À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes

par **Étienne GHYS**

Dans un article intitulé "*Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique*", J.-P. Jouanolou considère un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur une variété analytique complexe compacte connexe X et s'intéresse au problème de la finitude du nombre de feuilles fermées de $\mathcal{F}$ (voir [5]). Sous certaines hypothèses sur X, il établit que $\mathcal{F}$ ne possède qu'un nombre fini de feuilles fermées sauf si $\mathcal{F}$ possède une intégrale première méromorphe, auquel cas toutes les feuilles sont fermées. Les hypothèses sur X sont d'une part que toute 1-forme holomorphe est fermée et d'autre part qu'une certaine flèche provenant de la suite spectrale de Hodge est nulle. La théorie de Hodge montre que ces hypothèses sont satisfaites si la variété X est algébrique projective. Dans son rapport sur cet article, H. Cartan remarque que l'hypothèse sur les 1-formes est inutile et il corrige par ailleurs une légère lacune dans la preuve [1].

L'objet de cette courte note est de montrer qu'en présentant les mêmes arguments dans un ordre légèrement différent, on peut s'affranchir de toute hypothèse sur la variété ambiante (tout en simplifiant la preuve).

Théorème : *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe (éventuellement singulier) de codimension 1 sur une variété analytique complexe compacte connexe. Alors $\mathcal{F}$ ne possède qu'un nombre fini de feuilles fermées sauf si $\mathcal{F}$ possède une intégrale première méromorphe, auquel cas toutes les feuilles sont fermées.*

Commençons par quelques notations et définitions. On désignera par X une variété analytique complexe compacte connexe, par $\mathcal{O}$ son faisceau structural, par $\mathcal{O}^\star$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas et par Ω^p le faisceau des germes de p-formes holomorphes. Un *feuilletage holomorphe* $\mathcal{F}$ sur X est donné par :

- un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X,

- une 1-forme holomorphe ω_i sur chaque U_i qui est intégrable (*i.e.* telle que $d\omega_i \wedge \omega_i = 0$). On peut toujours supposer que le lieu singulier de ω_i est de codimension au moins 2.

- une fonction holomorphe g_{ij} qui ne s'annule pas, sur chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$, de telle sorte que sur cette intersection on ait $\omega_i = g_{ij}\omega_j$.

Les fonctions g_{ij} définissent un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X et la donnée des ω_i peut alors s'interpréter comme celle d'une 1-forme holomorphe globale $\omega \in H^0(X, \Omega^1 \otimes \mathcal{L})$ sur X à valeurs dans le fibré $\mathcal{L}$.

Le *lieu singulier* $Sing(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ est donné localement par le lieu singulier des ω_i : c'est un fermé dans X, de codimension au moins 2. Dans l'ouvert complémentaire, $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier au sens habituel ; les feuilles de $\mathcal{F}$ sont par définiton celles de ce feuilletage régulier. Une *feuille fermée* de $\mathcal{F}$ est par définition une feuille de $\mathcal{F}$ qui est fermée dans l'ouvert $X \setminus Sing(\mathcal{F})$. L'adhérence dans X d'une telle feuille est un diviseur de X (voir le théorème de Borel-Stein cité dans l'article de J.-P. Jouanolou).

Une *intégrale première méromorphe* est une fonction méromorphe non constante qui est constante sur les feuilles. Si une telle intégrale première existe toutes les feuilles sont fermées.

Soit Div le groupe abélien des diviseurs qui sont tangents au feuilletage étudié. Les éléments de Div s'écrivent sous la forme $\sum_\alpha \lambda^\alpha L^\alpha$ où $\lambda^\alpha \in \mathbf{Z}$ et L^α est l'adhérence dans X d'une feuille fermée. Nous cherchons donc à montrer que Div est de type fini sauf si $\mathcal{F}$ possède une intégrale première méromorphe.

Soit $Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}^\star)$ le groupe de Picard de X (formé des classes d'isomorphismes des fibrés en droites au dessus de X). L'application associant un fibré à un diviseur donne un homomorphisme $Div \to Pic(X)$.

Soit Ω^1_f le faisceau des germes de 1-formes holomorphes fermées sur X. La dérivée logarithmique $g \mapsto d\ln g$ définit un homomorphisme de $Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}^\star)$ vers $H^1(X, \Omega^1_f)$. On remarquera que $H^1(X, \Omega^1_f)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie comme il résulte de la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{O} \to \Omega^1_f \to 0$.

Considérons maintenant l'homomorphisme composé $Div \to H^1(X, \Omega^1_f)$ et étudions le noyau Div_0 de l'application $\mathbf{C}$-linéaire $Div \otimes \mathbf{C} \to H^1(X, \Omega^1_f)$ obtenue en tensorisant par $\mathbf{C}$. Un élément x de Div_0 est de la forme $\sum_\alpha \lambda^\alpha L^\alpha$ où $\lambda^\alpha \in \mathbf{C}$ et les L^α sont les adhérences de feuilles fermées distinctes. Choisissons un recouvrement ouvert (U_i) de X suffisamment fin pour que dans chaque U_i :

- le feuilletage est défini par une forme ω_i,

- chaque diviseur L^α est défini par une équation holomorphe $f_i^\alpha = 0$,

et pour que dans chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$, on dispose de fonctions holomorphes g_{ij} et g_{ij}^α qui ne s'annulent pas et telles que $\omega_i = \omega_j g_{ij}$ et $f_i^\alpha = g_{ij}^\alpha f_j^\alpha$.

Dire que x est dans Div_0 signifie que, quitte à restreindre encore les U_i, il existe des 1-formes fermées holomorphes v_i sur U_i de telle sorte que :

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha \frac{dg_{ij}^\alpha}{g_{ij}^\alpha} = v_j - v_i.$$

Cela signifie que :

$$v_i + \sum_\alpha \lambda^\alpha \frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha} = v_j + \sum_\alpha \lambda^\alpha \frac{df_j^\alpha}{f_j^\alpha}.$$

Autrement dit, ces 1-formes *méromorphes* sur les U_i sont compatibles sur les intersections. On obtient donc une 1-*forme fermée méromorphe globale* ξ sur X. La construction montre que ξ est bien définie à l'addition près d'une 1-forme fermée *holomorphe* globale η.

Considérons maintenant le produit extérieur $\omega \wedge \xi$ où ω désigne toujours la forme holomorphe à valeurs dans le fibré en droites $\mathcal{L}$ qui définit le feuilletage. Puisque les df_i^α / f_i^α présentent des pôles simples le long des diviseurs L^α et que, par définition, la forme ω est nulle sur les L^α, le produit $\omega \wedge \xi$ est une 2-forme *holomorphe* à valeurs dans le fibré $\mathcal{L}$. Cette 2-forme est bien définie modulo une 2-forme du type $\omega \wedge \eta$ avec η holomorphe et fermée. En résumé, nous avons construit une application linéaire :

$$u : Div_0 \to H^0(X, \Omega^2 \otimes \mathcal{L})/\omega \wedge H^0(X, \Omega_f^1)$$

dont le but est bien sûr de dimension finie.

Supposons maintenant que le feuilletage $\mathcal{F}$ possède des feuilles fermées en nombre supérieur à

$$\dim_{\mathbf{C}} H^1(X, \Omega_f^1) + \dim_{\mathbf{C}}(H^0(X, \Omega^2 \otimes \mathcal{L})/\omega \wedge H^0(X, \Omega_f^1)) + 2.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ possède une intégrale première méromorphe. Ceci établira le théorème.

D'après notre hypothèse sur le nombre de feuilles fermées, la dimension de Div_0 est au moins $\dim_{\mathbf{C}}(H^0(X, \Omega^2 \otimes \mathcal{L})/\omega \wedge H^0(X, \Omega_f^1)) + 2$ et le noyau de u est donc de dimension au moins 2, en particulier non trivial. On peut donc trouver des diviseurs $L^1, \ldots, L^k$ ($k \geq 1$), adhérences de feuilles fermées distinctes, et des nombres complexes non nuls $\lambda^1, \ldots, \lambda^k$ tels que :

- $\sum_{\alpha=1}^k \lambda^\alpha L^\alpha \in Div_0$
- l'image de $\sum_{\alpha=1}^k \lambda^\alpha L^\alpha$ dans $H^0(X, \Omega^2 \otimes \mathcal{L})/\omega \wedge H^0(X, \Omega_f^1)$ est nulle.

D'après la seconde propriété, on peut choisir les v_i de telle sorte que la forme $\omega \wedge \xi$ est identiquement nulle. Autrement dit, nous avons trouvé une forme méromorphe fermée globale ξ qui définit le feuilletage $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire qui est nulle sur les feuilles). Il faut s'assurer que ξ n'est pas identiquement nulle. Cela résulte du fait que si l'on restreint ξ à une petite transversale au feuilletage en un point régulier de L^α, on obtient une forme méromorphe dont le résidu au point singulier est exactement $\lambda^\alpha \neq 0$.

Si deux éléments du noyau de u mènent à la même forme ξ modulo $H^0(X,\Omega^1_f)$, ils sont égaux car la remarque précédente montre qu'on peut retrouver les L^α comme les pôles de ξ et les λ^α comme les résidus de ξ. Puisque la dimension du noyau de u est au moins 2, on peut donc trouver deux formes méromorphes fermées ξ_1 et ξ_2 qui définissent le feuilletage et qui ne sont pas proportionnelles. Il existe donc une fonction méromorphe non constante f telle que $\xi_1 = f\xi_2$. Cette fonction méromorphe f est l'intégrale première cherchée. En effet, puisque ξ_1 et ξ_2 sont fermées, on a $df \wedge \xi_2 = 0$ et donc $df \wedge \omega = 0$, c'est-à-dire que f est bien constante sur les feuilles. Ceci termine la démonstration du théorème.

Nous terminons par quelques remarques, exemples et questions.

1) Dans [2], M. Deschamps esquisse également une démonstration du théorème de J.-P. Jouanolou dans le cas des *surfaces algébriques*. Dans [4], M. Kim donne une version valable pour les variétés algébriques sur un corps de *caractéristique non nulle*.

2) *Pour chaque entier $n \geq 1$, il est facile de construire un feuilletage non singulier $\mathcal{F}_n$ sur une surface complexe compacte connexe qui possède exactement n feuilles compactes.* Il suffit de choisir n points distincts dans $\mathbf{C}$ et n nombres complexes $\beta_1, \dots \beta_n$ non nuls et de somme nulle, et de considérer la forme méromorphe

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{x - x_i})\, dx + dy$$

dans $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Cette forme définit un feuilletage non singulier qui se prolonge en un feuilletage non singulier sur le produit $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{C}$, invariant par les translations "verticales" sur le second facteur. On peut donc passer au quotient par un certain réseau de $\mathbf{C}$ pour obtenir un feuilletage non singulier $\mathcal{F}_n$ sur un produit $\mathbf{CP}^1 \times C$ où C est une courbe elliptique. Ce feuilletage possède exactement n feuilles compactes, correspondant aux valeurs $x_1, \dots, x_n$ de la variable x. La condition sur la somme des coefficients n'a été imposée que pour s'assurer que le point à l'infini de $\mathbf{CP}^1$ ne crée pas de nouvelle feuille compacte.

3) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage *non singulier* sur une variété complexe compacte X. Un *ensemble minimal* $M \subset X$ est un ensemble fermé non vide qui est une réunion de feuilles et qui est minimal pour ces propriétés. Un exemple simple est bien sûr une feuille compacte. *Nous ignorons si un feuilletage non singulier de codimension 1 sur une variété compacte X peut posséder une infinité d'ensembles minimaux autres que des feuilles compactes.* L'énoncé correspondant pour les feuilletages de codimension 1 *réelle* sur des variétés différentiables est connu mais sa preuve utilise fortement la structure d'ordre sur une transversale, qui est un intervalle.

4) Nous ignorons si un feuilletage *transversalement* holomorphe de codimension complexe 1 sur une variété différentiable compacte connexe peut posséder un nombre infini de feuilles compactes sans que toutes les feuilles soient compactes.

5) *Il existe des feuilletages holomorphes de codimension 1, non singuliers, sur des* *variétés* non compactes*, qui possèdent des feuilles compactes non isolées, c'est-à-dire accumulées par d'autres feuilles compactes (sans que toutes les feuilles ne soient compactes).* Voici un exemple. Soit $f(z) = \exp(2i\pi\theta)z + z^2$. Il est bien connu qu'on peut choisit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ de telle sorte que le germe de f au voisinage de l'origine possède une infinité dénombrable d'orbites périodiques, s'accumulant sur l'origine, dont les périodes tendent bien sûr vers l'infini (voir par exemple [6]). Soit $F : (\zeta, z) \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C} \mapsto (2\zeta, f(z)) \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}$. On remarque qu'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbf{C}^\star \times \{0\}$ dans $\mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}$ qui est invariant par F et sur lequel F induit un biholomorphisme agissant de manière propre et libre. Le quotient de U par F est une surface complexe X non compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ provenant du feuilletage $z = Const$ (qui est invariant par F). Par passage au quotient, $\mathbf{C}^\star \times \{0\}$ donne une feuille compacte C (qui est une courbe elliptique). De même, chaque point périodique du germe de f donne une feuille compacte de $\mathcal{F}$. On obtient ainsi une infinité dénombrable de feuilles compactes qui s'accumulent sur C.

6) Il est possible de construire des *exemples de feuilletages holomorphes non singuliers,* de codimension supérieure ou égale à 2*, sur des variétés compactes, dont la réunion des feuilles compactes n'est pas fermée.* Les exemples les plus frappants sont obtenus en considérant un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ tel que le quotient $X = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ soit compact. L'action du sous-groupe diagonal de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ (isomorphe à $\mathbf{C}^\star$) par translations à gauche sur cet espace homogène donne un feuilletage holomorphe de dimension 1 sur X. Il est bien connu que cette action possède une infinité dénombrable d'orbites compactes dont la réunion est dense dans X (voir par exemple [3]). La variété X n'est pas algébrique (ni même kählérienne). Nous ne connaissons pas d'exemple de cette nature sur une variété algébrique.

Bibliographie

[1] Cartan, H.: Mathematical reviews 58 1274

[2] Deschamps, M.: Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général [d'après F.A. Bogomolov], Séminaire Bourbaki, exposé 519, juin 1978, Lecture Notes in Mathematics **710**, Springer (1979).

[3] Ghys, E.: Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, *J. Reine Angew. Math.* **468** (1995), 113–138.

[4] Kim, M.: Pfaffian equations and the Cartier operator, *Compositio Math.* **105** 1, (1997) 55–64.

[5] Jouanolou, J.-P.: Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique, *Math. Ann.* **232** (1978) 239–245.

[6] Yoccoz, J.-C.: Petits diviseurs en dimension 1, *Astérisque* **231** (1995).

Octobre 1998

Unité de Mathématiques
Pures et Appliquées
de l'ENS Lyon
U.M.R. 128 du CNRS

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 FRANCE

ghys@umpa.ens-lyon.fr