RÉSONANCES ET PETITS DIVISEURS

par

Étienne GHYS

En 1954, lors du congrès international des mathématiciens d'Amsterdam, A.N. Kolmogorov annonça un théorème important qui fut précisé (et démontré !) quelques années plus tard par V. Arnold et J. Moser [13, 1, 15]. Je voudrais présenter une *introduction très élémentaire à ce théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser* (KAM) selon lequel "il est bien possible que le système solaire soit presque périodique". Mon but, modeste, est de montrer le rôle des résonances et des petits diviseurs en mécanique céleste en me concentrant sur un exemple très simplifié, inspiré du véritable problème KAM : il s'agit en quelque sorte d'un "modèle réduit" du système solaire, beaucoup plus facile à comprendre. Face à une question trop difficile, le mathématicien a le droit d'en simplifier l'énoncé à l'extrême pour localiser les difficultés. J'essaierai de traiter complètement cet exemple à l'aide des séries de Fourier. La "vraie" théorie KAM est beaucoup plus difficile : le lecteur pourra trouver davantage d'informations, ainsi que des indications sur la preuve du théorème, dans l'article de J. H. Hubbard inséré dans ce volume [11].

Un monde périodique

Nous vivons dans un monde dans lequel se combinent un grand nombre de phénomènes périodiques. Le soleil se lève à peu près toutes les 24 heures, la nouvelle lune revient tous les 29,5 jours, l'été revient à peu près tous les ans... On pourrait bien sûr multiplier les exemples à l'infini. Cette observation est ancienne et les premiers scientifiques ont essayé très tôt de mesurer ces cycles. Parfois la période n'est pas facile à déterminer et elle n'est bien souvent qu'une approximation. Qu'on songe par exemple au cycle appelé *saros* : tous les 6 585 jours et 8 heures, la lune, le soleil et la terre se trouvent dans des positions relatives à peu près identiques et on constate donc cette périodicité dans l'apparition des éclipses. À vrai dire, à cause des 8 heures, la périodicité des éclipses en un lieu donné de la terre est en fait triple (un jour = 3 fois 8 heures) de sorte que la période est de 19 756 jours (54 ans et 32 ou 33 jours en fonction des années bissextiles). On ne peut qu'être émerveillé par la précision des observations des astronomes de l'antiquité qui a pu conduire à la détermination exacte de ce cycle astronomique. L'existence de ces cycles dans notre univers est peut-être une condition préliminaire nécessaire à l'apparition de la vie et d'une civilisation ? Peut-on imaginer les difficultés d'une vie sur une planète qui serait le satellite d'une étoile double : les levers et les couchers des deux soleils s'entremêleraient de manière plus ou moins aléatoire.

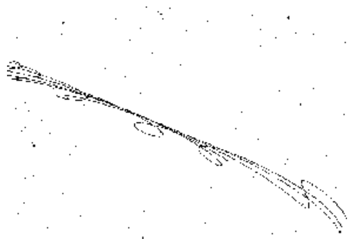

Figure 1: Orbite d'une planète vue de la terre

Les mathématiciens ont toujours été fascinés par les cycles et il ne faut pas attendre Fourier pour qu'on essaye de décomposer un phénomène cyclique en une somme de phénomènes cycliques élémentaires. Quoi de plus élémentaire qu'un point qui décrit un cercle autour d'un autre à vitesse angulaire constante ? C'est bien sûr le modèle auquel pensent les premiers observateurs du soleil (qui tourne "évidemment" autour de la terre). Le cas des planètes est un peu plus compliqué puisque les trajectoires qu'elles décrivent dans le ciel semblent parfois complexes (voir Figure 1). Les astronomes de l'antiquité ont progressivement mis au point un modèle remarquablement efficace qui permettait une description précise, en très bon accord avec ce qu'ils pouvaient mesurer avec leurs instruments rudimentaires. C'est la théorie des épicycles, des équants, remontant au moins à Hipparque, que je ne vais pas décrire dans les détails et qui culmine avec le merveilleux système de Ptolémée (l'*Almageste*, II siècle). La terre est au centre et le soleil et les planètes tournent autour de la terre en suivant des combinaisons finies de mouvement circulaires uniformes. Le lecteur désireux de connaître des détails sur les théories de Hipparque et Ptolémée consultera avec profit l'article [9].

Ptolémée, l'un des plus grands génies de son temps n'est connu des écoliers contemporains que pour sa théorie "fausse" du système géocentrique. Et pourtant ! Qu'est ce qu'une théorie "vraie" lorsqu'il s'agit de physique ou d'astronomie ? Le but principal n'est-il pas de développer un modèle qui rende compte des expériences de l'époque ? Toute question relative à la "vraie" nature de l'espace et du temps n'est-elle pas uniquement une question métaphysique dont le physicien peut tout à fait se passer ?

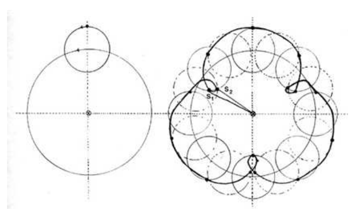

Figure 2: Épicycle

La théorie héliocentrique de Copernic a renversé la théorie géocentrique de Hipparque/Ptolémée. Cette nouvelle théorie est-elle plus vraie que la précédente ? Une chose est claire : la théorie de Copernic est plus belle et tout semble s'agencer de manière plus harmonieuse et simple. Cela suffit pour préférer l'héliocentrisme. Mais si l'on y regarde de plus près, la théorie de Copernic n'est pas si élémentaire. Elle utilise également des cycles et des épicycles. Ptolémée utilisait 40 cycles et Copernic en utilise encore 34... Les tables établies par Copernic ne sont pas plus précises que celles de Ptolémée. D'ailleurs, Copernic ne présente pas sa théorie comme étant "vraie" : il fait précéder son *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543) d'une préface, écrite par Osiander, qui a fait couler beaucoup d'encre. Osiander voulait-il préserver Copernic des foudres du pape ? ou au contraire cette préface reflète-t-elle l'opinion de Copernic ? En voici un extrait (voir [8]) :

> ... c'est le propre de l'astronome de colliger, par une observation diligente et habile, l'histoire des mouvements célestes. Puis d'en rechercher les causes, ou bien – puisque d'aucune manière il ne peut en assigner de vraies – d'imaginer et d'inventer des hypothèses quelconques à l'aide desquelles ces mouvements pourraient être exactement calculés [...] il n'est pas nécessaire que ces hypothèses soient vraies ni même vraisemblables ; une seule chose suffit : qu'elles offrent des calculs conformes à l'observation.

Revenons à nos cycles. Si un phénomène est périodique de période T, tous les multiples entiers de T peuvent également être considérés comme une période. Par conséquent si deux phénomènes ont respectivement une période T_1 et T_2, la combinaison de ces phénomènes sera périodique dès qu'un multiple entier de T_1 coïncide avec un multiple entier de T_2, autrement dit dès que le rapport T_1/T_2 est un nombre rationnel. Puisque nous parlons d'astronomie et que ces périodes ne peuvent être connues qu'approximativement, on peut considérer que ces rapports sont toujours (à peu près) rationnels et les combinaisons des cycles que nous constatons dans notre univers constituent alors un phénomène globalement périodique. Un lecteur pourrait à juste titre remarquer que ce type d'argument peut facilement mener à des périodes gigantesques et que la signification physique d'une période de cent milliards d'années par exemple laisserait un peu à désirer. Que ce lecteur se rassure : cette question est en quelque sorte le cœur de cet article et notre "hypothèse physique" (pré-pythagoricienne) que tous les nombres sont rationnels sera discutée et modifiée au fil de cet article. Commençons donc par imaginer que toutes les fonctions physiques sont périodiques...

L'idée de combiner des cercles pour approcher une fonction périodique n'est peut-être pas due à Hipparque et Ptolémée mais par respect pour ces génies, j'aimerais leur attribuer la copropriété du théorème suivant :

Théorème [Hipparque-Ptolémée-Fourier] *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une courbe continue périodique de période T à valeurs dans le plan complexe. Alors f peut être arbitrairement approchée par une combinaison finie de mouvements circulaires uni-*

formes. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction de la forme $f_\varepsilon(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \exp(2i\pi nt/T)$ (avec $a_n \in \mathbb{C}$) telle que $|f(t) - f_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ pour tout t.

Clairement, Hipparque et Ptolémée n'ont pas démontré ce théorème dans le sens moderne du terme mais Fourier non plus.[1] Pour une "preuve moderne", le lecteur pourra consulter par exemple [14].

1. **Une fantaisie adélique**

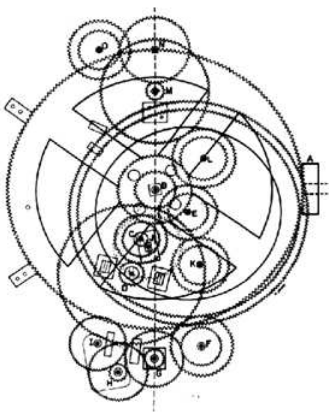

Figure 3: L'horloge astronomique grecque d'Anticythère 75 av. J.C. [20]

Je voudrais me permettre une fantaisie de mathématicien, totalement inutile pour la suite de cet article et dont le lecteur pourra se passer sans difficulté. Le temps de la science contemporaine est modélisé par l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (même s'il a subi bien des avatars avec les théories relativistes). Cet ensemble ne suggère pas l'idée de cycles successifs dont nous venons de parler : il coule inexorablement du passé vers le futur. Essayons de formaliser le temps tel que les astronomes comme Ptolémée pouvaient le penser, formé à partir de cycles "empilés les uns au-dessus des autres", dans lequel les récurrences sont omniprésentes. Pour chaque entier $n > 0$, le quotient $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ formé des nombres réels modulo n représente le "temps cyclique de période n". Si m et n sont deux entiers tels que m divise n, il existe une projection $\pi_{m,n}$ évidente du cycle $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ sur le cycle $\mathbb{R}/m\mathbb{Z}$:si on connaît un réel modulo n, on le connaît en particulier modulo m. Définissons le temps cyclique $\mathcal{T}$ de la manière suivante : un élément t de $\mathcal{T}$ est une application qui associe à chaque entier n un élément t_n de $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ de manière compatible avec ces projections naturelles, c'est-à-dire de telle façon que si m divise n, on a $\pi_{n,m}(t_n) = t_m$. Autrement dit, un élément de $\mathcal{T}$ est une manière de se placer dans tous les cycles en respectant les compatibilités évidentes. Évidemment, le "temps cyclique" $\mathcal{T}$ contient le "temps usuel" $\mathbb{R}$: si on

[1]Un "théorème" d'Arnold affirme d'une part qu'aucun théorème n'est dû au mathématicien dont il porte le nom et d'autre part que ce théorème s'applique à lui même.

donne un nombre réel t, on peut lui associer pour chaque n le point t modulo n dans $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ et ces divers points sont compatibles entre eux. Mais $\mathcal{T}$ est beaucoup plus gros que $\mathbb{R}$ (exercice). On peut munir $\mathcal{T}$ d'une structure topologique qui en fait un groupe topologique compact (exercice). Le temps compact... un rêve de mathématicien (ou de philosophe oriental ?) qui illustre au fond l'idée de récurrence. Le groupe habituel des nombres réels $\mathbb{R}$ se plonge comme un sous-groupe dense de $\mathcal{T}$ (exercice). Peut-on penser à $\mathcal{T}$ comme un modèle psychologique raisonnable pour le temps tel que nous le vivons ? Exercice futile de mathématicien ? Peut-être pas. Le groupe $\mathcal{T}$ que nous venons d'introduire est le "tore adélique" dont l'étude est fondamentale dans la théorie contemporaine des nombres.

Kepler, Newton...

Je ne vais pas décrire en détail les magnifiques travaux astronomiques de Kepler qu'on résume souvent dans les *trois lois de* Kepler. La première affirme qu'une planète décrit une conique dont le soleil est l'un des foyers. La seconde (loi des aires) précise la vitesse à laquelle cette conique est parcourue. La troisième exprime la période (dans le cas d'un mouvement elliptique) en fonction du grand axe de l'ellipse. Tout cela est trop connu et se trouve dans beaucoup de livres de mécanique rationnelle. Je voudrais insister ici sur deux aspects moins connus de l'œuvre de Kepler.

On "reproche" souvent à Kepler de n'avoir offert qu'un modèle descriptif et non explicatif : quel est la cause du mouvement des planètes ? La loi de Newton $f = m\gamma$ et l'attraction gravitationnelle en $1/r^2$ sont des merveilles mais expliquent-t-elles plus que Kepler pourquoi les objets s'attirent ? On retrouve la question de la comparaison Ptolémée/Copernic : les lois de Newton l'emportent sur celles de Kepler par l'aspect esthétique et parce qu'elles ont permis une révolution en physique (et en mathématiques). Elles n'expliquent cependant pas la cause du phénomène (et on pourrait bien sûr faire le même genre de commentaires sur le caractère explicatif de la relativité générale).

Zéro-ième loi de Kepler : *si l'orbite d'une planète est bornée, elle est périodique, c'est-à-dire que c'est une courbe fermée.*

Si l'on y pense un peu, il s'agit d'un vrai miracle.

On peut démontrer aujourd'hui le résultat suivant (théorème de Bertrand, connu de Newton ?). Supposons qu'un point matériel se déplace dans le plan en étant attiré vers l'origine du plan (le soleil) par une force dont le module $F(r)$ ne dépend que de la distance r à l'origine. Supposons que toutes les trajectoires qui sont bornées sont en fait des courbes fermées. Alors, la force $F(r)$ ne peut être que l'attraction newtonienne $F(r) = k/r^2$ ou l'attraction élastique $F(r) = Kr$ (pas très raisonnable en astronomie !). Pourquoi "dame Nature" a-t-elle "choisi" LA loi qui assure la périodicité du mouvement ? Voilà un mystère que la physique n'est pas prête à nous expliquer ?

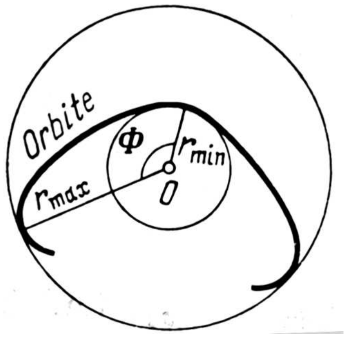

Figure 4: Orbite presque périodique [3]

Quel est le mouvement d'une planète si la force d'attraction vers le point central est une autre fonction $F(r)$? Il s'agit d'une question classique de mécanique et Newton lui-même a examiné un grand nombre de cas dans ses *Principia* (1689). Une orbite bornée est constituée d'arcs qui joignent les apogées et les périgées successifs. Ces arcs s'obtiennent à partir de l'un d'entre eux à partir d'une symétrie et de rotations dont l'angle dépend de l'orbite considérée. D'une certaine manière, on peut considérer que le mouvement est le résultat de deux phénomènes périodiques : l'un concerne la variation périodique de la distance au soleil et l'autre concerne la variation périodique de la direction de la droite joignant le soleil à la planète. L'orbite est périodique si les deux périodes sont en rapport rationnel et elle est presque périodique dans le cas contraire. Seules les forces en r et en $1/r^2$ sont telles que ce rapport est toujours rationnel et il se trouve qu'il est alors égal à 1, de sorte que dans ces cas les orbites se referment en fait dès le premier tour. La loi $1/r^2$ est une *résonance* de la nature puisqu'elle correspond à l'égalité des fréquences radiales et angulaires.

Comme Kepler a dû être émerveillé lorsqu'il a constaté que l'orbite de Mars est périodique. Cela n'a rien d'évident lorsqu'on l'observe depuis la terre et cela ne résulte en rien des modèles à la Hipparque-Ptolémée-Copernic de type épicycles.

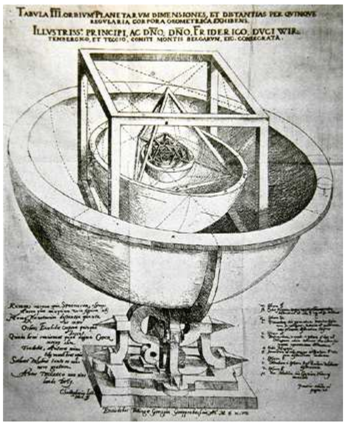

Figure 5: Harmonices Mundi

Il faudrait également mentionner la "quatrième" loi de Kepler qu'on cite rarement car elle est fausse, mais que Kepler considérait comme sa principale découverte. Cette loi se proposait d'expliquer les valeurs numériques des grands axes des orbites des six planètes (connues à l'époque). La construction est magnifique, quasi philosophique : il s'agit d'emboîter les cinq polyèdres réguliers (platoniciens) successivement dans des sphères inscrites et circonscrites (voir la belle Figure 5 extraite de *Harmonices Mundi* (1619)) : les rayons des sphères donnent les rayons des orbites (à similitude près bien sûr). Faut-il se moquer ? Non bien sûr car il semble que le résultat obtenu soit très proche de la réalité et surtout car il s'agit d'une tentative de géométrisation de l'espace et du mouvement. D'autres tentatives ont eu d'immenses succès dans la suite de l'histoire. Dans [19], Sternberg encourage ceux qui se moquent de Kepler à se moquer également des physiciens théoriciens contemporains qui relient les particules élémentaires aux représentations linéaires des groupes de Lie simples. La recherche de groupes de symétries est au cœur de la science, qu'il s'agisse du groupe de l'icosaèdre, des groupes de jauge, ou des symétries approchées dans un mouvement presque périodique ou dans un quasi-cristal.

Un monde presque périodique

Ainsi, le monde que nous lèguent Hipparque, Ptolémée, Kepler et Newton est un *monde périodique*. Plus précisément, chaque planète est périodique mais le système solaire est "presque périodique" dans son ensemble car il n'y a bien sûr aucune raison que les périodes des différentes planètes soient en rapports rationnels.

Les nombres irrationnels existent. La somme de deux fonctions périodiques dont les périodes sont en rapport irrationnel n'est pas périodique. Mais elle l'est presque... La formalisation de cette idée est récente. Commençons par deux définitions "raisonnables" :

Définition : *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ un (petit) nombre* *réel strictement positif. Un nombre réel T est une ε-période si pour tout t de $\mathbb{R}$, on a : $|f(t+T) - f(t)| < \varepsilon$.*

Définition : *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $M > 0$ tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur plus grande que M contient au moins une ε-période.*

La théorie des fonctions presque périodiques est riche. Le lecteur intéressé pourra lire [19] avec profit, en particulier en lien avec l'histoire du mouvement des planètes.

Voici deux théorèmes. Le premier est plutôt un exercice laissé au lecteur :

Théorème : *Soient $a_1, \ldots, a_k$ des nombres complexes et $\omega_1, \ldots, \omega_k$ des nombres réels. La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = \sum_{n=1}^{k} a_n \exp(i\omega_n t)$ est presque périodique.*

Le second est beaucoup plus difficile. Formellement, il est dû à Bohr mais pour les mêmes raisons subjectives que celles exposées plus haut, je l'attribue également à Hipparque et Ptolémée.

Théorème [Hipparque-Ptolémée-Bohr] : *Toute fonction presque périodique peut être arbitrairement approchée par des fonctions du type précédent.*

Ces définitions et ces théorèmes étant posés, je peux commencer à préciser le contenu de cet article. *L'univers dans lequel nous vivons est-il presque périodique ?*

---

2. **Une remarque sur l'histoire récente de la physique**

La turbulence des fluides est un phénomène bien complexe qui intrigue les physiciens au moins depuis Léonard de Vinci et dont les applications pratiques sont plus qu'évidentes en aéronautique. Comment comprendre ces tourbillons de toutes les tailles dans les fluides turbulents, et le flux d'énergie des gros tourbillons vers les plus petits, jusqu'aux echelles dissipatives (théorie de Kolmogorov [12]) ? Il est étonnant de constater que des physiciens aussi éminents et imaginatifs que Landau et Lifschitz ont longtemps présenté la turbulence comme un phénomène presque périodique, dont le nombre de fréquences dépend du nombre de Reynolds (lié notamment à la viscosité du fluide). Ce n'est qu'à partir de la seconde édition de 1971 de leur fameux traité de mécanique des fluides qu'ils ont pris conscience du fait que les fonctions presque périodiques sont finalement trop "gentilles" pour représenter ce phénomène et qu'il faut faire appel à des fonctions beaucoup plus "chaotiques" : c'est le début de la théorie des attracteurs étranges, bel exemple de collaboration entre mathématiciens et physiciens. Les vieilles habitudes sont difficiles à perdre : les épicycles sont encore présents dans notre inconscient scientifique et il est bien difficile de nous en débarrasser. Devons-nous oublier les épicycles et les fonctions presque périodiques dans la description de notre système solaire ? Les systèmes conservatifs, tels que le système solaire, sont-ils eux aussi sujets à une sorte de chaos (et en quel sens ?), comme le sont les systèmes dissipatifs (turbulence) ? D'une certaine manière, le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser est rassurant : il affirme que dans de bonnes conditions (expliquées plus loin), les fonctions presque périodiques suffisent pour décrire le mouvement de nos planètes.

Lagrange et Laplace : le monde presque périodique

La démonstration des lois de Kepler à partir de celles de Newton suppose un système solaire "simplifié" dans lequel une unique planète est attirée par un centre fixe. On apprend dans les cours élémentaires de mécanique que le problème n'est pas beaucoup plus difficile pour deux masses qui s'attirent mutuellement : chacune décrit une conique dont un foyer est le centre de masse commun. Mais évidemment, il n'y a pas qu'une planète dans le système solaire. Même en faisant abstraction de beaucoup de "petits" objets, on peut considérer que neuf planètes gravitent autour du soleil et s'attirent mutuellement. Ce problème des N corps est autrement plus compliqué mathématiquement et dans un sens que je ne peux pas décrire précisément ici, on sait depuis le début du vingtième siècle qu'il est impossible de l'"intégrer".

Faute de résoudre exactement les équations du mouvement, on est réduit à trouver des solutions approchées. Lagrange et Laplace sont de ceux qui ont développé le mieux la théorie des perturbations. En première approximation bien sûr, les forces dominantes dans le système solaire sont les forces d'attraction vers le soleil car la masse du soleil est largement supérieure à celle des autres planètes (d'un facteur de l'ordre de 10^3 environ). On peut donc penser que les planètes vont suivre à peu près les orbites képlériennes (périodiques) et que celles-ci vont se modifier peu à peu à cause de l'influence perturbatrice des autres planètes. Quelle est l'ampleur de ces petites perturbations ? Risquent-elles de modifier significativement l'harmonie du système képlérien ? Voilà des questions bien difficiles. On pourrait craindre le pire : peut-être qu'une force perturbatrice de l'ordre du millième de la force principale pourrait modifier le rayon d'une orbite de manière significative après un temps de l'ordre de mille fois le temps caractéristique du problème (l'année). En d'autres termes, on pourrait craindre qu'en mille ans, le rayon de l'orbite terrestre ne soit divisé (ou multiplié) par deux. Voilà qui aurait des conséquences importantes sur l'histoire de notre civilisation ! Puisqu'on ne constate pas de catastrophe de ce genre dans notre passé, quel est le phénomène qui explique que les perturbations perturbent moins que ce qu'on pouvait craindre ?

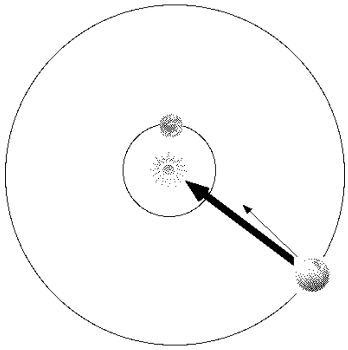

Figure 6: Perturbation

La théorie des perturbations est compliquée et nécessite beaucoup de calculs mais l'idée géométrique de base, telle qu'elle a été expliquée par Gauss, est très simple (comme beaucoup de grandes idées). Plaçons-nous dans un cas particulièrement facile : le soleil, de masse très grande, est (presque) fixe, une planète P_1 tourne de manière uniforme sur une orbite circulaire et une autre planète P_2 de masse très petite par rapport à P_1 est lancée sur une orbite autour du soleil à peu près circulaire et extérieure à celle de P_1, dans le même plan. Imaginons que le rayon de l'orbite de P_2 est beaucoup plus grand que celui de P_1 de sorte que la vitesse angulaire de P_1 est beaucoup plus grande que celle de P_2 (d'après la troisième loi de Kepler). Puisque la masse de P_2 est très petite, on peut penser qu'elle perturbe très peu P_1 qui va donc suivre de très près sa trajectoire circulaire. Quant à la planète P_2, elle est soumise à deux forces : l'une, principale, vers le soleil et l'autre, perturbatrice, vers la planète P_1. La force perturbatrice est faible mais non négligeable ; sa direction oscille sans cesse car P_1 tourne très rapidement. L'idée consiste à supposer que ces oscillations de la direction de la force perturbatrice peuvent être moyennées : en pratique, cela signifie que l'on remplace la planète P_1 qui tourne, par son orbite où l'on distribue la masse de P_1 de manière uniforme. Autrement dit, la planète P_2 n'est plus attirée par une planète P_1 mobile mais par un anneau circulaire fixe. Cette approximation est-elle valable ? C'est ce que nous allons discuter par la suite. La fin de l'argumentation est facile. On sait depuis Newton qu'à l'extérieur de l'orbite de P_1, les forces d'attraction du soleil et de l'objet circulaire fixe peuvent se réduire à la force d'attraction d'une unique masse ponctuelle placée au centre. En résumé, tout se passe comme si la planète P_2 était soumise à la force newtonienne produite par un point dont la masse est celle du soleil augmentée de celle de P_1. La planète P_2 suivra donc une orbite à peu près périodique. Autrement dit, les forces perturbatrices n'ont pas perturbé le caractère périodique de la planète P_2 et cela va dans le sens de notre observation historique : sur quelques milliers d'années, les rayons et les caractéristiques principales des planètes n'ont pas évolué de manière importante.

Beaucoup de questions sont soulevées par cette idée. Peut-on remplacer une force variable en taille et en direction par une force qui est la moyenne de la force variable ? Il y a clairement une situation où cette idée ne peut pas fonctionner. Supposons que les orbites circulaires que les planètes P_1 et P_2 suivraient si leurs masses étaient infiniment petites (et donc non perturbées) soient telles que leurs périodes soient en rapport rationnel, par exemple 10. Cela signifierait que si les positions initiales de P_1 et P_2 sont par exemple en conjonction, tous les 10 tours de P_1, les deux planètes se trouvent à nouveau en conjonction exacte. Évidemment, prendre la moyenne de la perturbation le long de l'orbite de P_1 n'aurait pas grand sens puisque les coordonnées angulaires de P_1 et P_2 sont fortement corrélées et les conjonctions sont beaucoup trop régulières. Si le rapport des périodes est irrationnel, il est par contre raisonnable de remplacer la perturbation par sa moyenne. Voici un énoncé qui va dans cette direction : il s'agit d'un théorème ergodique particulièrement simple (que Lagrange et Laplace ne connaissaient pas, au moins explicitement).

Théorème : *Soit $F(x,y)$ une fonction continue à valeurs réelles ou complexes qui dépend de deux angles x,y considérés comme éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (l'unité d'angle est le tour). Soient α et β deux fréquences dont le rapport est irrationnel. Alors, lorsque le temps T tend vers l'infini, l'intégrale $\frac{1}{T}\int_0^T F(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)\,dt$ converge uniformément vers la valeur moyenne de F, c'est-à-dire vers l'intégrale double $\int\int F(x,y)\,dxdy$.*

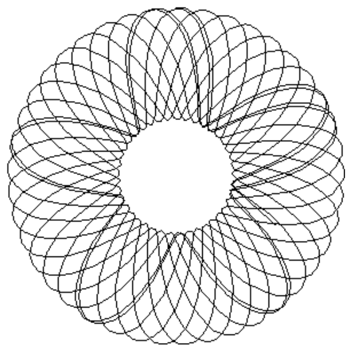

Figure 7: Mouvement presque périodique

Démonstration : L'ensemble des fonctions F telles que le théorème est vrai forme évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$ des fonctions continues complexes sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Un instant de réflexion montre que ce sous-espace est fermé dans la topologie uniforme : une limite uniforme de fonctions qui vérifient le théorème le vérifie également. D'après Fourier (à deux variables), le sous-espace engendré par les fonctions du type $\exp(2i\pi(nx+my))$ est dense dans $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$; Il suffit donc de vérifier que chacune de ces fonctions $\exp(2i\pi(nx+my))$ satisfait le théorème mais il s'agit là d'un calcul explicite et facile que je laisse au lecteur. CQFD

Revenons à Lagrange et Laplace. Étant donné un nombre réel, il est probable qu'il est irrationnel et on est donc en droit de penser que la méthode de Lagrange et Laplace est justifiée. Encore faut-il avoir conscience du fait que nous avons pris un cas particulièrement simple d'une seule planète perturbatrice gravitant sur une trajectoire presque circulaire. Dans le principe, la méthode s'applique aux autres situations. On considère un système solaire presque képlérien, avec de petites perturbations et on moyenne les perturbations sur leur espace de configuration. On espère qu'il n'y a pas de résonances, c'est-à-dire de relations linéaires rationnelles entre les périodes qui apparaissent et on obtient le *théorème de stabilité de* Laplace qui affirme que dans le système moyenné, les grands axes des orbites restent constants, ce qui assure une certaine stabilité à l'ensemble. Finalement, ceci "justifie" que les effets des perturbations sont moindre que ceux qu'on pouvait craindre a priori.

Quel crédit mathématique peut-on donner à ce type de "démonstration" ? Si l'on cherche de "vrais théorèmes de stabilité" valables pour des temps infiniment longs, on ne trouvera rien chez Laplace qui ressemble à une preuve, et les assertions qu'on rencontre parfois selon lesquelles "Laplace a démontré la stabilité du système solaire" sont largement exagérées. Si l'on cherche par contre des énoncés mathématiques valables pour des temps finis mais longs, on peut espérer transformer ces méthodes en des théorèmes, tout au moins dans certains cas particuliers. Quoi qu'il en soit, ce genre de méthode laisse penser que si les perturbations sont de l'ordre de ε (10^{-3} dans notre système), ces perturbations n'ont pas d'effet macroscopique en un temps $1/\varepsilon$ comme on peut le croire a priori mais plutôt après un temps $1/\varepsilon^2$ ("terme suivant dans un développement limité"). Nous serions donc tranquilles pour environ 10^6 années, ce qui est plus raisonnable. Le lecteur qui voudrait en savoir plus sur ces méthodes de perturbations pourra consulter des traités de mécanique céleste s'il en a le courage ou [3, 4, 5] pour une présentation conceptuelle.

Lagrange et Laplace nous lèguent donc un monde presque périodique, au moins pour un million d'années ! Mais ils nous laissent également beaucoup de questions : quel est le rôle de ces résonances entre les périodes des planètes qui mettent en défaut les arguments de moyenne ? La stabilité du mouvement est-elle perpétuelle ou bien se détruit-elle après un million d'années ? Comment rendre rigoureux ce "théorème de stabilité de Laplace" ? Il a fallu près de deux siècles et le travail de mathématiciens aussi puissants que Poincaré, Siegel, Kolmogorov, Arnold et Moser pour arriver à des réponses partielles qui soulèvent elles-mêmes d'autres questions.

Poincaré et le chaos

À la fin du dix-neuvième siècle, Poincaré invente des méthodes géométriques rigoureuses (ou presque) pour approcher une compréhension globale du problème des N-corps. À vrai dire, il se concentre sur le *problème restreint des trois corps* : deux corps ponctuels gravitent de manière képlérienne dans un plan, autour de leur centre de masse, et un troisième corps ponctuel, de masse infiniment petite, est soumis à l'attraction des deux autres masses en mouvement. Voici quelques questions abordées par Poincaré dans son article célèbre *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (1884). La trajectoire de la petite masse est-elle confinée dans une région bornée du plan si son énergie totale est suffisamment petite ? Pour une condition initiale "générique", y a-t-il risque de collision entre les corps ? Le comportement dynamique du petit corps est-il presque périodique ? Je ne vais malheureusement pas décrire cet article historique de Poincaré. Je me contenterai de signaler que Poincaré démontre l'existence d'un grand nombre d'orbites périodiques et qu'il s'attache à comprendre la dynamique au voisinage de ces orbites périodiques. À cet endroit, il commet une erreur et pèche par optimisme dans une démonstration (c'est un peu habituel chez lui) : son grand mémoire primé par le roi Oscar de Suède est faux. À la hâte, il lui faut corriger et cette correction s'avérera d'une richesse scientifique considérable : Poincaré crée à cette occasion la théorie du chaos. Il met en évidence des trajectoires dont le mouvement est bien loin d'être presque périodique :

> "Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et, en général, de tous les problèmes de dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes."(Poincaré [18])

L'histoire de cette erreur et de la manière dont Poincaré la transforme en succès est passionnante. Je recommande au lecteur le livre [6] qui est entièrement consacré à cette question.

Ainsi, même si les conditions initiales qui mènent à ces exemples de trajectoires chaotiques ne sont pas très proches des conditions physiques de notre système solaire, nous savons grâce à Poincaré que les orbites des corps célestes ne sont pas nécessairement presque périodiques. Trouverons-nous de telles orbites dans notre système solaire ? Quoi qu'il en soit, il nous faut être plus modestes dans notre quête de la stabilité. Auparavant, nous cherchions à savoir si les orbites des planètes sont presque périodiques et nous sommes maintenant bien moins ambitieux puisque la question devient la suivante. Si l'"on" lance les planètes d'un système solaire sur des trajectoires à peu près circulaires autour d'un soleil de très grande masse, les planètes resteront-elles à jamais confinées dans un domaine borné de l'espace ? Une planète pourrait-elle être éjectée du système par exemple ?

Un "modèle réduit" de la théorie des perturbations

Nous allons construire un modèle très simple (et même naïf). Considérons sur le cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ la transformation f qui associe au point (x, y) le point $(x + \alpha, y)$ où α est un angle irrationnel. Nous allons itérer cette transformation et étudier sa dynamique. Il s'agit d'une première simplification : au lieu d'étudier des dynamiques en temps continu (dans $\mathbb{R}$), nous allons utiliser un temps discret (dans $\mathbb{Z}$). Après n itérations, le point (x, y) est envoyé sur le point $(x + n\alpha, y)$ de sorte que les orbites de f se répartissent sur les cercles $y = const.$ On peut donc penser à f comme la dynamique d'un système presque périodique. Essayons maintenant de perturber le mouvement en imposant à notre point de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ une "poussée" vers le haut ou vers le bas qui dépende uniquement de la première coordonnée. Autrement dit, nous étudions maintenant une transformation g qui associe au point (x, y) le point $(x + \alpha, y + u(x))$ où u est une certaine fonction très régulière définie sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ou si l'on préfère, une fonction périodique de période 1) que l'on peut penser comme une perturbation très petite. Quelle est la nouvelle dynamique ? La n-ième itération de g envoie le point (x, y) sur le point $(x + n\alpha, y + u(x) + u(x + \alpha) + \ldots + u(x + n\alpha))$.

Le principe de moyennisation de Lagrange suggère de remplacer l'impulsion u par sa moyenne sur le cercle. Évidemment si cette moyenne est non nulle, on comprend bien que les itérations successives de g vont avoir une tendance à faire tendre la seconde coordonnée vers l'infini de sorte que le système perturbé n'est pas stable. Plaçons-nous donc dans la situation où la moyenne de u sur le cercle est nulle : en moyenne la seconde coordonnée n'est pas modifiée. Peut-on en déduire que g est stable dans le sens que ses orbites restent bornées ? Voilà le problème simplifié que nous allons traiter. En symboles, la question est la suivante :

Soit u une fonction périodique de période 1, indéfiniment différentiable, dont l'intégrale sur une période est nulle. Soit α un nombre irrationnel et x un nombre réel. Les sommes $u(x) + u(x + \alpha) + \ldots + u(x + n\alpha)$ sont-elles bornées (en module) lorsque le "temps" n tend vers l'infini ?

Commençons par un lemme qui est un cas particulier d'un lemme de Gottschalk-Hedlund :

Lemme : *Fixons x_0 dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La suite des sommes $u(x_0)+u(x_0+\alpha)+\ldots+u(x_0+n\alpha)$ est bornée (en module) si et seulement si il existe une fonction v continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ telle que pour tout x on ait $u(x) = v(x + \alpha) - v(x)$.*

Démonstration : Si $u(x)$ est de la forme $v(x + \alpha) - v(x)$, la somme étudiée se "télescope" : $u(x_0) + u(x_0 + \alpha) + \ldots + u(x_0 + n\alpha) = v(x_0 + (n + 1)\alpha) - v(x_0)$. Son module est donc borné par deux fois la borne supérieure de $|v|$ (qui est finie car v est périodique et continue).

Réciproquement, supposons que $|u(x_0) + u(x_0 + \alpha) + \ldots + u(x_0 + n\alpha)|$ soit majoré par $M > 0$. Cela signifie que l'orbite du point $(x_0, 0)$ du cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ reste confinée dans le cylindre compact $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-M, M]$. Soit K l'adhérence de cette orbite. Il s'agit d'un compact invariant par la transformation g. Parmi tous les compacts non vides contenus dans K et invariants par g, choisissons-en un qui soit minimal pour l'inclusion (utiliser que l'intersection d'une famille de compacts non vides totalement ordonnée pour l'inclusion est non vide) et notons-le $\mathcal{M}$. J'affirme que $\mathcal{M}$ *est le graphe d'une fonction continue* v *de* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *vers* $\mathbb{R}$.

Pour justifier cette affirmation, j'observe d'abord que la projection de $\mathcal{M}$ sur la première coordonnée est un compact non vide dans le cercle, invariant par la rotation d'angle irrationnel α. Toutes les orbites d'une telle rotation sont denses dans le cercle. Par conséquent la projection de $\mathcal{M}$ sur le premier facteur est nécessairement le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tout entier.

Je montre maintenant que pour chaque x de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la "verticale" $\{x\} \times \mathbb{R}$ ne rencontre l'ensemble minimal $\mathcal{M}$ qu'en un seul point. Pour cela, je considère les translations verticales $\tau_t(x, y) = (x, y+t)$. Évidemment, ces translations commutent avec g de sorte que l'image par τ_t d'un ensemble invariant par g est également un ensemble invariant par g. Par conséquent, $\tau_t(\mathcal{M})$ est invariant par g ainsi que les intersections $\tau_t(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}$. Nous avons choisi $\mathcal{M}$ comme un ensemble compact invariant non vide minimal. Il en résulte que pour tout t, l'intersection $\tau_t(\mathcal{M}) \bigcap \mathcal{M}$ est soit vide soit égale à $\mathcal{M}$. Mais si $\tau_t(\mathcal{M})$ coïncidait avec $\mathcal{M}$ pour un t non nul, $\mathcal{M}$ serait égal à $\tau_{kt}(\mathcal{M})$ pour tout entier k et ne serait pas borné (faire tendre k vers l'infini). Donc $\tau_t(\mathcal{M})$ et $\mathcal{M}$ sont disjoints pour t non nul et cela signifie que $\mathcal{M}$ rencontre chaque verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$ sur un unique point $(x, v(x))$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est le graphe d'une fonction v de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. Puisque ce graphe est compact, la fonction v est continue (exercice classique de math sup ?) L'affirmation est donc établie.

Il reste maintenant à exprimer en équation le fait que le graphe de la fonction v est invariant par la transformation g. L'image de $(x, v(x))$ est $(x + \alpha, v(x) + u(x))$ et doit être égale à $(x + \alpha, v(x + \alpha))$. On obtient bien $u(x) = v(x + \alpha) - v(x)$ et le lemme est démontré. CQFD

Avant de poursuivre, je paraphrase géométriquement le lemme. Dès qu'une orbite de la transformation g est bornée, elle reste confinée sur un cercle invariant qui est le graphe d'une fonction continue. Toutes les autres orbites sont alors bornées. Autrement dit, dans ce cas, la famille de cercles $y = const$ qui était invariante par la transformation non perturbée f est remplacée par la famille de cercles $y - v(x) = const$ qui est invariante par la transformation perturbée g.

Nous sommes donc menés à une question d'analyse harmonique. *Une fonction* u *indéfiniment différentiable et d'intégrale nulle sur le cercle étant donnée, et un nombre irrationnel* α *étant également donné, existe-t-il une fonction continue* v *sur le cercle telle que* $u(x) = v(x + \alpha) - v(x)$ *?*

Les séries de Fourier sont particulièrement adaptées pour étudier ce problème. La fonction u étant infiniment différentiable peut se développer en séries de Fourier sans difficulté :

$$u(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n \exp(2i\pi nx).$$

Cherchons la fonction v à travers son développement en série de Fourier également (nous nous préoccuperons de la convergence de cette série par la suite) :

$$v(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n \exp(2i\pi nx).$$

(J'emploie la notation complexe par commodité : la fonction v étant réelle, v_n et v_{-n} sont conjugués). On a alors :

$$v(x+\alpha) - v(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\exp(2i\pi n\alpha) - 1) v_n \exp(2i\pi nx).$$

Identifiant les coefficients de Fourier de $u(x)$ et de $v(x+\alpha) - v(x)$, on obtient ainsi :

$$v_n = \frac{u_n}{(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)}.$$

L'hypothèse selon laquelle α est irrationnel signifie que $(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)$ est non nul pour n différent de 0 de sorte que les v_n sont bien définis pour n non nul. Pour $n = 0$, notre hypothèse sur la moyenne de u signifie précisément que $u_0 = 0$ de sorte que l'équation précédente ne pose pas de problème : on peut choisir n'importe quelle valeur pour v_0 (ce qui correspond bien sûr au fait que si v est une solution à notre problème, $v + const$ est aussi une solution).

En résumé, le principe de Lagrange semble fonctionner. Nous avons bien trouvé une fonction v solution de notre équation fonctionnelle ou tout au moins son développement en série de Fourier. Mais cette série converge-t-elle et définit-elle une fonction continue comme nous le désirons ? Tel est notre nouveau problème.

3. Comment "voir" sur une série de Fourier si la fonction qu'elle définit est régulière ?

Considérons une fonction périodique h de période 1 et développons-la en série de Fourier :

$$h(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_n \exp(2i\pi nx).$$

Comment "voir" sur la suite des coefficients h_n que la fonction h est indéfiniment différentiable par exemple ? Si la fonction h est supposée continue et pas plus, la suite h_n est-elle soumise à des contraintes ? Voilà des questions délicates (que Fourier ne se posait semble-t-il pas) sur lesquelles on connaît aujourd'hui beaucoup de choses. Dans cet interlude, je vais me contenter d'observations très élémentaires qui suffiront pour mon propos.

Le n-ième coefficient h_n est donné par la formule de Fourier :

$$h_n = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} h(x) \exp(-2i\pi nx)\, dx.$$

Je me contenterai d'en déduire que si h est continue, la suite h_n doit être bornée. Attention : la réciproque est très loin d'être valable et ma majoration est pour le moins grossière. On peut montrer par exemple que la suite h_n tend en fait vers 0 et que la suite $(nh_1 + (n-1)h_2 + \ldots + h_n)/n$ est convergente et beaucoup d'autres choses encore.

Si h est continûment différentiable, on peut calculer les coefficients de Fourier h'_n de sa dérivée par la formule bien connue $h'_n = 2i\pi n h_n$. La continuité de la dérivée et l'observation précédente montrent donc qu'on a une estimation pour la décroissance à l'infini de h_n de la forme $|h_n| < Cst/|n|$.

Si h est indéfiniment différentiable, on peut répéter cet argument pour toutes les dérivées. Ainsi les coefficients de Fourier d'une fonction indéfiniment différentiable ont *une décroissance rapide.* Cela signifie que pour tout entier k, il existe une constante $C_k > 0$ telle que $|h_n| < C_k\, |n|^{-k}$.

Réciproquement, considérons une suite h_n à décroissance rapide et formons la série de Fourier associée. Il est facile de montrer que cette série est effectivement convergente et définit une fonction indéfiniment différentiable.

Ces remarques simples suffiront mais il est dommage de devoir abandonner un tel sujet sans l'avoir véritablement abordé. Le livre [14] est magnifique (mais exige plus de technique mathématique).

4. **Des nombres plus ou moins irrationnels ?**

Tout nombre irrationnel peut être arbitrairement approché par des nombres rationnels. Essayons de rendre cette affirmation quantitative. Soit α un nombre réel irrationnel. Fixons un (petit) réel $\varepsilon > 0$ et cherchons un nombre rationnel p/q (avec $q > 0$) tel que $|\alpha - p/q| < \varepsilon$. Un tel p/q existe toujours mais si ε est très petit, un rationnel p/q qui vérifie cette inégalité a nécessairement des numérateurs et dénominateurs très grands. Quelle est la valeur minimale de q comme fonction de ε ? À quelle vitesse cette fonction tend-elle vers l'infini quand ε tend vers 0 ? Tout dépend du nombre irrationnel considéré. Dans cet interlude, nous présentons le b.a.-ba de la théorie de *l'approximation diophantienne*, importante pour résoudre notre problème.

Certains nombres sont exceptionnellement bien approchés par les nombres rationnels. L'exemple le plus classique est le nombre défini par Liouville :

$$\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!} = 0,110001000000000000000001000000000000000000000000\ldots$$

Si l'on tronque la série à l'ordre n, on trouve un nombre rationnel dont le dénominateur est $10^{n!}$ et qui approche λ avec une erreur inférieure à $2.10^{-(n+1)!}$, ce qui est extraordinairement petit par rapport à l'inverse de $10^{n!}$. Pour n'importe quel physicien, ce nombre est rationnel puisqu'il diffère de $0,110001000000000000000001$ de moins de 10^{-120} qui est beaucoup plus petit que tout nombre physiquement observable. Cependant, le mathématicien sait non seulement que λ est irrationnel (son développement décimal n'est pas périodique) mais que Liouville a montré que λ est en fait un nombre transcendant. Si la vitesse d'approximation de λ n'impressionne pas le lecteur, il pourra remplacer les factorielles $n!$ par des doubles factorielles ou même par n'importe quelle fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, peut-être même non récursive. Ainsi, étant donnée une fonction quelconque $\varepsilon(q)$ des entiers positifs vers les nombres strictement positifs, tendant vers zéro lorsque q tend vers l'infini, on peut toujours trouver des nombres irrationnels α qui sont approchés par des rationnels "mieux que $\varepsilon(q)$", c'est-à-dire pour lesquels il existe une infinité de rationnels p/q tels que $|\alpha - p/q| < \varepsilon(q)$.

D'autres nombres irrationnels résistent à l'approximation autant que possible. Un lemme de Dirichlet montre que tout nombre irrationnel peut être approché par des rationnels "à $1/q^2$ près" :

Lemme : *Pour tout nombre irrationnel α, il existe une infinité de rationnels p/q ($q > 0$) tels que $|\alpha - p/q| < 1/q^2$.*

Démonstration : Considérons les $N + 1$ premiers multiples $0, \alpha, \ldots, N\alpha$ en projection sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Deux de ces projections au moins sont à une distance inférieure à $1/(N+1)$ sur le cercle. Cela signifie qu'on peut trouver $0 \leq k_1 < k_2 \leq N$ tels que $(k_2 - k_1)\alpha$ est à une distance inférieure à $1/(N + 1)$ d'un entier p. Posant $q = k_2 - k_1 \leq N$, on obtient $|q\alpha - p| < 1/(N + 1) < 1/q$. On remarquera que le fait que $|q\alpha - p| < 1/(N + 1)$ montre que q tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. CQFD

Définition : *Un nombre irrationnel α est diophantien s'il existe une constante $C > 0$ et un exposant $r \geq 2$ tels que pour tout rationnel p/q ($q > 0$) on a l'inégalité $|\alpha - p/q| > C/q^r$.*

5. Un nombre diophantien : le nombre d'or

L'exemple le plus classique de nombre mal approché par les rationnels est le nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Théorème : *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout rationnel p/q, on a $|\phi - p/q| > C/q^2$.*

En fait, on peut même montrer que $C = 1/\sqrt{5}$ convient et que ϕ est le nombre irrationnel le plus mal approché par les rationnels (voir [16] pour un énoncé précis et pour plus de détails sur ces questions d'approximation par des rationnels).

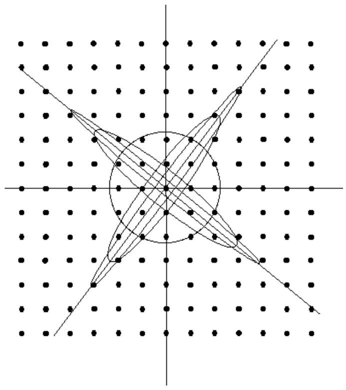

Figure 8:

Démonstration (Esquisse): Considérons la matrice $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle possède deux valeurs propres réelles : ϕ et $-\phi^{-1}$. Les pentes des directions propres sont également ϕ et $-\phi^{-1}$. Les formes linéaires $\pi_1(x,y) = y - \phi x$ et $\pi_2(x,y) = y + \phi^{-1}x$ sont des vecteurs propres de l'application linéaire transposée, de valeurs propres $-\phi^{-1}$ et ϕ respectivement. La matrice Φ opère linéairement dans le plan $\mathbb{R}^2$ et préserve les deux droites propres ainsi que le réseau des points entiers puisque ses coefficients ainsi que ceux de son inverse sont des entiers. On remarque que Φ dilate la première droite propre ($\phi > 1$) et contracte l'autre. Nous cherchons à mesurer le degré d'approximation de ϕ par des rationnels. Autrement dit, nous cherchons des points sur la droite de pente ϕ dont les coordonnées sont "aussi entières que possible". Considérons un disque D assez grand dans le plan de centre l'origine. Dans ce disque il n'y a qu'un nombre fini de points à coordonnées entières, de sorte qu'il existe évidemment une constante $C_1 > 0$ telle que pour tous les points entiers de D différents de $(0,0)$, on a : $|\pi_1(q,p)\pi_2(q,p)| > C_1$. Faisons agir la matrice Φ^n. Le disque D est transformé en l'intérieur D_n d'une ellipse, allongée le long de la droite de pente ϕ et l'estimation $|\pi_1(q,p)\pi_2(q,p)| > C_1$ pour les points entiers non nuls (q,p) situés dans D entraîne la même inégalité pour tous les points entiers non nuls de D_n. C'est clair car $|\pi_1\pi_2|$ est invariant sous l'action de Φ. Ainsi l'inégalité $|\pi_1(q,p)\pi_2(q,p)| > C_1$ est valide pour tous les points entiers de tous les D_n. Lorsque n varie dans $\mathbb{Z}$, ces D_n recouvrent tout un voisinage "hyperbolique" des droites propres, de la forme $|\pi_1(x,y)\pi_2(x,y)| < C_2$. En résumé, nous avons montré qu'il existe une constante $C_3 = \min(C_1, C_2)$ telle que pour tout point entier (q,p) du plan (différent de $(0,0)$), on a $|\pi_1(q,p)\pi_2(q,p)| > C_3$. Distinguons maintenant deux ensembles de rationnels p/q selon que $|\phi - p/q|$ est supérieur ou inférieur à une quantité fixée $C_4 > 0$ assez petite. Sur le premier ensemble, l'inégalité $|\phi - p/q| \geq C_4$ entraîne en particulier $|\phi - p/q| \geq C_4/q^2$. Sur le second ensemble, l'inégalité $|\phi - p/q| < C_4$ entraîne une inégalité de la forme $|\pi_2(q,p)| > C_5|q|$ (en fait $C_5 = \phi + \phi^{-1} - C_4 = \sqrt{5} - C_4$ convient) de sorte qu'on a $|\pi_1(q,p)| > C_3C_5^{-1}/|q|$ et donc

$|\phi - p/q| > C_3 C_5^{-1}/q^2$. On a donc bien $|\phi - p/q| > C_6/q^2$ pour tout point entier non nul avec $C_6 = \min(C_4, C_3 C_5^{-1})$. CQFD

Solution du problème de stabilité "en modèle réduit"

Reprenons le problème. Partant d'une fonction u sur le cercle, d'intégrale nulle, indéfiniment différentiable, nous cherchons à savoir s'il existe une fonction continue v dont les coefficients de Fourier sont donnés pour n non nul par

$$v_n = \frac{u_n}{(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)}.$$

Puisque u est indéfiniment différentiable, la suite des coefficients de Fourier u_n est à décroissance rapide (voir encadré 3). Les termes $(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)$ qui apparaissent au dénominateur sont non nuls mais ils peuvent être arbitrairement petits car α est irrationnel. C'est le *phénomène des petits diviseurs*. Ces dénominateurs risquent d'être si petits que les coefficients de Fourier v_n peuvent devenir très grands et la série de Fourier de v peut diverger. Toute la difficulté est donc de savoir qui l'emporte : le numérateur qui tend vers zéro rapidement ou le dénominateur qui peut être très petit. La réponse, le lecteur l'aura devinée, dépend de la qualité de l'approximation de α par les rationnels.

Supposons tout d'abord que α satisfasse une condition diophantienne $|\alpha - p/q| > C/q^r$ (voir encadré 4). Remarquons que $(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)$ n'est rien d'autre que la distance euclidienne entre les points d'affixes 1 et $\exp(2i\pi n\alpha)$ du cercle unité du plan complexe. Puisque la longueur d'une corde est plus grande que $2/\pi$ fois la longueur de l'arc qui la sous-tend, on peut écrire que $|\exp(2i\pi n\alpha) - 1|$ est supérieur à $2/\pi$ fois la longueur de l'arc de cercle joignant 1 à $\exp(2i\pi n\alpha)$, c'est-à-dire $2/\pi \times 2\pi \times$ la distance entre $n\alpha$ et l'entier p le plus proche. On obtient donc une estimation du petit diviseur de la forme :

$$|\exp(2i\pi n\alpha) - 1| > 4C/|n|^{r-1}.$$

Puisque u_n est à décroissance rapide, pour tout k, il existe une constante C_k telle que $|u_n| < C_k n^{-k}$. On obtient donc une estimation pour le coefficient de Fourier :

$$|v_n| < (C_k/4C)/|n|^{(k-r+1)}.$$

Comme ceci est valable pour tout k, la suite v_n est à décroissance r apide et la série de Fourier converge donc vers une fonction indéfiniment différentiable v. Autrement dit, la fonction continue v existe et le mouvement perturbé g est stable. Dans ce cas, nous avons obtenu notre justification de la méthode de Lagrange-Laplace, tout au moins sous la condition diophantienne et dans la cadre (un peu simpliste) de notre "modèle réduit".

Si l'angle de rotation du mouvement non perturbé est diophantien, le mouvement perturbé est toujours stable, quelle que soit la perturbation u (d'intégrale nulle et indéfiniment différentiable).

Que faire si α n'est pas diophantien, par exemple s'il s'agit du nombre de Liouville que nous avons défini plus haut ? *On peut alors construire des exemples instables c'est-à-dire pour lesquels la méthode de moyennisation ne fonctionne pas.* Soit $\alpha = \lambda$ le nombre de Liouville. Nous savons qu'il existe une suite d'entiers p_k telle que $|\alpha - p_k/10^{k!}| < 2.10^{-(k+1)!}$. Alors, pour tout k, on a $|\exp(2i\pi 10^{k!}\alpha) - 1| < 2\pi.2.10^{k!-(k+1)!} = 4\pi.10^{-k.k!}$ (cette fois-ci, on utilise le fait qu'une corde est plus courte que l'arc qui la sous-tend). Construisons maintenant une suite u_n de la manière suivante. Posons $u_0 = 0$ et $u_n = 0$ si $n > 0$ n'est pas un entier de la forme $10^{k!}$ et posons $u_{10^{k!}} = k.(\exp(2i\pi 10^{k!}\alpha) - 1)$. Définissons enfin u_n pour $n < 0$ par $u_n = \overline{u_{-n}}$ pour $n < 0$. Cette suite est évidemment à décroissance rapide car $k.10^{-k.k!} = k.(10^{k!})^{-k}$. Cela définit donc une fonction périodique u (à valeurs réelles) indéfiniment différentiable et d'intégrale nulle. Lorsque l'on calcule les coefficients v_n correspondants, on trouve, par construction même, que $v_n = 0$ si n n'est pas de la forme $10^{k!}$ et $v_{10^{k!}} = k$ de sorte que les v_n ne sont pas bornés. Il n'existe donc pas de fonction continue v dont les coefficients de Fourier sont les v_n et notre problème n'a pas de solution : il n'y a pas de fonction continue v telle que $u(x) = v(x+\alpha) - v(x)$. Nous savons que cela signifie que le mouvement perturbé n'est pas stable et que la méthode de moyennisation ne s'applique pas.

Le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser est analogue : il affirme que la moyennisation fonctionne si les fréquences qui entrent en jeu sont diophantiennes et si les perturbations sont suffisamment faibles. Un énoncé (un peu plus) précis sera donné dans la suite.

Les nombres irrationnels diophantiens sont-ils rares ou abondants ?

Nous sommes tous convaincus que les nombres rationnels sont rares parmi les nombres réels, même s'il a fallu beaucoup de travail aux grecs pour en prendre clairement conscience. Pour un mathématicien contemporain, habitué aux ensembles infinis à la Cantor, l'explication est facile : les nombres rationnels forment un ensemble dénombrable alors que les nombres réels forment un ensemble non dénombrable. Pour cette raison, supposer que le rapport des périodes de deux planètes est irrationnel semble raisonnable car le contraire a bien peu de chances de se produire.

Nous avons vu au paragraphe précédent que la distinction "rationnel/irrationnel" en mécanique céleste doit plutôt être remplacée par "non-diophantien/diophantien". J'ai déjà eu l'occasion d'expliquer que le nombre de Liouville, bien que mathématiquement irrationnel, est "physiquement rationnel" et nous venons effectivement de constater que si une fréquence est égale à ce nombre de Liouville, la méthode de moyennisation peut échouer.

Les nombres diophantiens sont-ils abondants ? Il y a essentiellement deux définitions mathématiques possibles de l'abondance et il se trouve que selon la définition choisie, la réponse est différente :

La première approche possible est celle de la *mesure de Lebesgue.* On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est *négligeable au sens de Lebesgue* ou qu'elle est de *mesure de Lebesgue nulle* si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une collection dénombrable d'intervalles $I_n \subset \mathbb{R}$ dont la somme des longueurs est inférieure à ε et dont la réunion recouvre X. On dit que $X \subset \mathbb{R}$ est de *mesure de Lebesgue pleine* si son complémentaire est négligeable au sens de Lebesgue. L'un des nombreux intérêts de ce concept est que si on dispose d'une collection dénombrable de parties X_n négligeables au sens de Lebesgue, alors leur réunion est également négligeable. Évidemment, il est important pour que cette théorie fonctionne qu'un ensemble ne puisse être à la fois négligeable et de mesure pleine. C'est un exercice laissé au lecteur.

La deuxième approche est celle de Baire. On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est *maigre au sens de Baire* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de parties fermées d'intérieurs vides. On dit que X est *résiduel au sens de Baire* si son complémentaire est maigre. De même qu'avec les définitions précédentes, on peut montrer qu'une réunion dénombrable de parties maigres est maigre (facile) et qu'une partie ne peut à la fois être maigre et résiduelle (c'est le théorème de Baire).

Quelle est la notion la plus adaptée à notre intuition de l'abondance ? La question est délicate et engendre parfois de violentes polémiques entre mathématiciens. Pour le cas qui nous intéresse ici, celui de l'abondance des nombres diophantiens, la situation est particulièrement caricaturale.

Théorème : *L'ensemble des nombres irrationnels diophantiens est à la fois maigre au sens de Baire et de mesure de Lebesgue pleine.*

Les démonstrations ne sont pas difficiles mais instructives. Écrivons la définition de l'ensemble Dioph $\subset \mathbb{R}$ des nombres diophantiens en utilisant des quantificateurs :

$$\mathrm{Dioph} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists r \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \ : |\alpha - p/q| \geq \frac{1}{nq^r}\}.$$

Ainsi Dioph est une réunion dénombrable indexée par r et n d'ensembles fermés qui sont clairement d'intérieurs vides : Dioph est maigre au sens de Baire.

Pour montrer que Dioph est de mesure de Lebesgue pleine, fixons un réel $r > 2$ et considérons l'ensemble

$$\mathrm{Dioph}_r = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^\star\ \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \ : |\alpha - p/q| \geq C/q^r\}.$$

Il suffit de montrer que Dioph_r est de mesure de Lebesgue pleine car $\mathrm{Dioph}_r \subset \mathrm{Dioph}$. On montre pour cela que son complémentaire rencontre l'intervalle $[0,1]$ sur un ensemble négligeable au sens de Lebesgue (on remarquera que Dioph est invariant par les translations entières). En effet $[0,1] \setminus \mathrm{Dioph}_r$ est l'intersection avec $[0,1]$ des ensembles suivants définis pour $C > 0$:

$$\mathrm{NonDioph}_{r,C} = \bigcup_{q=1}^{+\infty} \bigcup_{p=0}^{q}]\frac{p}{q} - \frac{C}{q^r}, \frac{p}{q} - \frac{C}{q^r}[.$$

Il s'agit d'une réunion dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $2C \sum_q \frac{q+1}{q^r}$. Cette somme converge car $r > 2$ et la somme est arbitrairement petite si C est assez petit. Ainsi, par définition, $\mathrm{NonDioph}_{r,C}$ est négligeable et ceci montre que Dioph est de mesure de Lebesgue pleine. CQFD

Évidemment, l'énoncé précédent n'est pas contradictoire mathématiquement mais il nous laisse dans l'embarras. Quel est le sens que le physicien préférera donner au concept d'abondance ? Mon expérience personnelle semble indiquer que les physiciens n'ont pas non plus de solution miracle à proposer. Je reviendrai sur cette question dans le dernier paragraphe mais pour l'instant faisons "comme si" le bon concept était celui de Lebesgue.

Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des angles de rotation pour lesquels le mouvement perturbé est stable est de mesure de Lebesgue pleine et ce résultat doit donc nous satisfaire puisqu'il couvre la majorité des cas (mais n'oublions pas que si nous avions préféré Baire à Lebesgue, nous aurions la conclusion inverse).

Un énoncé du théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser

Le théorème KAM est difficile à énoncer précisément dans toute sa généralité. Je vais d'abord énoncer un théorème précis qui est un cas particulier et j'essaierai ensuite de décrire le théorème général mais je devrai alors être bien plus flou.

Considérons une transformation f du cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ définie cette fois par $f(x, y) = (x + y, y)$. Ici encore, les cercles $y = const$ sont invariants et f induit une rotation sur chacun d'entre eux mais contrairement au "modèle réduit", l'angle de cette rotation varie en fonction du cercle puisqu'il est égal à y. On appelle souvent cette application un "twist" pour des raisons évidentes. Perturbons maintenant f, c'est-à-dire que nous considérons une application g de la forme

$$g(x, y) = (x + y + \varepsilon_1(x, y), y + \varepsilon_2(x, y)).$$

Bien entendu, on demande que g envoie le cylindre sur lui-même, c'est-à-dire que $\varepsilon_1(x, \pm 1) = 0$ identiquement. On suppose également que cette application g préserve l'aire, c'est-à-dire que son jacobien est égal identiquement à 1. Fixons un nombre irrationnel α dans l'intervalle $[-1, +1]$ et supposons qu'il soit diophantien. *Le théorème KAM affirme que si $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont assez petits, il existe une courbe invariante par g proche de la courbe $y = \alpha$ et sur laquelle la dynamique de g est conjuguée à une rotation d'angle α.*

Il faut d'abord donner un sens à "$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petits". Le théorème initial était formulé en 1954 par Kolmogorov dans l'espace des fonctions analytiques réelles et c'est dans cette topologie (un peu exotique) qu'il faut comprendre la petitesse [13]. Kolmogorov ne donnait que des indications générales sur la preuve et c'est à Arnold qu'on doit la preuve rigoureuse de ce théorème en 1961, toujours dans le cas analytique [1]. Puis, en 1962, Moser réussit le tour de force de démontrer le théorème dans l'espace des fonctions infiniment différentiables [15]. En fait, Moser utilise des fonctions qui sont 333 fois différentiables et la topologie de la convergence uniforme sur ces 333 dérivées... Le simple fait qu'il soit nécessaire d'utiliser tant de dérivées montre la difficulté de la preuve. Aujourd'hui, on sait que le théorème est vrai avec 4 dérivées et faux avec 3 [10].

Je renonce évidemment à tenter de donner une preuve du théorème. Je voudrais simplement expliquer que, contrairement au cas du modèle réduit, il s'agit d'un problème *non linéaire* dans l'espace (de dimension infinie) des courbes. La linéarisation de ce problème mène essentiellement au problème que nous avons traité. Pour passer d'un problème non linéaire à un problème linéaire le mathématicien utilise le théorème des fonctions implicites, bien pratique dans un espace de Banach mais faux dans les espaces de Fréchet qui se présentent ici. Voilà pourquoi ce théorème requiert des techniques d'analyse fonctionnelles assez formidables (voir à ce sujet la deuxième partie de [10]).

À chaque nombre diophantien α correspond un voisinage dans lequel s'applique le théorème. Plus α est diophantien, c'est-à-dire plus il s'approche difficilement par les rationnels et plus le cercle invariant d'angle α est robuste sous l'effet de la perturbation. Ainsi, une perturbation $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ étant donnée, on ne peut pas appliquer le théorème à tous les nombres diophantiens. (Si l'on pouvait changer l'ordre des quantificateurs dans les théorèmes...) Typiquement, la perturbation étant donnée, un certain nombre de cercles invariants subsistent et les autres “se cassent”. Le théorème garantit par ailleurs que pour une perturbation assez petite, la mesure de Lebesgue de l'ensemble des cercles qui résistent est arbitrairement proche de la mesure totale. On peut donc dire que si on perturbe f un peu, il y a de bonnes chances pour qu'une orbite reste située sur un cercle et presque périodique. La situation dans la zone dite d'*instabilité*, hors de ces cercles invariants, est très compliquée : beaucoup de problèmes restent ouverts et la recherche est très active.

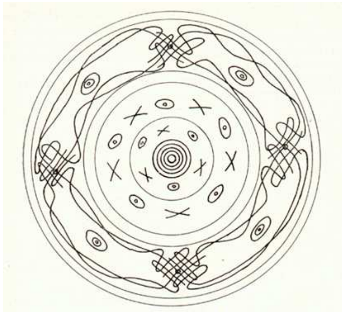

Figure 9: Courbes invariantes [5]

Quel est le lien entre ce théorème et la mécanique céleste ? Considérons le problème restreint des trois corps : deux masses tournent l'une autour de l'autre de manière képlérienne et une troisième masse infiniment petite gravite dans un plan. Cette troisième masse est attirée par les deux autres mais ne les perturbe pas. Lorsque l'on veut décrire la dynamique de la troisième masse, on introduit l'espace des phases : il faut deux coordonnées de position et deux coordonnées de vitesse, ce qui donne un espace de dimension 4. La conservation de l'énergie totale astreint le mobile à rester dans une variété de dimension 3. Il s'agit donc d'étudier la dynamique d'un champ de vecteurs sur une certaine variété de dimension 3. Pour cela on utilise la méthode de la section de Poincaré qui consiste à étudier les retours successifs du mobile sur une surface de section et on est donc conduit à itérer une transformation en dimension 2 du type que nous avons considéré précédemment. Sans entrer dans les détails, le théorème KAM que nous avons cité permet de démontrer la stabilité du système formé de ces trois corps. Il faudrait beaucoup plus de pages, de formules et de figures pour justifier cela.

Lorsque l'on considère un "vrai" système solaire, avec beaucoup de planètes, l'espace des phases est de dimension plus grande, ainsi que la section de Poincaré et les cercles invariants doivent être remplacés par des tores invariants de dimension plus grande. Cela complique l'énoncé du théorème mais l'esprit est le même : ces tores invariants résistent aux perturbations si les rapports des frequences dans le systeme initial sont suffisamment diophantiennes. Le théorème général de KAM traite de ce cas.

La conséquence "physique" de KAM est alors la suivante. *Si "on" lance un systèmes de planètes de masses suffisamment faibles autour d'un soleil de grande masse dans des conditions initiales proches de celles d'un systèmes képlérien, la dynamique qui en résultera sera presque périodique, tout au moins pour un ensemble de conditions initiales dont la mesure de Lebesgue devient de plus en plus pleine à mesure que les masses des planètes tendent vers* 0. Pour l'ensemble complémentaire de conditions initiales, le théorème ne dit rien, à part le fait qu'elles sont rares (au sens de la mesure de Lebesgue).

Voilà pourquoi notre système solaire “a de bonnes chances d’être presque périodique”...

Le théorème KAM est-il utile dans notre système solaire ?

Le théorème KAM et sa preuve sont magnifiques. D’un certain point de vue, cela peut suffire au mathématicien. Il n’est pas dans mon intention de débattre ici en quelques lignes du rapport complexe entre les mathématiques et la physique mais l’exemple KAM pourrait sans aucun doute servir de point de départ.

D’origine physique, le problème a engendré toute une branche des mathématiques qui se suffit parfaitement à elle-même, qui engendre à son tour d’autres problèmes bien souvent sans aucun contenu physique. Mais il me semble que même le mathématicien le “plus pur” se doit de revenir sur le problème initial : a-t-il été résolu ? Voici en vrac quelques éléments de réponse :

Le théorème KAM s’applique pour des masses “suffisamment faibles”. Si on examine la preuve de près on réalise qu’elle s’applique à des masses ridiculement faibles, inférieures à ce que l’on constate dans notre système solaire de plusieurs ordres de grandeurs. Il est clairement nécessaire d’obtenir des versions efficaces et effectives de KAM, disons pour des masses de l’ordre du millième de celle du soleil. On en est encore loin et il faut bien constater que peu de collègues trouvent l’enjeu mathématique passionnant.

Les forces qui agissent dans le système solaire sont essentiellement gravitationnelles mais d’autres forces sont non hamiltoniennes (le vent solaire par exemple peut “ralentir” les planètes). Après des centaines de milliers d’années, les effets sont peut-être non négligeables et le théorème KAM ne peut nous aider à comprendre la situation. D’ailleurs, y a-t-il un intérêt autre que philosophique ou mathématique de montrer que le système solaire “abstrait” (= hamiltonien) est stable ou instable ? Le physicien veut comprendre la situation pour l’avenir proche (disons que quelques milliards d’années lui suffisent).

La réunion des tores invariants donnés par le théorème a une grande mesure de Lebesgue mais elle est d’intérieur vide. Quel est le bon concept d’abondance en physique ? Comme je l’ai expliqué plus haut, les mathématiciens ne peuvent répondre à cette question et c’est aux physiciens de leur montrer la voie.

L’expérience indique que beaucoup de fréquences rencontrées dans le système solaire semblent très rationnelles. L’exemple suivant, tiré de [7], est véritablement impressionnant. On considère les fréquences ω_i^{obs} $(i = 1, ..., 9)$ de rotation des 9 planètes (mesurées dans une unité telle que celle de Jupiter est égale à 1). Il s’avère qu’en modifiant *très peu* ces valeurs, on peut trouver des fréquences “théoriques” ω_i^t qui sont *exactement* reliées entre elles par des relations linéaires entières : le tableau qui suit exhibe une matrice 9×9 à coefficients entiers petits, contenant beaucoup de zéros, qui annule exactement le vecteur des fréquences théoriques. On notera que les écarts $\Delta\omega/\omega = (\omega^{obs} - \omega^t)/\omega$ sont vraiment petits.

	Planète	ω_i^{obs}	ω_i^t	$\Delta\omega/\omega$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
1	Mercure	49,22	49,20	0,0004	1	-1	-2	-1	0	0	0	0	0
2	Vénus	19,29	19,26	0,0015	0	1	0	-3	0	-1	0	0	0
3	Terre	11,862	11,828	0,0031	0	0	1	-2	1	-1	1	0	0
4	Mars	6,306	6,287	0,0031	0	0	0	1	-6	0	-2	0	0
5	Jupiter	1,000	1,000	0,0000	0	0	0	0	2	-5	0	0	0
6	Saturne	0,4027	0,4000	0,0068	0	0	0	0	1	0	-7	0	0
7	Uranus	0,14119	0,14286	-0,0118	0	0	0	0	0	0	1	-2	0
8	Neptune	0,07197	0,07143	0,0075	0	0	0	0	0	0	1	0	-3
9	Pluton	0,04750	0,04762	-0,0025	0	0	0	0	0	1	0	-5	1

Le livre [7] contient un paragraphe très intéressant sur ces résonances constatées dans notre système solaire. On y discute en particulier l'hypothèse de Moltchanov selon laquelle "tout système oscillatoire ayant subi une évolution prolongée est nécessairement en résonance et est régi par une famille de nombres entiers". Ainsi, pour Moltchanov, les petites forces non hamiltoniennes éloignent les systèmes des fréquences diophantiennes et les conduisent dans la zone où le théorème KAM est inopérant... Justifier ou infirmer cette hypothèse me paraît un magnifique défi pour les mathématiciens d'aujourd'hui.

Bibliographie

[1] V. Arnold, Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian (en russe), Uspehi Mat. Nauk, **18** (no. 5) **113**, 13–40, 1963.

[2] V. Arnold, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics (en russe), Uspehi Mat. Nauk, **18** (no. 6) **114**, 91–192, 1963.

[3] V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, éditions MIR, 1976.

[4] V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles*, éditions MIR, 1980.

[5] V. Arnold & A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.

[6] J. Barrow-Green, *Poincaré and the three body problem.* History of Mathematics, **11**. American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 1997.

[7] V. Bélitski, *Essais sur le mouvement des corps cosmiques*, éditions MIR, traduction française 1986.

[8] N. Copernic, *Des Révolutions des Orbes Célestes*, traduction de Koyré, Librairie Blanchard, 1970.

[9] G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 12 (2001), 125–152, 2002.

[10] M. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérique **144**, 1986.

[11] J. H. Hubbard, Le théorème KAM. Ce volume.

[12] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for every large Reynold's numbers, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, **30** 301-305, 1941.

[13] A. N. Kolmogorov, Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, Vol. 1, 315–333, 1954.

[14] T. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[15] J. Moser, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Gttingen Math.-Phys. Kl. II, 1–20, 1962.

[16] I. Niven, *Irrational numbers.* The Carus Mathematical Monographs, No. 11. The Mathematical Association of America. Distributed by John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1956.

[17] I. Peterson, *Le chaos dans le système solaire*, Pour la Science 1995.

[18] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Œuvres volume VII, Gauthier Villars 1951.

[19] S. Sternberg, *Celestial Mechanics, parts I and II*, W.A. Benjamin 1969.

[20] C. Zeeman, Gears from ancient greeks, conférence dont les transparents sont disponibles à http://www.math.utsa.edu/ecz/

[21] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history, site internet d'histoire des mathématiques.

Unité de Mathématiques
Pures et Appliquées
de l'ENS Lyon
U.M.R. 5669 du CNRS

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 FRANCE

ghys@umpa.ens-lyon.fr