

Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman

La conjecture de Poincaré a résisté 100 ans aux topologues pour céder d'abord aux géomètres, puis aux analystes. Grigori Perelman l'a démontrée en prouvant la conjecture de géométrisation de Thurston. Ces travaux concluent plusieurs siècles d'efforts pour plier l'espace au bon vouloir des mathématiciens.

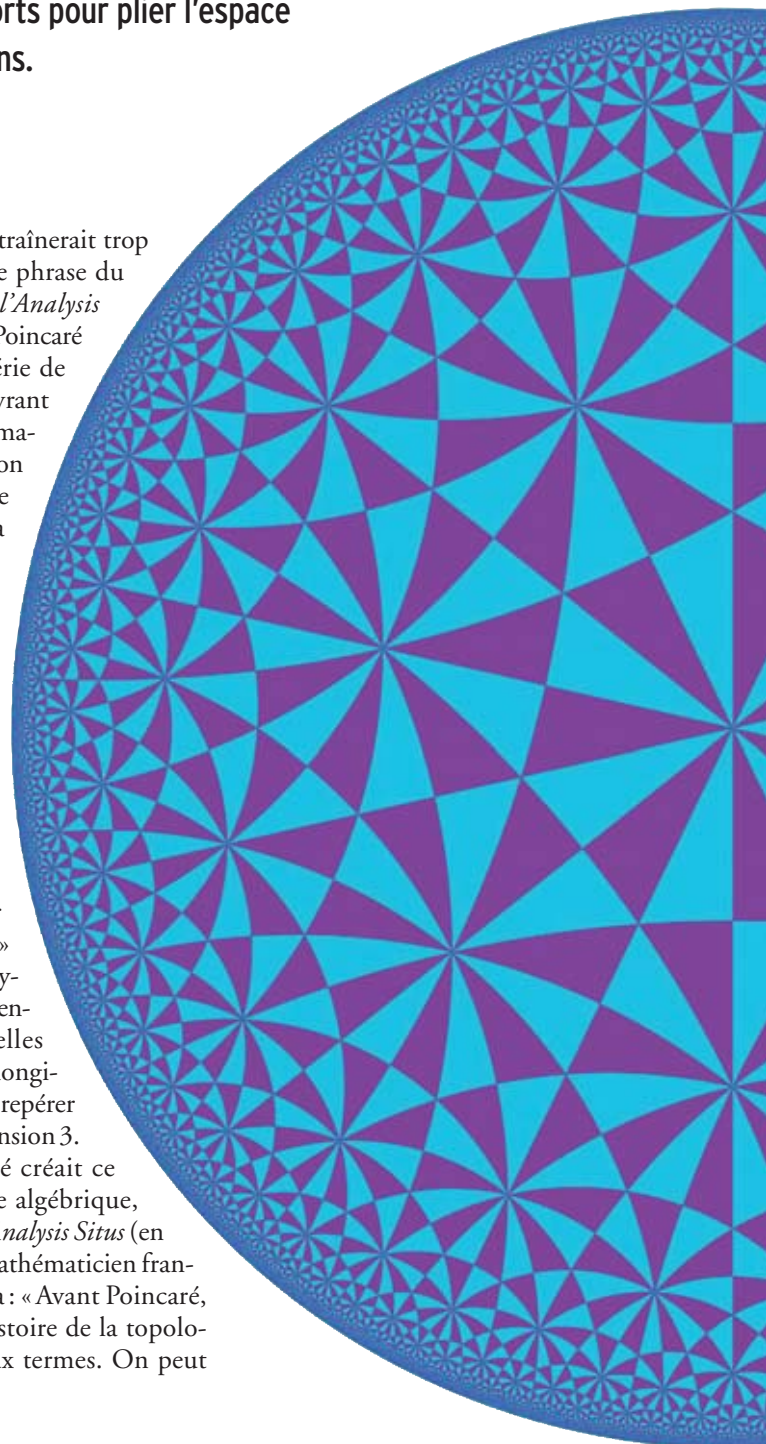
Étienne GHYS, mathématicien, est directeur de recherche CNRS à l'Unité de Mathématiques pures et appliquées (UMPA) de l'École normale supérieure de Lyon. Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques*: <http://images.math.cnrs.fr/> Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

«**M**ais cette question nous entraînerait trop loin. » Telle est la dernière phrase du *cinquième complément à l'Analysis Situs*, publié par le mathématicien Henri Poincaré en 1904. Ce mémoire concluait une série de six articles, commencée en 1895 et couvrant un total de plus de 300 pages de mathématiques ardues. À quelle question fait allusion Poincaré? Celle-ci : « Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe ? » Pour un mathématicien d'aujourd'hui, cette question est incompréhensible, ou plus précisément, elle lui semble complètement évidente ! Il faut dire que la terminologie a changé et que l'on doit comprendre la fin de la phrase ainsi : « et pourtant que V ne soit pas une sphère ». Cette sphère n'est pas l'une de celles auxquelles nous sommes habitués, la surface d'un ballon ou celle de la Terre par exemple, qui sont situées dans « notre » espace à trois dimensions. Il s'agit ici de l'hypersphère située dans l'hyperespace de dimension 4. De même que les sphères usuelles sont de dimension 2, car deux nombres (longitude et latitude) sont nécessaires pour se repérer à leur surface, l'hypersphère est de dimension 3.

Dans cette série d'articles, Poincaré créait ce qu'on nomme aujourd'hui la topologie algébrique, la topologie étant auparavant nommée *Analysis Situs* (en latin, l'analyse des lieux). D'ailleurs, le mathématicien français Jean Dieudonné (1906-1992) écrira : « Avant Poincaré, on devrait seulement parler de la préhistoire de la topologie algébrique. » Définissons ces deux termes. On peut

L'ESSENTIEL

- ➔ En 1904, Poincaré énonce sa conjecture : « Toute variété compacte de dimension 3 est-elle homéomorphe à la sphère ? »
- ➔ Elle fut démontrée en 2003 par Grigori Perelman avec sa preuve de la conjecture de géométrisation.
- ➔ Elle consista à achever le programme de Hamilton fondé sur le flot de Ricci.



déformer le bord d'un carré pour former un cercle : du point de vue topologique, le cercle et le bord d'un carré ont la même forme, ou sont homéomorphes dans le jargon du métier (*voir l'encadré page 58*). En revanche, un cercle et la figure du chiffre 8 sont de natures topologiques différentes : le cercle ne fait qu'une seule boucle et le 8 en fait deux. Pouvez-vous déterminer combien notre alphabet de 26 lettres, en caractères majuscules d'imprimerie, possède de types d'homéomorphismes différents ?

La topologie algébrique, quant à elle, s'efforce d'utiliser l'algèbre pour comprendre la topologie. L'une des contributions de Poincaré consiste à associer un « groupe fondamental », de nature algébrique (*voir l'encadré page 58*) à un « espace topolo-

gique ». La question de Poincaré s'éclaire : la sphère est-elle caractérisée par son « groupe fondamental » ? Ou bien encore, avec les termes mathématiques consacrés (*voir l'encadré page 58*), la question de Poincaré devient : « Toute variété compacte de dimension 3 simplement connexe est-elle homéomorphe à la sphère ? »

Cette question, connue sous le nom de *Conjecture de Poincaré*, a résisté aux assauts des mathématiciens pendant près d'un siècle. Elle fut démontrée en 2003 par le Russe Gregori Perelman, ce qui lui valut la médaille Fields en 2006, médaille qu'il refusa. La conjecture avait été mise à prix par l'Institut mathématique Clay pour une valeur d'un million de dollars... que G. Perelman refusa aussi.

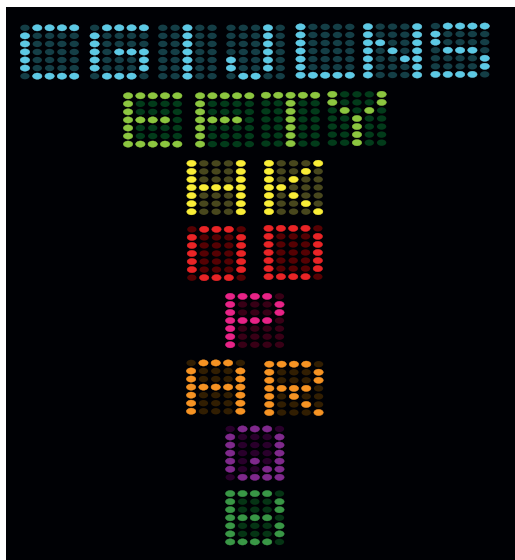
Honneurs et transmission

Perelman ne se contenta pas de décliner les récompenses, il se détourna également des canaux officiels de publication : son théorème fut mis à la disposition de tous *via* Internet et ne fut pas publié dans un journal mathématique. Pourtant, nombreux sont les mathématiciens qui ont lu et vérifié les détails de la preuve. Ce faisant, G. Perelman nous interpelle sur le rôle des honneurs en mathématiques, mais également sur les modes de transmission des résultats. Avec ses articles, G. Perelman concluait une longue série de travaux, qui remontent au moins à Gauss, en prouvant la conjecture de géométrisation de Thurston, elle-même issue

LA GÉOMÉTRIE DE LA SURFACE DE RIEMANN (*à droite*) définie par l'équation polynomiale $x^3y + y^3 + x = 0$, où x et y sont des nombres complexes est une géométrie hyperbolique dont le disque de Poincaré (*à gauche*) est une représentation conforme : les formes infinitésimales sont respectées. C'est un exemple d'uniformisation pour des espaces à deux dimensions. Quand on l'applique pour des espaces à trois dimensions, on se confronte à la conjecture de Poincaré.



DES LETTRES sont homéomorphes quand l'une peut se transformer en l'autre. Ainsi, la lettre C s'obtient en courbant un I. De même, on transforme un E en un F en faisant pivoter son segment inférieur. Mais on ne peut transformer un O en un B: l'un contient une boucle et l'autre deux. À partir des 26 lettres de l'alphabet, on obtient huit ensembles homéomorphes.



ABÉCÉDAIRE DE LA TOPOLOGIE

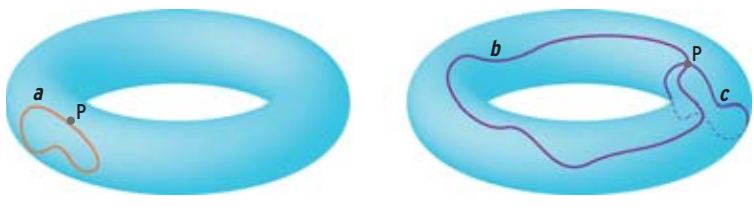
En topologie, deux formes sont **homéomorphes**, donc topologiquement équivalentes, quand on peut déformer l'une en l'autre. Ainsi, une tasse à café (avec anse) et une chambre à air sont homéomorphes. Formellement, pour montrer que deux espaces E_1 et E_2 sont homéomorphes, on doit établir une bijection entre les points de E_1 et E_2 : à chaque point de E_1 correspond un point de E_2 et un seul et réciproquement. Cette bijection entre E_1 et E_2 doit être continue dans les deux sens (de E_1 vers E_2 et inversement).

Un espace est une **variété** de dimension n quand tous ses points ont un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n (l'espace euclidien de dimension n). Par exemple, la sphère usuelle est une variété de dimension 2 (une surface), car au voisinage de chacun de ses points, on peut se repérer par deux nombres. Les lettres O et D sont des variétés de dimension 1 alors que les autres lettres de l'alphabet ne sont pas des variétés. Le Y par exemple a un point particulier, d'où partent trois branches, qui n'a pas de voisinage homéomorphe à la droite \mathbb{R} .

Un espace est dit **compact** quand il ne contient aucune suite de points qui « file à l'infini ». Ainsi, une droite n'est pas compacte, car la suite $0, 1, 2, 3, \dots$ part à l'infini. En revanche, une sphère est compacte.

Un **lacet** est un chemin fermé, par exemple celui décrit par un point qui fait le tour de l'équateur sur la Terre. Un espace est **simplement connexe** lorsque tout lacet peut être déformé continûment pour se réduire à un seul point: l'équateur peut se déformer à travers les parallèles pour se rétrécir et se réduire à un des pôles. Les sphères de dimension 2, 3... sont simplement connexes, à l'inverse du cercle qui n'est qu'une sphère de dimension 1: un lacet qui fait un tour autour du cercle ne peut pas être déformé pour se réduire à un point.

Le **groupe fondamental** est un concept algébrique introduit par Poincaré. Deux lacets sont dits homotopes quand on peut déformer continûment l'un en l'autre. Ainsi, sur un tore (*ci-dessous*), à partir d'un point de départ P, on peut construire différents types de lacets (*à gauche, a; à droite, b et c*) qui ne sont pas homotopes. En identifiant les lacets homotopes, en les mettant bout à bout, Poincaré construit un « groupe » associé à l'espace étudié, c'est le groupe fondamental.



du théorème d'uniformisation démontré en 1907 par Paul Koebe et Poincaré. Nous aborderons ces différentes étapes qui jalonnent l'histoire de la conjecture de Poincaré, le désormais théorème de Perelman. Elle s'inscrit dans le cadre plus large de la géométrisation de l'espace.

Commençons au... II^e siècle avant notre ère. Hipparque (-190-120) et, trois siècles plus tard, Ptolémée (90-168) seraient parmi les premiers à s'être posés la question de la « représentation » la plus précise possible du ciel étoilé ou de la surface de la Terre sur un plan. Ce sont les débuts de la cartographie scientifique. La projection stéréographique est l'une des méthodes introduites à cette époque: tout point de la Terre, à l'exception du pôle Nord, peut être joint au pôle Nord par une droite qui coupe un plan, parallèle au plan équatorial, en un autre point qui est sa projection. On peut ainsi représenter toute la sphère, à l'exception du pôle Nord, sur la surface d'un plan.

De Hipparque à Gauss

Cette projection ne respecte pas les distances, c'est-à-dire la géométrie, la métrique. En revanche, quand on se concentre sur de petites zones, la forme est respectée; on dit que la projection est conforme. Précisément, une zone infiniment petite de la sphère peut être dilatée ou comprimée, mais elle l'est de la même façon dans toutes les directions. La projection se comporte comme une similitude au niveau infinitésimal.

Une vingtaine de siècles plus tard, nous retrouvons Carl Friedrich Gauss (1777-1855). En 1818, le mathématicien allemand se voit confier la mission de cartographier le royaume de Hanovre: il chevauche la campagne, recrute des ouvriers, cherche de l'argent... c'est l'occasion pour lui de réfléchir aux erreurs de mesure, de perfectionner la méthode des triangulations, d'inventer de nouveaux instruments de mesures topographiques, mais aussi de méditer sur la géométrie, sur l'espace, de deviner l'existence des géométries non euclidiennes, d'utiliser pour la première fois les nombres complexes dans un contexte géométrique.

Un seul théorème de Gauss nous intéresse ici, celui de la représentation conforme locale. Que dit-il? Supposons une Terre dont la forme n'est pas sphérique, mais *a priori* quelconque et, sur cette surface, prenons un petit pays, la France, par exemple. Gauss démontre qu'il est toujours possible de représenter ce pays dans un plan de façon conforme (en respectant la forme des zones de taille infinitésimales). Pour une Terre sphérique, la projection stéréographique fait l'affaire, mais pour une Terre quelconque, c'est un tour de force!

L'une des grandes idées dans la preuve est d'utiliser les nombres complexes géométriquement pour décrire un point du plan. C'est une évidence aujourd'hui pour un lycéen : on peut repérer un point du plan, de coordonnées (x, y) par un seul nombre complexe ($z = x + iy$). Cependant, au début du XIX^e siècle, les nombres complexes sont encore mystérieux et bien éloignés du réel.

Le théorème local de Gauss permet de repérer localement un point sur une surface quelconque par un nombre complexe. La dimension *deux* réelle a ainsi été réduite à la dimension *un* complexe. Les surfaces deviennent donc des courbes (des objets localement décrits par un seul nombre) complexes.

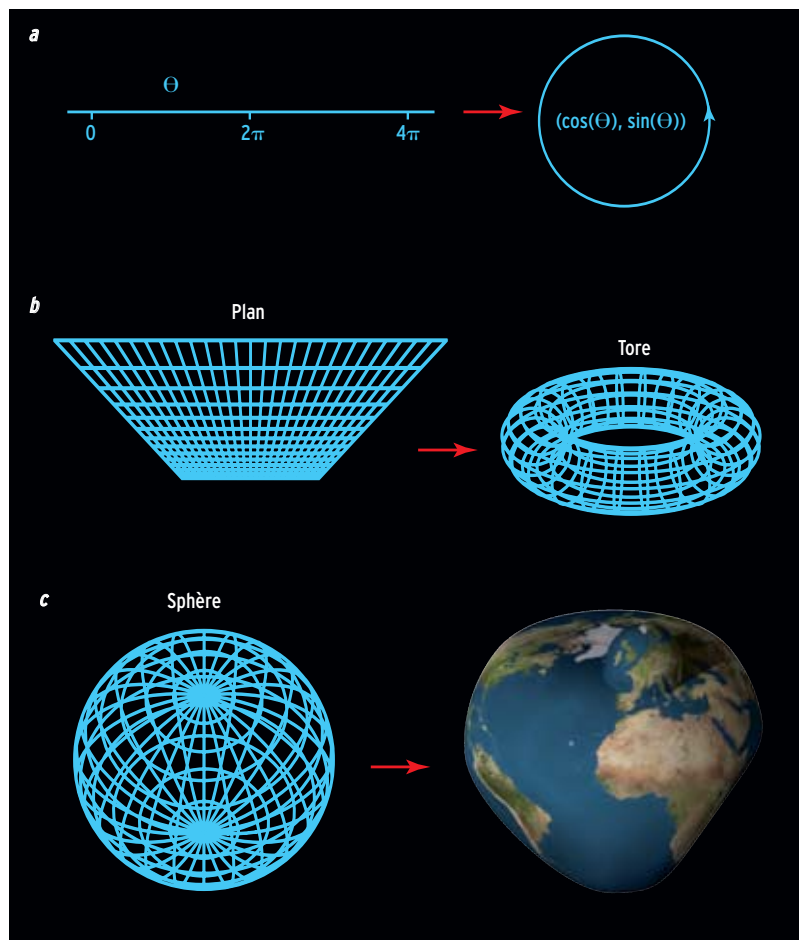
Quand les courbes deviennent des surfaces

Le pas suivant, qui nous conduit vers la démonstration de Perelman, a été accompli par le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866). L'une de ses contributions, qui a bouleversé la géométrie algébrique, a été en quelque sorte de faire fonctionner la machine à l'envers : il a considéré les courbes comme des surfaces ! Une courbe algébrique est une courbe du plan qui est définie par une équation polynomiale, par exemple $x^3y + y^3 + x = 0$. Riemann propose de voir dans x et y des nombres complexes, chacun avec sa partie réelle et imaginaire. Le plan (x, y) devient un espace à quatre dimensions et la courbe définie par le polynôme devient surface à deux dimensions (voir la figure page 57).

La surface obtenue, beaucoup plus intéressante que la courbe initiale, est dotée d'une topologie très riche : par exemple, la surface définie par le polynôme précédent a 168 symétries. Les courbes algébriques, aujourd'hui nommées surfaces de Riemann sont parmi les plus beaux objets mathématiques.

Avant d'énoncer le théorème d'uniformisation de Poincaré, revenons à Gauss. Dans ses méditations sur la géométrie de la sphère, il savait que dans un triangle sphérique la somme des trois angles ne vaut pas 180 degrés, comme dans le cas d'un triangle du plan usuel, mais qu'elle est supérieure, la différence correspondant à l'aire du triangle.

Par une intuition géniale, Gauss devine l'existence d'une surface, en quelque sorte duale de la sphère, où la somme des angles d'un triangle est cette fois inférieure à 180 degrés, et pour laquelle l'écart à 180 degrés est encore égal à l'aire du triangle. Cette surface est aujourd'hui nommée plan non euclidien, ou hyperbolique. Elle a d'abord été pensée comme un être mathématique abstrait, puis a pris une existence concrète dans la deuxième moitié du XIX^e siècle. Ainsi, à cette époque, on dispose de trois



modèles géométriques : le plan euclidien, mais aussi la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique.

Ces trois géométries sont omniprésentes et permettent de comprendre toutes les surfaces. C'est le sens du théorème d'uniformisation selon lequel toute surface peut être uniformisée par l'une des trois géométries (euclidienne, sphérique ou hyperbolique). La démonstration de ce théorème a nécessité un long processus de maturation. Koebe et Poincaré ont obtenu simultanément et indépendamment la première preuve générale (et convaincante) en 1907.

L'uniformisation

Un exemple d'abord : lorsqu'on décrit un cercle avec les fonctions *sinus* et *cosinus*, c'est-à-dire en « emboîmant » une droite autour d'un cercle, on a uniformisé le cercle par la droite (voir la figure ci-dessus). De la même façon, une surface qui a la topologie d'un tore peut être uniformisée par un plan euclidien. En général, uniformiser une surface consiste à trouver une projection (on parle de revêtement) qui, à partir soit de la sphère, soit du plan euclidien, soit du plan hyperbolique, conduit vers la surface donnée. Cette projection doit être localement conforme, comme l'est la projection stéréographique : les formes infinitésimales sont respectées.

L'UNIFORMISATION consiste à trouver une projection localement conforme (les formes infinitésimales sont respectées) entre une surface donnée et un modèle de géométrie (euclidienne, sphérique ou hyperbolique). Par exemple, un cercle défini par les fonctions *sinus* et *cosinus* est uniformisé par une droite (a). Un tore est uniformisé par le plan euclidien (b). Une Terre patatoïdale est uniformisée par une sphère (c).

Ainsi, la courbe algébrique précédente ($x^3y + y^3 + x = 0$) peut être uniformisée par un plan hyperbolique (voir la figure page précédente). Ou encore, une surface qui a la topologie d'une sphère peut être uniformisée par une sphère. En parti-

La conjecture de Poincaré n'est qu'un « petit » cas particulier de la conjecture de Thurston, celui où la variété est simplement connexe.

culier, le théorème d'uniformisation va plus loin que le théorème local de Gauss en affirmant que toute « Terre de forme patatoïdale » peut être cartographiée globalement par une sphère. Au final, grâce au théorème d'uniformisation de Koebe-Poincaré, on peut comprendre la géométrie de toutes les surfaces à l'aide de trois modèles seulement (sphérique, euclidien et hyperbolique). Tout le XIX^e siècle aura été nécessaire pour comprendre les surfaces, c'est-à-dire les objets de dimension 2 ; tout le XX^e siècle le sera pour faire de même avec les objets de dimension 3 !

Dans les années 1970 et 1980, le mathématicien américain William Thurston prend conscience que beaucoup d'espaces à trois dimensions peuvent être géométrisés, tout comme les surfaces. De même que la géométrie euclidienne plane a deux « sœurs », la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, la géométrie euclidienne en trois dimensions est aussi membre d'une fratrie, mais elle est plus nombreuse. Outre les géométries sphérique et hyperbolique (analogues à celles de dimension 2), on compte cinq autres géométries, dites géométries de Thurston. Elles sont notées $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$, $SL_2(\mathbb{R})$, Nil et Sol .

W. Thurston commence par étudier un grand nombre d'exemples d'espaces à trois dimensions et constate que tous peuvent être décrits par ces huit géométries. Il compile des atlas, encourage ses étudiants à établir des banques de données informatiques. Son approche est très concrète, presque « expérimentale », ce qui est rare en mathématiques !

En 1976, il formule sa conjecture de géométrisation selon laquelle, en termes simplifiés, toute variété compacte de dimension 3 peut être munie d'une métrique qui est localement isométrique à l'une des huit géométries de Thurston. Plus précisément, on devrait parler de « variétés compactes, asphériques et atoroidales », mais retenons que cette conjecture exprime le fait que les espaces de dimension 3 peuvent être « géométrisés ». La topologie des espaces est ainsi réduite à la géométrie.

Chirurgie dans l'espace

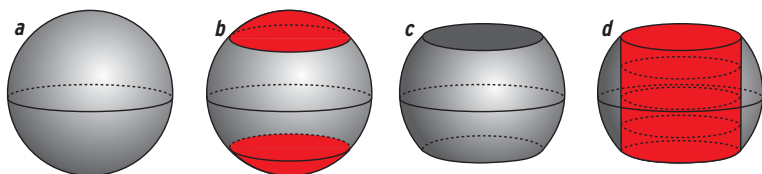
Toutefois, W. Thurston ne s'en tient pas à énoncer sa conjecture ; il la démontre dans de nombreux cas significatifs, ces travaux lui valant la médaille Fields en 1983. Le mathématicien américain est avant tout un géomètre et un topologue, et ses outils sont ceux de sa discipline. Il utilise notamment la chirurgie, un ensemble de méthodes qui permet de « découper » des espaces (des variétés) et de les « recoller » afin de mieux les comprendre (voir l'encadré ci-contre).

Dans ce cadre, la conjecture de géométrisation peut s'exprimer ainsi : « Toute variété compacte de dimension 3 peut être découpée selon des tores et des sphères de dimension 2 afin d'obtenir des sous-variétés géométrisables par l'une des huit géométries de Thurston. »

La conjecture de Poincaré ne devient qu'un « petit » cas particulier de la conjecture de Thurston, celui où la variété est simplement connexe. Et tout semblait indiquer que la preuve de la conjecture allait être de nature topologique, fondée sur la chirurgie...

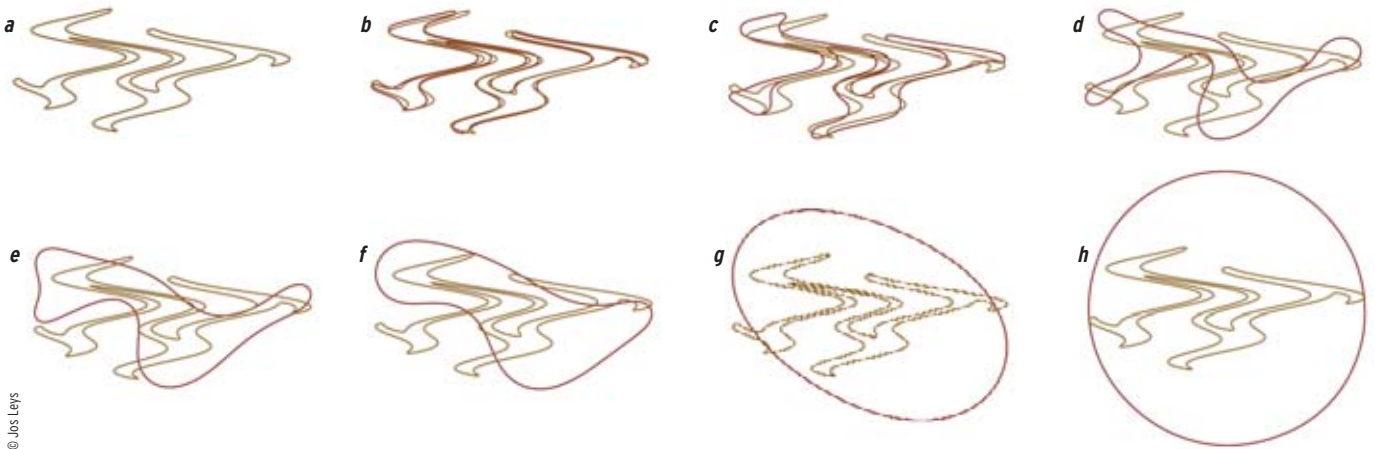
UN PEU DE CHIRURGIE ?

En topologie, la chirurgie consiste à couper et coller ! Prenons par exemple une simple sphère (ci-dessous, a). On évide d'abord soigneusement deux trous en forme de disque (b) de façon à obtenir une surface dont le bord est constitué de deux cercles (c). Un tronc de cylindre a aussi deux cercles dans son bord : on peut donc recoudre les deux cercles du cylindre le long des deux cercles correspondant aux bords des disques évidés. Le résultat est (homéomorphe à) un tore (d). Le tore a ainsi été obtenu par chirurgie à partir d'une sphère.



Quand on pratique une chirurgie sur un tore, en recollant un tronc de cylindre comme précédemment, on obtient la surface d'une chambre à air à deux trous, aussi nommée surface de genre 2 (ci-contre). En continuant ainsi, on fabrique des surfaces de genre 3, 4, etc. L'un des théorèmes les plus importants de la topologie est que toutes les surfaces peuvent être obtenues (topologiquement) par ce procédé chirurgical. La chirurgie sur les espaces de dimension supérieure à 3 est notablement plus difficile, mais le principe est le même. En coupant et en collant des « tubes » assez simples, on espère décrire le plus grand nombre d'espaces topologiques.





© Jus Leys

Pourtant, en 2003, un coup de tonnerre retentit dans le monde de la topologie, avec l'entrée en scène de G. Perelman. Il est analyste, un spécialiste des équations aux dérivées partielles, un sujet que beaucoup de topologues avaient l'habitude de regarder de loin. Ils ont changé d'avis depuis !

G. Perelman a poursuivi et mené à son terme le programme lancé par Richard Hamilton en 1982. L'idée du mathématicien américain est fondée sur le flot de Ricci, une équation d'évolution qui tend à homogénéiser la métrique. Prenez une variété de dimension 3, et choisissez une métrique quelconque sur cet espace. Cette métrique n'est pas l'une des huit de Thurston, car elle n'est pas nécessairement homogène : elle peut être plus courbée en certains endroits que d'autres, par exemple. L'évolution d'évolution correspondant au flot de Ricci et appliquée à l'espace donné peut s'imaginer comme une sorte de « chauffage » pendant lequel on laisse diffuser la métrique. Cette dernière atteint alors une espèce de position d'équilibre thermique qui, on l'espère, sera une des huit métriques de Thurston.

Arrondir les courbes

Un théorème récent, dû à Michael Gage, Matthew Grayson et R. Hamilton, illustre la méthode. Comment peut-on arrondir une courbe quelconque dans le plan ? Un moyen simple d'y parvenir est de la « pousser » dans le sens de sa courbure (voir la figure ci-dessus). Vous poussez tous les points dans le sens de la convexité, peu quand c'est peu courbé et beaucoup lorsque c'est beaucoup courbé. En appliquant cette recette en continu, à mesure que la courbe se déforme, le théorème de Gage-Grayson-Hamilton affirme que la courbure s'équilibre et que la courbe tend à devenir un cercle. Le scénario décrit semble évident, mais ce n'est pas le cas. Pourquoi par exemple la courbe ne développerait-elle pas des points doubles ?

Justement, c'est là que le bât blessait dans le programme de Hamilton. Lorsque le flot évolue, la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme. En certains points de la variété, la courbure peut s'accumuler et devenir infinie ; les mathématiciens disent qu'elle explose !

G. Perelman a décrit pour le flot de Ricci comment apparaissent les singularités et comment on peut les classer. Fort de cette information, il est alors en mesure de construire, à partir du flot de Ricci, un autre flot débarrassé des singularités à l'aide d'actes de chirurgie. Ainsi s'achève le programme de Hamilton... La conjecture de géométrisation est donc démontrée, et avec, la conjecture de Poincaré.

Généralisons les conjectures !

Pourquoi se limiter à la dimension 3 ? De fait, des conjectures analogues à celles de Poincaré dans d'autres dimensions peuvent être construites sur le même modèle. Étonnamment, seul le cas $n = 3$, c'est-à-dire la conjecture de Poincaré résistait. La conjecture pour $n = 2$, c'est-à-dire pour les surfaces, était bien connue pour Poincaré, même si, pour en avoir une démonstration complète, il fallut attendre les années 1920... En 1961, Stephen Smale prouve la conjecture, par des méthodes de chirurgie, pour les dimensions supérieures ou égales à 7. Puis en 1962, les cas $n = 5$ et 6 sont résolus par Erik Zeeman et John Stallings par des méthodes similaires. Le cas de la dimension $n = 4$ fut démontré par Michael Freedman par une approche complètement différente. Et enfin, G. Perelman complétait le tableau en 2003...

Remarquons pour conclure que la démonstration de la conjecture de Poincaré, conséquence de celle de la conjecture de Thurston, est un bel exemple d'un cas fréquent en mathématiques. Pour résoudre un problème, on doit parfois trouver la solution d'un autre plus difficile encore. ■

UNE COURBE (a, en marron) que l'on « pousse » dans le sens de la convexité (de b à h, la courbe évoluant est en rouge) tend à devenir un cercle (h). Ce processus illustre l'idée de flot de Ricci, ce dernier étant une équation d'évolution qui tend à homogénéiser la métrique. L'analyse de ce flot de Ricci a permis à G. Perelman de prouver la conjecture de Poincaré.

livres

- H. P. de SAINT GERVAIS, *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*, ENS Editions 2011
- G. SZPIRO, *La conjecture de Poincaré : Comment Grigori Perelman a résolu l'une des plus grandes énigmes mathématiques*, J. C. Lattes, 2007.

internet

- L. BESSIÈRES, G. BESSON et M. BOILEAU, *La preuve de la conjecture de Poincaré* : <http://images.math.cnrs.fr/La-preuve-de-la-conjecture-de.html>
- Les articles de G. PERELMAN : http://arxiv.org/find/math/1/au:+Perelman_Grisha/0/1/0/all/0/1
- Le 5^e complément de Poincaré : <http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/pdf/hp1904rp.pdf>