appartient à \mathbf{A}_\emptyset et puisque Σ_\emptyset est une sphère, ceci conduit à une feuille sphérique isolée pour la lamination $(\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{L})$.

Cette lamination $(\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{L})$ n'est pas satisfaisante de notre point de vue car \mathbf{A} contient beaucoup trop d'arbres de sorte que la lamination n'est pas minimale et contient à la fois beaucoup de feuilles paraboliques et beaucoup de feuilles hyperboliques (ainsi d'ailleurs que des feuilles elliptiques isolées qui correspondent aux arbres finis qui sont dans \mathbf{A}). La lamination $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathcal{L})$ que nous cherchons sera en fait la restriction de \mathcal{L} à l'adhérence d'une feuille bien particulière L_∞ que nous allons construire. Pour cela, nous construisons un arbre particulier T_∞ dans \mathbf{A} .

La construction se fait par récurrence, c'est-à-dire que nous allons construire T_∞ comme une réunion croissante d'arbres finis T_n de \mathbf{A} . L'arbre T_1 est indiqué sur la figure suivante. Supposons construit l'arbre T_n qui rencontre l'axe vertical sur l'intervalle $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$ et l'axe horizontal sur l'intervalle $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$. On construit alors T_{n+1} de la façon suivante. On translate d'abord T_n verticalement d'un vecteur $(0, 2^n)$ puis on considère la réunion des images de ce translaté par les quatre rotations centrées sur l'origine et d'angles $0, \pm\pi/2, \pi$. On vérifie que le graphe ainsi obtenu est un arbre. Enfin, on élague les deux arêtes extrêmes sur l'axe horizontal de manière à ce que l'arbre T_{n+1} finalement obtenu rencontre bien cet axe sur l'intervalle $[-2^{n+1} + 1, 2^{n+1} - 1] \times \{0\}$ comme il se doit. On vérifie par récurrence que chaque T_{n+1} prolonge T_n de sorte que la réunion T_∞ des T_n est un arbre de \mathbf{A} .



On vérifie également par récurrence que les sommets de T_∞ sont les points de coordonnées (i, j) tels que $(i, j) = (0, 0)$ ou tels que les valuations 2-adiques de i et j sont différentes.

Rappelons que le nombre de bouts d'un graphe localement fini est la borne supérieure (éventuellement infinie) du nombre de composantes connexes infinies du complémentaire d'une partie finie. On remarque que l'arbre T_∞ a exactement 4 bouts ; il est constitué des deux axes de coordonnées auxquels se greffent des arbres finis qui ne modifient donc pas les bouts de T_∞ . La topologie de la feuille de \mathcal{L} qui correspond à T_∞ est donc celle d'une sphère moins quatre points, même si, d'un point de vue géométrique, il faut imaginer que cette sphère comme très "boursouflée"...

Soit \mathbf{X} l'adhérence de la classe d'équivalence de T_∞ dans \mathbf{A} . Admettons un instant les deux lemmes suivants.

Lemme 6.7 *Pour tout arbre T de \mathbf{X} , l'adhérence de la classe d'équivalence de T dans \mathbf{X} est dense dans \mathbf{X} .*

Lemme 6.8 *Soit T un arbre de \mathbf{X} qui n'est pas dans la classe d'équivalence de T_∞ . Alors T possède un ou deux bouts.*

Au fermé \mathbf{X} de \mathbf{A} correspond un fermé $\tilde{\mathbf{X}}$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ saturé par la lamination \mathcal{L} . Nous allons montrer que cette lamination $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathcal{L})$ satisfait à toutes les contraintes du théorème 6.6.

D'après le lemme 6.7, toutes les feuilles de \mathcal{L} sont denses dans $\tilde{\mathbf{X}}$.

Puisque les arbres de \mathbf{A} sont plongés dans le réseau des points entiers de \mathbf{R}^2 , il est clair que le nombre de sommets d'un arbre de \mathbf{A} situés à distance n de l'origine croît au plus quadratiquement en n . Il en résulte que toutes les feuilles de \mathcal{L} ont une croissance au plus quadratique.

Considérons un arbre T de \mathbf{A} possédant exactement deux bouts. Il existe un unique chemin infini joignant ces deux bouts et sans allers retours de sorte que T peut être considéré comme une droite sur laquelle on branche une collection d'arbres finis. La feuille L de \mathcal{L} correspondante s'obtient donc à partir d'un cylindre infini en faisant la somme connexe de sphères (boursoufflées !) c'est-à-dire que cette feuille L est homéomorphe à un cylindre. Nous affirmons que ce cylindre est conformétement équivalent à $\mathbf{C}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^*$. Il suffit de remarquer que L contient une collection infinie de cylindres ouverts disjoints non homotopes à zéro et conformétement équivalents à $\mathbf{S}^1 \times]0, 1[$ de sorte que le module de L considéré comme une surface de Riemann est nécessairement infini. Ceci entraîne bien que L est conformétement isomorphe à \mathbf{C}^* .

De manière analogue, si un arbre T de \mathbf{A} ne possède qu'un bout, il s'obtient à partir d'une demi-droite en greffant des arbres finis. La feuille L correspondante est donc un plan topologiquement. Pour montrer qu'elle est en fait conformétement isomorphe à \mathbf{C} , il suffit de remarquer que L contient une réunion d'anneaux emboîtés qui sont tous isomorphes à $\mathbf{S}^1 \times]0, 1[$ et donc tous de même module.

Il résulte donc de ces remarques et du lemme 6.8 que toutes les feuilles de $(\tilde{\mathbf{X}}, \mathcal{F})$ distinctes de la feuille L_∞ correspondant à T_∞ sont des plans ou des cylindres conformétement isomorphes à \mathbf{C} ou \mathbf{C}^* . Quant à la feuille L_∞ , un argument analogue montre qu'elle est conformétement équivalente à une sphère moins 4 points.

Pour démontrer le théorème 6.6, il reste à démontrer les deux lemmes...

Nous commençons par deux remarques préliminaires simples dont nous laissons les preuves au lecteur. Elles se vérifient facilement en utilisant la définition de T_∞ . On peut aussi utiliser la description que nous avons donnée des sommets de T_∞ en termes de valuations 2-adiques et remarquer que si i est un entier non nul multiple de 2^n et si a est un entier non nul de module strictement inférieur à 2^n , les valuations 2-adiques de a et $i + a$ sont les mêmes.

Remarque 1 : Pour toute boule $B = T_\infty((i, j), 2^{n+1})$, il existe une translation entière τ telle que $\tau(T_\infty((0, 0), 2^n))$ est contenu dans B et coïncide avec la boule $T_\infty(\tau(0, 0), 2^n)$.

Remarque 2 : Pour toute boule $B = T_\infty((i, j), 2^n)$, il existe un sommet (i', j') de T_∞ avec $|i'| \leq 2^n$ et $|j'| \leq 2^n$ tel que la translation par $(i' - i, j' - j)$ envoie B sur la boule $T_\infty((i', j'), 2^n)$.

Nous démontrons d'abord le lemme 6.7. Considérons donc un arbre T dans l'adhérence \mathbf{X} de la classe d'équivalence de T_∞ . Il s'agit de démontrer que la classe d'équivalence de T est également dense dans \mathbf{X} . Il suffit évidemment de montrer que T_∞ est dans l'adhérence de la classe de T . Autrement dit, il s'agit de montrer que pour tout entier n , il existe une translation entière (i, j) telle que $T_\infty((0, 0), 2^n) + (i, j)$ soit la boule $T((i, j), 2^n)$.

Puisque T est dans l'adhérence de la classe de T_∞ il existe une translation entière (i_0, j_0) telle que $T((0, 0), 2^{n+1}) + (i_0, j_0)$ soit la boule $T_\infty((i_0, j_0), 2^{n+1})$. D'après la remarque 1, il existe (i_1, j_1) telle que $T_\infty((0, 0), 2^n) + (i_1, j_1)$ soit contenu dans $T((0, 0), 2^{n+1}) + (i_1, j_1)$ et soit la boule $T_\infty((i_1, j_1), 2^n)$. Il en résulte que la translation $(i_1 - i, j_1 - j)$ envoie la boule $T_\infty((0, 0), 2^n)$ sur la boule $T((i_1 - i, j_1 - j), 2^n)$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous démontrons maintenant le lemme 6.8. Soit T un arbre de \mathbf{A} qui possède au moins trois bouts. Alors on peut trouver dans T un Y , c'est-à-dire un sommet p d'où partent trois chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ infinis, disjoints, sans points doubles ni allers retours.

Nous considérons un arbre T de \mathbf{X} et nous supposons que cet arbre possède plus de deux bouts. Nous allons montrer que T est un translaté de T_∞ . Pour cela, on choisit un sommet p et trois chemins comme ci-dessus. Par une translation on peut toujours supposer que p est l'origine de T . Nous allons analyser la nature des intersections de ces chemins avec $T((0, 0), 2^n)$ qui est donc constituée de trois chemins disjoints $\gamma_1^n, \gamma_2^n, \gamma_3^n$ émanant de l'origine et de longueur 2^n . D'après la remarque 2, par une translation (i, j) avec $|i| \leq 2^n$ et $|j| \leq 2^n$ on peut amener $T((0, 0), 2^n)$ sur $T_\infty((i, j), 2^n)$ qui est contenu dans $T_\infty((0, 0), 2^{n+1})$. L'arbre fini $T_\infty((0, 0), 2^{n+1})$ a la structure suivante. C'est une croix formée de quatre branches sur les axes de coordonnées de longueur 2^{n+1} auxquelles se greffent des arbres de diamètres strictement inférieurs à 2^n (voir figure). Les trois chemins $\gamma_1^n + (i, j), \gamma_2^n + (i, j), \gamma_3^n + (i, j)$ étant disjoints et de longueur 2^n , il est clair que la seule possibilité est que ces chemins partent de l'origine c'est-à-dire que $(i, j) = (0, 0)$. Il en résulte que pour tout n les boules $T((0, 0), 2^n)$ et $T_\infty((0, 0), 2^n)$ coïncident. Nous avons établi que l'arbre T n'est autre que T_∞ et ceci termine la preuve du théorème 6.6.

7 Fonctions méromorphes sur les laminations

Sur toute surface de Riemann compacte, il existe des fonctions méromorphes non constantes. Plus précisément, si deux points distincts sont donnés sur cette surface, il existe une fonction méromorphe prenant des valeurs différentes en ces points ; ceci permet de montrer que toutes les surfaces de Riemann sont algébriques, c'est-à-dire qu'elles se plongent holomorphiquement dans un espace projectif complexe. C'est ce résultat de Riemann, l'un des plus importants de la théorie classique, que nous allons chercher à généraliser.

Soit (M, \mathcal{L}) une lamination par surfaces de Riemann et U un ouvert de M . Une *fonction holomorphe* sur U est une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ qui est continue et qui est holomorphe dans chaque feuille. Ceci définit un faisceau d'anneaux \mathcal{O} sur M .

Une *fonction méromorphe* est habituellement définie comme une fonction qui est localement le quotient de deux fonctions holomorphes. Lorsque l'on essaye de généraliser cette définition aux laminations, on rencontre plusieurs difficultés.

La première est que l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point d'une lamination n'est pas nécessairement intègre. Il suffit en effet de remarquer que cet anneau contient le sous-anneau des germes de fonctions continues

et constantes sur les plaques, isomorphe à l'anneau des germes de fonctions continues sur une transversale, au voisinage de l'un de ses points. Ce dernier anneau n'est pas intègre dès que le point considéré n'est pas isolé.

La deuxième difficulté est illustrée par l'exemple suivant. Considérons la lamination triviale $\mathbf{D} \times [0, 1]$ et soient z_1, z_2 deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{D} telles que $z_1(t) = z_2(t)$ pour $t \leq 1/2$ et $z_1(t) \neq z_2(t)$ pour $t > 1/2$. La fonction $F : (z, t) \in \mathbf{D} \times [0, 1] \mapsto (z - z_1(t))/(z - z_2(t))$ est le quotient de deux fonctions holomorphes et doit donc être qualifiée de méromorphe. Il est cependant difficile de définir le "diviseur des pôles" de F . En effet, pour $t \leq 1/2$ la fonction F est égale à 1 et n'a donc pas de pôles, alors que la courbe $(z_2(t), t)$ est contenue dans "les pôles" de F pour $t > 1/2$. Le diviseur des pôles présente donc un "point d'arrêt".

Rappelons que nous avons déjà défini la notion de fibré en droites au dessus de M . Si l'on note \mathcal{O}^* le faisceau des germes de fonctions holomorphes non nulles, les fibrés en droites au dessus de M sont identifiés aux éléments de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

Si U est un ouvert de M , notons $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U qui ne sont identiquement nulles sur aucune feuille de la restriction de \mathcal{L} à U . C'est un monoïde pour la multiplication. Le faisceau en monoïdes associé à ce préfaisceau sera noté \mathcal{H} ; il contient \mathcal{O}^* comme sous-faisceau. On appellera *diviseur effectif* sur M une section globale du quotient $\mathcal{H}/\mathcal{O}^*$. En termes moins précis, un diviseur effectif est défini localement par une équation holomorphe qui n'est identiquement nulle sur aucune plaque et ces équations locales sont bien définies modulo une multiplication par une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Le *support* d'un diviseur effectif est le fermé de M où les équations locales sont nulles.

Comme dans le cas classique, la donnée d'un diviseur effectif D définit naturellement un fibré en droites muni d'une section holomorphe. Réciproquement, une section holomorphe d'un fibré en droites définit un diviseur effectif : le "diviseur de ses zéros".

Une *fonction méromorphe* sur (M, \mathcal{L}) est une fonction $f : M \rightarrow \mathbf{CP}^1$ telle qu'il existe un fibré en droites E au dessus de M et deux sections holomorphes u, v de ce fibré telles que $f = u/v$ et v ne s'annule sur aucune feuille. Comme le suggère cette écriture, la fonction f n'est pas définie aux points où u et v sont nulles ; partout ailleurs, le quotient des deux sections peut effectivement être compris comme un élément de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Bien entendu, le fibré en droites E n'est pas unique. Le diviseur des zéros de la section v est appelé *un* diviseur des pôles de f .

Même si une fonction méromorphe f n'est pas définie aux zéros communs de u et v , la restriction de f à chaque feuille est une fonction méromorphe habituelle et se prolonge donc en une fonction continue à valeurs dans \mathbf{CP}^1 . Il faut cependant prendre garde au fait que la fonction f ainsi définie sur M n'est pas nécessairement continue : c'est le phénomène que nous avons déjà vu de rencontre des zéros et des pôles.

Pour simplifier nos énoncés, et pour éviter quelques phénomènes pathologiques, nous conviendrons de dire qu'une fonction méromorphe est *non constante* si elle n'est constante sur aucune feuille.

Lemme 7.1 *Le support d'un diviseur des pôles d'une fonction méromorphe non constante rencontre toutes les feuilles d'une lamination.*

Démonstration Soit $f : M \rightarrow \mathbf{CP}^1$ une fonction méromorphe non constante et X le support d'un diviseur des pôles. On commence par remarquer qu'il résulte du théorème de Rouché que si une plaque de \mathcal{L} rencontre X , il en est de même pour les plaques voisines. Autrement dit, la réunion des feuilles qui rencontrent X est ouverte. Le complémentaire, s'il était non vide, serait une lamination \mathcal{L}' munie d'une fonction holomorphe continue dans \mathbf{C} . On pourrait alors considérer un point de \mathcal{L}' maximisant le module de f et ceci est en contradiction avec le principe du maximum dans la feuille contenant ce point. \square

7.1 Un contre-exemple

Nous allons commencer par indiquer une condition nécessaire pour l'existence de fonctions méromorphes non constantes et donner des exemples de laminations ne satisfaisant pas cette condition.

D'après notre définition, un cycle feuilleté est un élément du dual de $A^2(\mathcal{L})$ qui est nul sur les formes exactes. Sous des conditions raisonnables sur l'espace ambiant M , un cycle feuilleté peut être considéré comme une classe d'homologie de dimension 2 sur M qui peut être homologue à zéro dans certains cas, comme nous le verrons plus loin. Nous ne chercherons pas le cadre le plus général où ceci aurait un sens et nous nous limiterons au cas où M est une variété différentiable compacte et où \mathcal{L} est un feuilletage lisse. Par restriction, les 2-formes différentielles sur M donnent des éléments de $A^2(\mathcal{L})$ et un cycle feuilleté peut donc être considéré comme un courant fermé sur M au sens habituel, et donc possède une classe d'homologie.

Lemme 7.2 *Soit (M, \mathcal{L}) un feuilletage par surfaces de Riemann sur une variété orientée. On suppose que \mathcal{L} possède un cycle feuilleté μ , homologue à zéro. Alors, le support d'un diviseur effectif ne peut pas rencontrer toutes les feuilles. En particulier si un cycle feuilleté est homologue à zéro, il n'existe pas de fonction méromorphe non constante.*

Démonstration Soit E un fibré en droites holomorphe au dessus de M et s une section holomorphe globale de E . Nous allons montrer que, sous les hypothèses du lemme, le lieu des zéros de s ne peut pas rencontrer toutes les feuilles.

Puisque E est un fibré en droites au dessus de M , il possède une classe de Chern $c(E)$ qui est un élément du groupe de cohomologie de de Rham $H^2(M; \mathbf{R})$. Par restriction aux feuilles, on a une application $H^2(M; \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\mathcal{L})$ qui envoie bien sûr $c(E)$ sur la classe de Chern que nous avons définie au paragraphe 4.2. Soit γ une 2-forme fermée sur M qui représente $c(E)$.

Le cycle feuilleté μ peut-être considéré comme un courant sur M . Dire que le cycle est homologue à zéro signifie que ce courant est nul sur les formes fermées. En particulier, on a $\langle c(E), \mu \rangle = \langle \gamma, \mu \rangle = 0$ et le lemme 4.5 permet de conclure que μ -presque toute feuille ne rencontre pas le lieu des zéros de s . \square

Il est facile de construire un feuilletage ne satisfaisant pas à ce critère. Considérons une surface de Hopf, quotient de $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par une homothétie de rapport 2. On dispose d'une fibration $\pi : M \rightarrow \mathbf{CP}^1$ qui associe à chaque point la droite vectorielle de \mathbf{C}^2 passant par ce point. Les fibres de π sont des courbes elliptiques qui définissent une lamination de M . Puisque M est difféomorphe à $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^1$, son deuxième groupe d'homologie est nul de sorte que la classe fondamentale des feuilles est nulle dans l'homologie de M . Ainsi, *il n'existe pas de fonction méromorphe non constante sur cette lamination de M* . Ceci généralise le fait bien connu que les surfaces de Hopf ne sont pas algébriques.

Bien sûr, on peut reprocher à l'exemple précédent de ne pas être minimal. Reprenons les notations de 6.1. Le groupe à un paramètre de translations à gauche $h_+^s (s \in \mathbf{C})$ sur l'espace homogène $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ engendre une lamination \mathcal{L} sur $M = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ qui est munie d'une métrique hermitienne plate pour laquelle le champ holomorphe associé est de longueur 1. Cette lamination possède un cycle feuilleté (d'ailleurs unique à constante multiplicative près) défini comme suit : si ω est une 2-forme de \mathcal{L} , on peut l'évaluer sur le champ de 2-vecteurs unité porté par \mathcal{L} et on obtient une fonction sur M dont on calcule l'intégrale $I(\omega)$ sur M par rapport à la mesure de Haar de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$. Il est facile de vérifier que ceci définit bien un cycle feuilleté. D'autre part, le flot complexe d^t vérifie $d^t h_+^s d^{-t} = h_+^{\exp(2t)s}$. Cela signifie que d^t préserve globalement \mathcal{L} et qu'il dilate la métrique hermitienne plate le long des feuilles par une constante différente de 1. En particulier, le cycle feuilleté précédemment décrit est lui aussi multiplié par une constante. Puisqu'un flot agit trivialement en homologie, il en résulte que la classe d'homologie du cycle feuilleté étudié est nulle. *Nous avons donc construit une lamination minimale sans fonction méromorphe non constante.*

Étant donnée une lamination (M, \mathcal{L}) , la question de l'existence d'un diviseur effectif dont le support rencontre toutes les feuilles précède évidemment celle de l'existence de fonctions méromorphes ; il s'agit d'une question purement topologique.

7.2 Construction de fonctions méromorphes

Nous allons décrire ici trois résultats qui concernent l'existence de fonctions méromorphes pour des laminations dont toutes les feuilles sont de même type.

Une *transversale totale* pour une lamination (M, \mathcal{L}) est un fermé $\mathcal{T} \subset M$ qui rencontre toutes les feuilles de \mathcal{L} et qui rencontre chaque ouvert distingué $U_i \simeq \mathbf{D} \times T_i$ sur la réunion disjointe d'un nombre fini de graphes de la forme $\{(\sigma(t), t)\}$ où les σ sont continues et définies dans des ouverts de T_i . Évidemment, une telle transversale est un exemple de diviseur effectif si l'on convient de lui donner une multiplicité 1.

Soit (M, \mathcal{L}) une lamination dont toutes les feuilles sont paraboliques. Nous dirons que \mathcal{L} vérifie *la condition de croissance* s'il existe des constantes $C, l > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $\phi : \mathbf{C} \rightarrow L$ un revêtement holomorphe d'une feuille L et $|d\phi|$ la norme de la dérivée de ϕ (calculée avec une métrique auxiliaire sur \mathcal{L}). Alors on a :

$$C^{-1}(1 + |z|)^{-l} |d\phi(0)| \leq |d\phi(z)| \leq C(1 + |z|)^l |d\phi(0)|.$$

Bien sûr, cette condition est satisfaite si la lamination est uniformisable, car alors $|d\phi|$ est bornée.

Théorème 7.3 *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination de dimension topologique finie dont toutes les feuilles sont de type elliptique. Alors les fonctions méromorphes sur (M, \mathcal{L}) séparent les points de M .*

Théorème 7.4 *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination de dimension topologique finie dont toutes les feuilles sont de type parabolique. Si (M, \mathcal{L}) possède une transversale totale et si \mathcal{L} vérifie la condition de croissance, les fonctions méromorphes sur (M, \mathcal{L}) séparent les points de M .*

Théorème 7.5 *Soit (M, \mathcal{L}) une lamination de dimension topologique finie dont toutes les feuilles sont de type hyperbolique. Si (M, \mathcal{L}) possède une transversale totale, les fonctions méromorphes sur (M, \mathcal{L}) séparent les points de M .*

Avant d’esquisser les démonstrations, faisons quelques remarques sur les hypothèses.

1. Nous avons déjà observé dans la preuve de 5.6 qu’une lamination à feuilles paraboliques possède une suite moyennisante mais nous ignorons si une telle lamination vérifie nécessairement la condition de croissance.

2. On peut démontrer le même résultat (avec essentiellement la même preuve) en supposant simplement l’existence d’un diviseur effectif dont le support rencontre toutes les feuilles au lieu de celle d’une transversale totale. Nous avons cependant choisi cet énoncé plus faible car nous sommes convaincus que ce type d’hypothèse topologique est provisoire et sera bientôt éliminé...

3. Pour les feuilletages orientés de codimension 1 sur les variétés fermées de dimension 3, on sait qu’il existe une transversale fermée totale si et seulement si tous les cycles feuilletés sont non homologues à zéro (on dit alors que le feuilletage est *tendu*). Plus précisément, il n’existe pas de transversale totale seulement si le feuilletage contient un nombre fini de feuilles compactes toriques dont la réunion (orientée) borde une sous-variété à bord (voir [43, 25]). En particulier, si toutes les feuilles d’un feuilletage de codimension 1 sur une variété de dimension 3 sont de type hyperbolique, il existe une transversale totale et on peut donc appliquer le théorème 7.5.

La *démonstration du théorème 7.3* est bien sûr la plus facile. Soit (M, \mathcal{L}) une lamination dont toutes les feuilles sont elliptiques. Nous avons vu en 5.1 que les feuilles de \mathcal{L} sont les fibres d’une fibration $\pi : M \rightarrow Q$. On peut procéder de la manière suivante. Soit N un entier positif et considérons le fibré en droites au dessus de \mathbf{CP}^1 qui est la puissance N -ième du fibré tangent. Autrement dit, les sections globales de ce fibré sont les tenseurs holomorphes qui s’écrivent de la manière suivante dans chaque carte affine de \mathbf{CP}^1 :

$$g(z) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^N.$$

L'espace des sections holomorphes est un espace E_N de dimension complexe $2N + 1$ sur lequel $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ agit naturellement ; il correspond aux fonctions g qui sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $2N$. Comme nous l'avons vu, le "quotient" de deux éléments non nuls de E_N peut être considéré comme une fraction rationnelle sur \mathbf{CP}^1 . On peut construire le fibré vectoriel de rang $2N + 1$ au dessus de Q , associé à E_N . Puisque M est supposé de dimension topologique finie, un fibré vectoriel de rang suffisamment élevé au dessus de M possède des sections qui ne s'annulent pas. En choisissant N assez grand et en considérant le quotient de deux sections qui ne s'annulent pas, on obtient donc des fonctions méromorphes sur (M, \mathcal{L}) . Cette construction est suffisamment générale pour produire des fonctions méromorphes qui séparent les points de M . Ceci démontre le théorème 7.3.

La *démonstration de 7.4* consiste à adapter la construction classique des fonctions elliptiques. Plaçons-nous d'abord dans un cas très particulier ; supposons que (M, \mathcal{L}) soit une lamination à feuilles paraboliques telle que les feuilles de \mathcal{L} soient les orbites d'un flot complexe ϕ^z ($z \in \mathbf{C}$) agissant holomorphiquement dans les feuilles. Soit $\mathcal{T} \subset M$ une transversale totale. Si x est un point de M , l'ensemble $Z(x) \subset \mathbf{C}$ des $z \in \mathbf{C}$ tels que $\phi^z(x) \in \mathcal{T}$ est discret dans \mathbf{C} et il existe $\epsilon > 0$ (indépendant de x) tel que les disques de rayon ϵ centrés sur les points de $Z(x)$ sont disjoints. Il en résulte que, pour un entier $N > 2$, la série suivante converge en dehors de \mathcal{T} et définit une fonction holomorphe sur (M, \mathcal{L}) à valeurs dans $\mathbf{CP}^1 \simeq \mathbf{C} \cup \{\infty\}$:

$$f(x) = \sum_{z \in Z(x)} z^{-N}. \quad (7)$$

Remarquons que si $s : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, l'image de l'application $t \in \mathcal{T} \mapsto \phi^{s(t)}(t) \in M$ est une autre transversale totale. Ceci permet de montrer que si x et y sont deux points distincts, il existe une transversale totale qui contient x et pas y . On peut donc construire des fonctions méromorphes à valeurs dans $\mathbf{CP}^1 \simeq \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ qui ont un pôle en x et qui sont finies en y et ceci établit le théorème 7.4 dans le cas particulier d'un flot holomorphe.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général du théorème 7.4, c'est-à-dire d'une lamination à feuilles paraboliques, vérifiant la condition de croissance et possédant une transversale totale \mathcal{T} . Soit x un point de M . Par hypothèse, il existe un revêtement holomorphe $\phi : \mathbf{C} \rightarrow L(x)$ de la feuille passant par x . Soit $Z(x)$ l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que $\phi(z) \in \mathcal{T}$. C'est encore un ensemble discret et il est encore vrai qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que les disques centrés sur les points de $Z(x)$ et de rayon ϵ sont disjoints, mais à condition de considérer les disques pour la métrique de \mathbf{C} qui est l'image réciproque par ϕ d'une métrique hermitienne sur (M, \mathcal{L}) . Pour cette raison, la condition de croissance permet de garantir que l'expression 7 est convergente pour N assez grand. Cependant la somme de cette série dépend du choix du revêtement ϕ qui n'est unique qu'à une application affine près. L'objet bien défini, indépendamment du choix de ϕ est l'expression :

$$\rho(x) = \sum_{z \in Z(x)} z^{-N} dz^N.$$

Autrement dit, ρ définit une différentielle méromorphe d'ordre N le long des feuilles, qui présente un pôle le long de \mathcal{T} . La continuité de ρ dans M résulte de la continuité

de la structure affine des feuilles que nous avons établie dans 6.3. Si l'on procède de cette manière avec deux transversales et si on considère le rapport des deux différentielles ρ ainsi obtenues, on obtient une fonction méromorphe et ceci établit le théorème 7.4. Pour être précis, il faudrait dire que les deux différentielles ρ ainsi construites peuvent être considérées comme des sections holomorphes d'un fibré en droites : il suffit ici de considérer le produit de la puissance N -ième du fibré cotangent aux feuilles et des puissances N -ièmes des deux fibrés définis par les deux transversales.

Avant de démontrer 7.5, rappelons comment H. Poincaré construit des fonctions fuchsiennes [40]. Soit Γ un groupe fuchsien, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Soit R une fraction rationnelle d'une variable complexe z et considérons la forme différentielle quadratique $\rho = R(z) dz^2$. Puisque Γ opère sur la sphère de Riemann (en préservant le disque \mathbf{D}), il opère sur les différentielles quadratiques. On pose alors :

$$\sigma_R = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* \rho.$$

Le fait que Γ soit discret et agisse proprement sur le disque \mathbf{D} entraîne que la série précédente converge dans le disque \mathbf{D} tout entier (privé bien entendu de l'orbite des pôles de R par Γ). Cela résulte du fait que si x est un point du disque de Poincaré, on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que les disques hyperboliques de rayon ϵ et centrés sur l'orbite $\Gamma.x$ soient disjoints deux à deux de sorte que la série de leurs aires euclidiennes converge. La différentielle quadratique σ_R est bien sûr invariante par Γ . Si l'on considère deux fractions rationnelles R_1 et R_2 , le quotient $\sigma_{R_1}/\sigma_{R_2}$ est une fonction méromorphe sur \mathbf{D} invariante par le groupe fuchsien Γ , c'est-à-dire une fonction méromorphe f sur la surface de Riemann \mathbf{D}/Γ . Il faut cependant s'assurer que f n'est pas constante. H. Poincaré y parvient en faisant en sorte que les pôles de R_1 et R_2 ne soient pas situés sur la même orbite de Γ ce qui assure que f a un zéro et un pôle et n'est donc pas constant.

La preuve du théorème 7.5 consiste à imiter la construction de Poincaré dans le contexte des laminations. Soit (M, \mathcal{L}) une lamination dont toutes les feuilles sont de type hyperbolique. Nous savons qu'il existe une métrique hermitienne g telle que toutes les feuilles sont à courbure -1 . Soit $T\mathcal{L}$ le fibré tangent à la lamination. En considérant l'application exponentielle le long des feuilles pour la métrique g , on définit une application $\exp : T\mathcal{L} \rightarrow M$ qui, en restriction à chaque plan tangent, est un revêtement car nous savons que chaque feuille est à courbure négative. Nous pouvons donc équiper chaque plan tangent de la métrique image réciproque et nous considérerons dorénavant que $T\mathcal{L}$ est un fibré au dessus de M dont les fibres sont des copies du disque de Poincaré \mathbf{D} . L'application \exp est holomorphe et isométrique dans les fibres.

Soit $T\mathcal{T}$ la partie de $T\mathcal{L}$ située au dessus de la transversale totale \mathcal{T} . On peut considérer $T\mathcal{T}$ comme une lamination non compacte dont les feuilles sont toutes des disques de Poincaré et qui s'envoie holomorphiquement dans \mathcal{L} par l'application $\exp : T\mathcal{T} \rightarrow M$. Cette dernière application est surjective, à fibres discrètes. Pour construire une différentielle quadratique sur M , nous allons simplement prendre l'"image directe" d'une différentielle quadratique sur $T\mathcal{T}$.

Soit ρ une différentielle quadratique sur $T\mathcal{T}$. Cela signifie que ρ associe continûment à chaque point x de \mathcal{T} une différentielle quadratique $\rho(x)$ sur le plan tangent correspondant, isomorphe à \mathbf{D} . On demande que ρ soit rationnelle, c'est-à-dire de la forme $R_x(z) dz^2$ où $R_x(z)$ dépend rationnellement de z . En outre, on choisit ρ de façon à ce que tous les $\rho(x)$ présentent un pôle (pas nécessairement simple) à l'origine du disque correspondant. On peut choisir $R_x(z)$ de la forme $z^{-N} P_x(z)$ où N est un entier assez grand et P_x est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à N . En effet, l'hypothèse sur la dimension finie de M garantit qu'un fibré vectoriel au dessus de M de dimension finie suffisamment grande possède une section continue qui ne s'annule pas.

On pose alors $\sigma = \exp_\star(\rho)$ mais il faut expliquer ce que nous entendons par cette image directe "contre nature"...

Le revêtement universel \tilde{L} d'une feuille L de \mathcal{L} est isomorphe au disque \mathbf{D} . Choisissons un isomorphisme de sorte qu'on dispose d'une immersion holomorphe $i : \mathbf{D} \rightarrow M$ dont l'image est L . L'image réciproque $i^{-1}(\mathcal{T})$ est un ensemble discret dans \mathbf{D} et il existe une borne inférieure pour la distance hyperbolique de Poincaré entre deux de ses points. Pour chaque $t \in i^{-1}(\mathcal{T})$, on dispose d'une application exponentielle $\exp_t : \mathbf{D} \rightarrow \tilde{L} \simeq \mathbf{D}$ qui envoie l'origine sur le point t et qui est une isométrie. On dispose par ailleurs pour chaque t d'une différentielle quadratique rationnelle ρ_t sur \mathbf{D} . En utilisant exactement le même raisonnement que H. Poincaré, on constate que la somme $\sum_t (\exp_t^{-1})^*(\rho_t)$ converge en dehors de ses pôles. Cette différentielle quadratique sur \tilde{L} passe naturellement au quotient sur L et définit une différentielle quadratique sur chaque feuille de L ; c'est la différentielle quadratique méromorphe que nous avons notée σ . Il faut s'assurer de la dépendance continue dans la direction transverse mais cela résulte facilement de la convergence uniforme des séries considérées. Nous avons bien construit une différentielle méromorphe sur (M, \mathcal{L}) qui présente un pôle le long de la transversale \mathcal{T} .

Remarquons que si s est une section du fibré $T\mathcal{T}$ au dessus de \mathcal{T} , l'image de l'application $t \in \mathcal{T} \mapsto \exp(s(t)) \in M$ est une autre transversale totale. Ceci permet de montrer que si x et y sont deux points distincts, il existe une transversale totale qui contient x et pas y .

Pour construire des fonctions méromorphes non constantes sur (M, \mathcal{L}) , il suffit de considérer le quotient de deux de ces différentielles quadratiques, correspondant au choix de deux transversales totales. Ce rapport n'est pas constant car il possède des pôles. Ici encore, pour être précis, il faut considérer ces deux différentielles méromorphes comme des sections holomorphes du même fibré en droites. Deux points distincts de M étant donnés, nous avons bien construit une fonction méromorphe sur M qui prend des valeurs différentes en ces points. Ceci achève la preuve de 7.5.

Bibliographie

- [1] ABIKHOF, W.: *Real analytic theory of Teichmüller space*, Lecture Notes in Mathematics **820**, Springer Verlag, (1980).

- [2] AHLFORS, L.: *Lectures on quasiconformal mappings*, Wadsworth (1987).
- [3] AHLFORS, L. & BERS, L.: Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.* **72** (1960) 385-404.
- [4] ARNOLD, V.: *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, MIR (1980).
- [5] BARRÉ, S.: Polyèdres de rang 2, thèse, ENS Lyon, décembre 1996.
- [6] BONATTI, C., LANGEVIN, R. & MOUSSU, R.: Feuilletages de \mathbf{CP}^n : de l'holonomie hyperbolique, *Pub. IHES* **75** (1992) 123-134.
- [7] BROWN, K.: *Buildings*, Springer-Verlag (1989).
- [8] CAMACHO, C.: Problems on limit sets of foliations on complex projective spaces, *Proceed. ICM Kyoto* (1991) 1235-1239.
- [9] CAMACHO, C., LINS NETO, A. & SAD, P.: Minimal sets of foliations on complex projective spaces, *Pub. IHES* **68** (1988) 187-203.
- [10] CANDEL, A.: Uniformization of surface laminations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **26** (1993) 489-516.
- [11] CANTWELL, & CONLON, L.: Every surface is a leaf, *Topology* **26** (1987) 265-285.
- [12] CANTWELL, & CONLON, L.: Generic leaves, *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), no. 2, 306-336.
- [13] CONNES, A.: A survey of foliations and operator algebras, *Proceed. of Symp. in Pure Math.* vol **38** (1982).
- [14] CONNES, A.: *Non commutative geometry*, Academic Press (1994).
- [15] DEMAILLY, J.-P.: Courants positifs et théorie de l'intersection, *Gazette des mathématiciens* **53** (1992), 131-159.
- [16] DOUADY, A. & HUBBARD, J.H.: On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **18** (1985) 287-343.
- [17] EL KACIMI, A.: Sur la cohomologie feuilletée, *Compositio Math.* **49** (1983) 195-215.
- [18] ENRIQUEZ, B.: Sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les feuilletages avec mesure harmonique, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **309** (1989) 733-736.
- [19] GARNETT, L.: Foliation, the ergodic theorem and Brownian motion, *J. Func. Anal.* **51** (1983) 285-311.
- [20] GHYS, E.: Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional foliations, *J. Func. Anal.* **77** (1988) 51-59.
- [21] GHYS, E.: Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbf{C})$, *J. reine angew. Math.* **468** (1995) 113-138.
- [22] GHYS, E.: Topologie des feuilles génériques, *Ann. of Math.* **141** (1995) 387-422.

- [23] GHYS, E.: Sur l'uniformisation des laminations paraboliques, *in Integrable systems and foliations*, ed. C. Albert, R. Brouzet, J.-P. Dufour, *Progress in Math.* **145** (1996) 73-91.
- [24] GODBILLON, C.: *Feuilletages*, Progress in Math. **98** Birkhäuser (1991).
- [25] GOODMAN, S.: Closed leaves in foliations of codimension one, *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), no. 3, 383-388.
- [26] GOODMAN, S. & PLANTE, J.: Holonomy and averaging in foliated sets, *J. Diff. Geom.* **14** (1979) 401-407.
- [27] GRIFFITHS, P., HARRIS, J.: *Principles of algebraic geometry*. Reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, (1994).
- [28] GRÜNBAUM, B. & SHEPARD, G.C.: *Tilings and patterns*, Freeman, New York, (1989).
- [29] HAEFLIGER, A.: Deformations of transversely holomorphic flows on spheres and deformations of Hopf manifolds, *Compositio Math.* **55** (1985) 241-251.
- [30] HECTOR, G. & HIRSCH, U.: *Introduction to the geometry of foliations, parts A and B* Aspects of Mathematics, vol E1, E3, Vieweg and Sohn (1983).
- [31] HURDER, S.: The $\bar{\partial}$ -operator, Appendix A of [35].
- [32] LOEB, J.-J. & NICOLAU, M.: Holomorphic flows and complex structures on products of odd dimensional spheres, *Math. Ann.* **306** (1996) 781-817.
- [33] LÓPEZ DE MEDRANO, S. & VERJOVSKY, A.: A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **28** (1997), no. 2, 253-269.
- [34] DE MELO, W. & VAN STRIEN, S.: *One dimensional dynamics*, Springer-Verlag (1993).
- [35] MOORE, C. & SCHOCHET, C.: *Global analysis on foliated spaces*, MSRI Publ. **9**, Springer, NewYork (1990).
- [36] MOSHER, L., OERTEL, U.: Spaces which are not negatively curved. *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no. 1, 67-140.
- [37] PENROSE, R.: *Shadows of the mind*, Oxford University Press (1994).
- [38] PHILLIPS, A. & SULLIVAN, D.: Geometry of leaves, *Topology* **20** (1981) 209-218.
- [39] PLANTE, J.: Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* **102** (1975) 327-361.
- [40] POINCARÉ, H.: Sur les fonctions fuchsienues, *Acta Math.* **1** (1882) 193-294.
- [41] POMMERENKE, C.: *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht (1975).
- [42] ROE, J.: Remark on a paper of E. Ghys "Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional foliations", *J. Func. Anal.* **89** (1990) 150-153.

- [43] SULLIVAN, D.: Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976) 225-255.
- [44] SULLIVAN, D.: Bounds, quadratic differentials and renormalization conjectures, *Mathematics of the twenty-first century*, vol **2**, AMS Centennial Publications, Providence, RI (1991).
- [45] VERJOVSKY, A.: A uniformization theorem for holomorphic foliations, *The Lefschetz centennial conference*, *Contemp. Math.* **58** (1987) 233-253.

Octobre 1997

Unité de Mathématiques
Pures et Appliquées
de l'ENS Lyon
U.M.R. 128 du CNRS

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 FRANCE

ghys@umpa.ens-lyon.fr
