

SIGNATURE ASYMPTOTIQUE D'UN CHAMP DE VECTEURS EN DIMENSION 3

JEAN-MARC GAMBAUDO AND ÉTIENNE GHYS

Abstract

Consider a volume preserving vector field defined in some compact domain of 3-space and tangent to its boundary. A long piece of orbit can be made into a knot by connecting its endpoints by some arc whose length is less than the diameter of the domain. In this paper, we study the behaviour of the signatures of these knots as the lengths of the pieces of orbits go to infinity. We relate this “asymptotic signature” to the “asymptotic Hopf invariant” that has been studied by Arnold.

1. Des nœuds aux champs de vecteurs

Considérons un domaine compact \mathcal{D} de l'espace \mathbf{R}^3 bordé par une surface lisse, et un champ de vecteurs X de classe C^∞ défini sur \mathcal{D} et tangent au bord. Les orbites périodiques de X nous fournissent un système de nœuds et d'entrelacs dont l'étude est parfois source d'informations importantes sur la dynamique globale du champ considéré (voir [3] et [8]). Pour étudier les nœuds et les entrelacs nous disposons d'une importante collection d'invariants ; certains sont élémentaires (comme, p. ex., le nombre minimum de croisements d'une projection d'un nœud) et d'autres beaucoup plus élaborés (comme les polynômes de Jones) ; voir [5], [12], [16], et [17]. Dans le cadre dynamique d'un champ de vecteurs, il est tentant d'essayer de généraliser ces invariants à d'autres objets que les orbites périodiques et l'idée naturelle est d'étendre leur définition aux mesures invariantes du champ de vecteurs.

C'est dans cet esprit que V. Arnold [2], [3] définit un invariant associé aux champs de vecteurs qui préservent une forme volume. Cet invariant généralise la notion de *nombre d'enlacement* de paires d'orbites périodiques.

Le but de cet article est d'étudier un autre invariant des nœuds, la signature, de le généraliser aux mesures invariantes d'un champ de vecteurs et d'établir un lien entre cette *signature asymptotique* et l'invariant introduit par Arnold.

DUKE MATHEMATICAL JOURNAL

Vol. 106, No. 1, © 2000

Reçu le 16 février 2000.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M25, 37A05 ; Secondary 57M27, 37C50.

1.1. Rappel : enlacement et enlacement asymptotique

Si k_1 et k_2 sont deux courbes fermées simples orientées et disjointes de \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire deux *nœuds* disjoints, le *nombre d'enlacement* de k_1 et k_2 , noté $\text{Enl}(k_1, k_2)$ est défini de la manière suivante. Soit \mathcal{S}_1 une surface orientée à bord, plongée dans \mathbf{R}^3 , dont le bord est le nœud orienté k_1 ; c'est une *surface de Seifert* associée au nœud k_1 . Le nombre d'enlacement de k_1 et k_2 est alors le nombre d'intersection algébrique de k_2 avec \mathcal{S}_1 . Il est facile de s'assurer que ce nombre ne dépend pas du choix de la surface de Seifert \mathcal{S}_1 et qu'il est symétrique en k_1, k_2 (voir, p. ex., [5] et [17]).

Supposons maintenant que le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$ soit équipé d'une forme volume *vol* invariante par le flot ϕ^t du champ X . Choisissons une métrique riemannienne auxiliaire générique sur \mathbf{R}^3 et, pour tout couple (x_1, x_2) de points de \mathcal{D} , choisissons l'une des géodésiques γ_{x_1, x_2} de longueur minimale joignant x_1 à x_2 . Soient $T > 0$ et x un point (ni singulier ni périodique) de \mathcal{D} . L'arc d'orbite joignant x à $\phi^T(x)$ suivi de l'arc de géodésique $\gamma_{\phi^T(x), x}$ est un lacet qui, pour presque tout x et T , est un nœud $k(T, x)$. Pour presque tout x_1 et x_2 dans \mathcal{D} et pour presque tout T_1 et $T_2 > 0$, les deux nœuds $k(T_1, x_1)$ et $k(T_2, x_2)$ sont disjoints et Arnold montre que la limite :

$$\lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_1 T_2} \text{Enl}(k(T_1, x_1), k(T_2, x_2)) = A_X(x_1, x_2)$$

existe presque partout et définit une fonction intégrable de (x_1, x_2) ne dépendant pas du choix de la métrique riemannienne auxiliaire. L'*invariant d'Arnold* du champ X , noté $\mathcal{A}(X)$, est défini comme :

$$\mathcal{A}(X) = \int \int_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} A_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

où $dx_1 dx_2$ est l'élément de volume sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ provenant de *vol*.

Il est important de constater que cette définition donnée pour la mesure induite par la forme volume, peut se généraliser aux mesures finies, invariantes sous l'action du flot ϕ^t , et qui ne chargent pas la réunion des orbites périodiques et des singularités (voir à ce sujet [6] et [7]). L'invariant d'Arnold d'un champ X dont le flot préserve une mesure μ est alors :

$$\mathcal{A}_\mu(X) = \int \int_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} A_X(x_1, x_2) d\mu(x_1) d\mu(x_2).$$

1.2. Énoncé du résultat principal : signature asymptotique

À partir de la surface de Seifert \mathcal{S} d'un nœud k dans \mathbf{R}^3 , de nombreux autres invariants peuvent être construits. C'est en particulier le cas de la *signature* d'un nœud dont nous rappelons à présent la définition. Considérons un champ de vecteurs défini dans un voisinage de la surface \mathcal{S} , transverse à \mathcal{S} et pointant dans la direction positive

(déterminée par l'orientation de \mathcal{S} et par celle de l'espace ambiant). Appelons ψ^t le flot de ce champ. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, appelons \mathcal{S}_ϵ la surface obtenue en poussant \mathcal{S} par le flot ψ^t pendant le temps ϵ . On définit alors une forme bilinéaire :

$$\Theta : H_1(\mathcal{S}, \mathbf{R}) \times H_1(\mathcal{S}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R},$$

sur le premier groupe d'homologie de \mathcal{S} de la manière suivante. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ un système de courbes fermées simples et tracées sur \mathcal{S} qui représente une base $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{2g}$ de $H_1(\mathcal{S}, \mathbf{R})$, alors

$$\Theta(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j) = \text{Enl}(\alpha_i, \psi^\epsilon(\alpha_j)),$$

pour $i, j = 1, \dots, 2g$. La forme bilinéaire ainsi obtenue, est alors rendue symétrique :

$$Q(\alpha, \beta) = \Theta(\alpha, \beta) + \Theta(\beta, \alpha).$$

La *signature du nœud* k , que l'on note $\sigma(k)$, est alors la signature de la forme quadratique associée à Q . Pour éviter toute confusion, rappelons que la signature d'une forme quadratique qui s'écrit comme la somme de a carrés moins la somme de b carrés de formes linéaires indépendantes est la différence $a - b$. Il est clair que $\sigma(k)$ ne dépend pas de la base de $H_1(\mathcal{S}, \mathbf{Z})$ choisie ; on peut aussi montrer, avec un peu plus de travail, qu'elle ne dépend pas de la surface de Seifert considérée et que c'est un invariant topologique du nœud. Nous rappellerons plus loin une définition plus intrinsèque et un algorithme pratique de calcul de la signature à partir d'une projection du nœud sur un plan.

De la même façon que pour l'enlacement asymptotique d'une paire d'orbites d'un champ de vecteurs sur \mathcal{D} , nous pouvons étudier le comportement asymptotique de la signature du nœud $k(T, x)$ obtenu comme précédemment en fermant un arc d'orbite de longueur T issu de x avec un arc de géodésique joignant $\phi^T(x)$ à x . Le but de ce travail est de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME PRINCIPAL 1.1

Soit \mathcal{D} une sous-variété de \mathbf{R}^3 compacte connexe, à bord lisse, et X un champ de vecteurs de classe C^∞ dans \mathcal{D} , tangent au bord, dont les singularités sont linéarisables de type col, et dont le flot laisse invariant une mesure de probabilité μ qui ne charge pas la réunion des orbites périodiques et des singularités.

Alors, pour μ -presque tout point x dans \mathcal{D} , la quantité $\sigma(k(T, x))/T^2$ converge quand T tend vers l'infini.

Si de plus le flot est ergodique pour la mesure μ , on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \sigma(k(T, x)) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu(X)$$

où $\mathcal{A}_\mu(X)$ désigne l'invariant d'Arnold.

Si la mesure μ n'est pas ergodique, la limite est $(1/2)\mathcal{A}_{\mu_x}(X)$ où μ_x est la composante ergodique associée à x (voir ci-dessous).

Remarque 1

Nous supposons dans le théorème que la variété \mathcal{D} , son bord, et le champ de vecteurs X sont de classe C^∞ même s'il est facile de se convaincre que beaucoup moins de régularité est nécessaire. De même, l'hypothèse sur la nature des singularités n'est utile que pour des raisons techniques qui peuvent sans doute être contournées. En outre, c'est seulement pour simplifier l'exposé de la démonstration que nous ne considérons pas le cas des singularités de type puits ou sources ; celles-ci étant de toute façon disjointes du support de toute mesure invariante ne chargeant pas les singularités.

Remarque 2

On dit qu'un flot est *ergodique* pour une mesure invariante μ (ou que la mesure est ergodique) si toute fonction mesurable invariante par le flot est constante μ -presque partout. Rappelons rapidement le résultat de décomposition ergodique (voir [14]). Supposons qu'un flot ϕ^t préserve une mesure de probabilité μ . Pour chaque point x , considérons la mesure de probabilité $\mu(T, x)$ qui est équirépartie sur l'arc d'orbite joignant x à $\phi^T(x)$. Il se trouve que pour μ -presque tout point x , les probabilités $\mu(T, x)$ convergent lorsque T tend vers l'infini vers une mesure μ_x qui est invariante par le flot et ergodique. De plus, on a une décomposition ergodique de μ en les μ_x dans le sens suivant : pour toute fonction mesurable bornée f sur l'espace ambiant,

$$\int f d\mu = \int \left(\int f d\mu_x \right) d\mu.$$

La mesure μ_x est appelée la *composante ergodique* de μ associée au point x . Nous faisons l'hypothèse que la mesure invariante μ que nous considérons ne charge pas la réunion des orbites périodiques et des singularités. Cela signifie que pour μ -presque tout point x , la mesure μ_x n'est ni une masse de Dirac concentrée en un point singulier ni une mesure uniformément répartie sur une orbite périodique. Cette hypothèse est donc très naturelle lorsqu'il s'agit d'étudier le comportement asymptotique des orbites.

Remarque 3

Le même résultat est également valable pour un champ de vecteurs dans la sphère \mathbf{S}^3 et, plus généralement, pour un champ de vecteurs défini dans une variété compacte de dimension 3 qui est une sphère d'homologie. Nous ne présentons pas ce cas général car il n'apporterait pas grand chose aux idées de preuves.

1.3. Rappel sur le calcul pratique de l'enlacement et de la signature

J. Milnor donne dans [15] une définition intrinsèque de la signature d'un nœud orienté, indépendante du choix d'une surface de Seifert. Soit k un nœud, considéré maintenant comme plongé dans la sphère \mathbf{S}^3 de dimension 3. Le nombre d'enlacement avec k définit un homomorphisme du groupe fondamental de $\mathbf{S}^3 \setminus k$ vers \mathbf{Z} . Le revêtement M_k de $\mathbf{S}^3 \setminus k$ associé au noyau de cet homomorphisme est donc une variété de dimension 3 munie d'une action libre de \mathbf{Z} dont on note \mathbf{t} le générateur. Il se trouve que le groupe de cohomologie rationnelle $H^1(M_k, \mathbf{Q})$ est de dimension finie, que $H^2(M_k, \mathbf{Q})$ est de dimension 1 et que le produit cup $H^1(M_k, \mathbf{Q}) \times H^1(M_k, \mathbf{Q}) \rightarrow H^2(M_k, \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$ définit une forme *alternée* non dégénérée sur $H^1(M_k, \mathbf{Q})$. Bien sûr, \mathbf{t} induit sur $H^1(M_k, \mathbf{Q})$ une isométrie \mathbf{t}^* de cette forme alternée de sorte qu'on peut construire une forme bilinéaire *symétrique* B sur $H^1(M_k, \mathbf{Q})$ par :

$$B(\alpha, \beta) = \mathbf{t}^*(\alpha) \cup \beta + \alpha \cup \mathbf{t}^*(\beta).$$

La signature du nœud est la signature de cette forme bilinéaire symétrique canonique. Il faut encore ajouter que l'identification $H^2(M_k, \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$ n'est pas canonique mais que son signe est bien défini par l'orientation du nœud et de la sphère, de sorte que la signature de B a bien un sens.

Fort heureusement, il existe des méthodes plus simples pour calculer le nombre d'enlacement et la signature. Nous les rappelons ici ; elles nous seront utiles dans la démonstration du théorème.

Nous considérons de nouveau les nœuds et les entrelacs dans \mathbf{R}^3 . Le *diagramme* d'un entrelac de l'espace \mathbf{R}^3 est l'image par une projection générique de cet entrelac sur un plan \mathbf{R}^2 (pas de points triples et toutes les intersections sont transverses) parallèlement à un vecteur \vec{t} , où l'on prend soin de rappeler, à chaque point double, le brin qui était "au dessus" (voir figure 1). Cette projection induit une orientation de \mathbf{R}^2 (celle qui est donnée par un couple ordonné de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) de \mathbf{R}^2 tel que le triplet $(\vec{t}, \vec{u}, \vec{v})$ soit d'orientation positive).

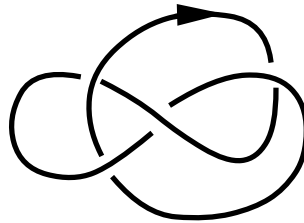


Figure 1



Figure 2

Pour calculer le nombre d'enlacement de deux nœuds k_1 et k_2 , on considère l'ensemble des points de croisement de la projection de k_1 et de celle de k_2 . Dans cet ensemble on ne retient que les points y_1, \dots, y_n où k_1 passe "au dessus" de k_2 . L'orientation des deux nœuds permet de séparer ces points de croisement en deux classes. Si l'orientation donnée par la paire ordonnée de vecteurs respectivement tangents en y_i à la projection de k_1 et de k_2 est positive, on assigne à y_i l'indice $+1$; on lui assigne l'indice -1 si elle est négative (voir figure 2). On obtient alors le nombre d'enlacement de k_1 et k_2 en faisant la somme des indices sur tous les y_i .

C. McA. Gordon et R. A. Litherland proposent dans [10] une méthode de calcul de la signature d'un nœud k qui utilise également un diagramme de k . Ce diagramme induit une décomposition simpliciale du plan et on colorie les faces de cette décomposition en blanc et en noir, de manière à ce que deux faces qui ont un côté en commun soient de couleurs différentes et que la face non bornée soit noire. Ce coloriage nous permet d'associer un indice $\theta(y)$ à chaque sommet y du graphe comme le montre la figure 3.



Figure 3

Il permet également de distinguer deux types de sommets. Un sommet est de *type I* si les orientations locales des brins permettent d'orienter localement le bord des faces noires et de *type II* sinon (voir figure 4). On appelle ν la somme des indices $\theta(y)$ sur tous les sommets de *type II*. On ne s'intéresse plus alors qu'aux faces noires :



Figure 4

F_0, F_1, \dots, F_m (où F_0 désigne la face noire non bornée). Pour chaque $0 \leq i, j \leq m$, on pose :

- $g_{ij} = -\sum_{y \in \partial F_i \cap \partial F_j} \theta(y)$, pour $i \neq j$;
- $g_{ii} = \sum_{j \neq i} g_{ij}$.

On définit la matrice (m, m) symétrique \mathcal{G} , appelée *Matrice de Goeritz*, comme la matrice des g_{ij} pour $1 \leq i, j \leq m$. On note $\sigma(\mathcal{G})$ la signature de cette matrice symétrique. La signature du nœud est donnée par la relation :

$$\sigma(k) = \sigma(\mathcal{G}) - \nu.$$

Remarquons que la méthode pratique que nous venons de rappeler pour calculer la signature d'un nœud (tout comme la définition) impose le calcul de la signature d'une forme quadratique ; un calcul que nous ne pourrions donc éviter dans la démonstration du théorème. À cette fin, nous insérons ici un lemme dont la démonstration facile est laissée au lecteur.

LEMME 1.2

Soient \mathcal{G} une forme quadratique définie sur un espace vectoriel réel de dimension finie E . Soit E' un sous-espace vectoriel de E de codimension 1 et \mathcal{G}' la restriction de la forme \mathcal{G} à E' . Alors :

$$|\sigma(\mathcal{G}) - \sigma(\mathcal{G}')| \leq 1.$$

Comme l'ont déjà remarqué plusieurs auteurs (voir [18]), ceci entraîne une propriété de continuité pour la signature. Si l'on considère un diagramme de nœud et si l'on modifie un croisement, en faisant passer en dessous un brin qui passait au dessus, la formule précédente montre que la signature du nœud change au plus de 2 (remarquons en passant que la signature est toujours un entier pair). Si l'on appelle "distance gordienne" entre deux nœuds k_1 et k_2 , le nombre minimum de croisements de brins nécessaires pour passer de k_1 à k_2 , on obtient que la différence entre les signatures de deux nœuds est majorée par deux fois la distance gordienne. C'est précisément

cette propriété de continuité qui justifie notre choix de la signature comme candidat à une généralisation aux champs de vecteurs. En effet, un long morceau d'orbite d'un champ de vecteurs n'est pas un nœud ; pour en faire un nœud, il nous faut refermer par un arc de géodésique un peu arbitraire et c'est la propriété de continuité qui permet d'affirmer que la signature du nœud ainsi obtenu ne dépend "pas trop" de l'arc utilisé pour fermer. Puisque nous divisons la signature de $k(T, x)$ par T^2 avant de passer à la limite, cette ambiguïté dans la définition du nœud disparaît donc asymptotiquement.

1.4. Deux exemples

Nous allons décrire deux exemples typiques qui illustrent le théorème, les *champs complètement intégrables* et les *flots de Lorenz*. Ces deux exemples vont fournir les idées principales de la preuve du cas général.

Considérons tout d'abord le diagramme dans la figure 5. Il ne s'agit pas d'un diagramme de nœud mais plutôt d'une infinité de droites $x = i$ (pour i entier), parcourues de bas en haut (*i.e.*, y croissant), situées au dessus d'une infinité de droites horizontales $y = j$ (pour j entier) parcourues de gauche à droite (*i.e.*, x croissant). Bien que ce ne soit pas un diagramme de nœud, on peut construire une "matrice de Goeritz infinie" \mathcal{G} associée à cette situation. On commence par colorier en noir les faces $F_{i,j} = [i, i + 1] \times [j, j + 1]$ telles que $i + j$ est pair. L'indice θ associé à chaque point double (i, j) est ± 1 suivant que $i + j$ est pair ou impair. Les lignes et les colonnes de la matrice \mathcal{G} sont indexées par les faces noires. Le coefficient de \mathcal{G} associé au couple de faces noires $F_{i,j}, F_{i',j'}$ est égal à zéro si les faces coïncident ou si elles sont disjointes, $+1$ (*resp.*, -1) si elles se rencontrent en un point et si leur union est "parallèle" à la première (*resp.*, seconde) diagonale.

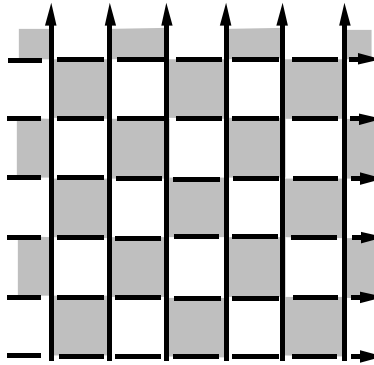


Figure 5

Considérons maintenant la trace du diagramme précédent sur un ouvert borné

\mathcal{U} du plan (voir figure 6). Nous nous proposons d'évaluer la signature de la matrice de Goeritz associée à ce nouveau diagramme, fini cette fois. Explicitement, nous considérons les faces noires $F_{i,j}$ qui sont contenues dans \mathcal{U} et nous appelons $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ la matrice symétrique obtenue en restreignant \mathcal{G} aux lignes et colonnes correspondant à ces faces noires particulières.

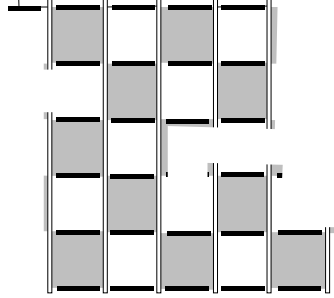


Figure 6

LEMME 1.3

La signature de la matrice $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ est nulle.

Démonstration

La signature d'une forme quadratique dégénérée est la signature de la forme non dégénérée associée, c'est-à-dire obtenue après passage au quotient par son noyau. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E , soit K son noyau et supposons que la forme non dégénérée associée sur E/K se décompose en une somme de a carrés moins b carrés, de sorte que sa signature est $a - b$. Supposons pour fixer les idées que $b \leq a$. Un sous-espace isotrope (*i.e.*, sur lequel la forme s'annule) dans E/K est de dimension au plus b . Supposons maintenant qu'on puisse décomposer E comme somme directe de deux sous-espaces isotropes E_1 et E_2 . Nous affirmons alors que la signature de Q est nulle. Puisque les projections de E_1 et E_2 sur E/K sont de dimension au plus b , c'est qu'ils intersectent K sur un espace de dimension au moins $\dim E_i - b$. La dimension de K est donc au moins $\dim E - 2b$. Comme cette dimension est aussi $\dim E - (a + b)$, on en déduit que $a \leq b$ et donc que $a = b$, c'est-à-dire que la signature est nulle.

Revenons à la preuve du lemme. On peut distinguer deux types de faces noires, selon que i est pair ou impair. Puisque deux faces noires distinctes de même type ne se rencontrent pas, les vecteurs de base associés aux faces d'un même type fournissent un

sous-espace isotrope pour la matrice symétrique \mathcal{G}_η . Ces deux sous-espaces isotropes sont en somme directe de sorte que l'observation précédente conclut le lemme. \square

Ce lemme étant établi, nous pouvons étudier le cas des flots “complètement intégrables.” À vrai dire, puisqu'il ne s'agit que de l'étude d'un exemple, nous allons nous contenter d'un cas particulièrement simple.

Fixons deux réels $0 < r < R$ et considérons le tore solide de révolution \mathcal{D} dans \mathbf{R}^3 défini par le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} (\rho, \phi, \psi) &\in [0, r] \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \\ &\longmapsto ((R + \rho \cos \psi) \cos \psi, (R + \rho \cos \psi) \sin \psi, r \sin \psi). \end{aligned}$$

Fixons une fonction $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ et considérons le champ de vecteurs X dans \mathcal{D} qui, dans ce paramétrage, s'écrit :

$$X = \frac{\partial}{\partial \psi} + \omega(\rho) \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Pour éviter les problèmes de définition au voisinage de l'âme du tore, on pourra supposer que ω est nul au voisinage de zéro. Ce champ préserve le volume usuel de \mathbf{R}^3 . Chaque orbite de X est tracée sur l'un des tores $\rho = \text{Const}$ et le flot induit est un flot linéaire classique dont la fréquence est $\omega(\rho)$. Prenons un point x dans \mathcal{D} , fixons un temps $T > 0$ et étudions la signature du nœud $k(T, x)$ obtenu en fermant l'arc d'orbite de longueur T issu de x par un segment de droite. Nous supposons que l'orbite de x n'est pas périodique, c'est-à-dire que la valeur correspondante de $\omega(\rho)$ est irrationnelle. Soit $\pi_0 : (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3 \mapsto (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ la projection sur les deux premières coordonnées. La projection $\pi_0(k(T, x))$ a l'allure indiquée dans la figure 7. Le nombre de faces du diagramme croît évidemment quadratiquement en T . On remarquera que ce diagramme possède des faces particulières. Tout d'abord, il y a les faces qui touchent au contour apparent du tore : leur nombre croît linéairement en T . Il y a également les faces dont le bord rencontre la projection du segment qui a servi à “fermer” le nœud : leur nombre croît également linéairement en T . Retirons ces faces du diagramme, ainsi que celles qui rencontrent l'axe $u_2 = 0$ (dont le nombre croît encore linéairement en T). La figure 7 montre que le diagramme qui reste est isomorphe à un diagramme du type \mathcal{G}_η que nous avons considéré précédemment. Les lemmes 1.2 et 1.3 permettent donc de conclure que la signature de la matrice de Goeritz de la projection considérée de $k(T, x)$ croît au plus linéairement en T .

Pour estimer la signature de $k(T, x)$, il faut encore évaluer l'entier ν . La figure 7 montre que, toujours dans la partie du diagramme que nous avons conservée, un sommet sur deux est de type II et que l'indice θ de chaque point double est $+1$ si $\omega(\rho) > 0$ et -1 sinon. Il en résulte que, à un terme linéaire en T près, l'entier ν

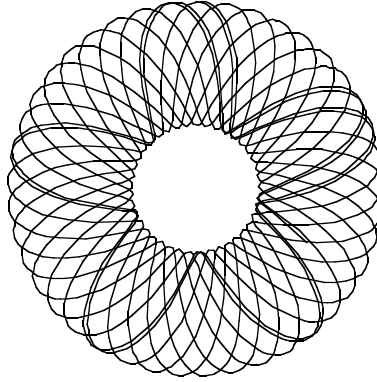


Figure 7

est égal à la moitié du nombre de points doubles (ou son opposé si $\omega(\rho) < 0$). Ce nombre de points doubles est facile à estimer : il est équivalent à $|\omega(\rho)|T^2$.

En résumé, nous avons montré que $\sigma(k(T, x))/T^2$ tend vers $\omega(\rho)/2$ lorsque T tend vers l'infini.

Cet exemple donne une première illustration du théorème principal. Fixons une valeur de ρ_0 et considérons la mesure $\mu = 1/4\pi^2 d\phi d\psi$ concentrée sur le tore $\rho = \rho_0$. C'est une mesure invariante ergodique pour le flot étudié (et toute mesure ergodique qui ne charge ni les orbites périodiques ni les singularités est de ce type). Le calcul de l'invariant d'Arnold pour cette mesure est facile. Prenant deux points x_1, x_2 sur des orbites distinctes mais génériques pour μ , c'est-à-dire sur le tore $\rho = \rho_0$, on considère l'enlacement $\text{Enl}(k(T, x_1), k(T, x_2))$. Puisque nous venons d'étudier le diagramme des projections de ces nœuds, il est clair que, à un terme croissant linéairement en T près, $\text{Enl}(k(T, x_1), k(T, x_2))$ est égal au nombre de points doubles (ou son opposé si $\omega(\rho_0) < 0$), c'est-à-dire de l'ordre de $|\omega(\rho_0)|T^2$. Ainsi, la limite de $\sigma(k(T, x))/T^2$ est bien égale à la moitié de l'invariant d'Arnold pour la mesure μ .

Ce même exemple illustre également la situation pour une mesure invariante non ergodique. En effet, si l'on considère le volume usuel de \mathbf{R}^3 , on obtient une mesure invariante pour le flot, bien sûr non ergodique. Nous venons de voir que la limite de $\sigma(k(T, x))/T^2$ est $\omega(\rho)/2$. Cette limite dépend évidemment du point x initial. Pour calculer l'invariant d'Arnold, il faut d'abord choisir deux points x_1, x_2 de \mathcal{D} et calculer la quantité A_{x_1, x_2} : on voit facilement qu'on trouve $\omega(\rho)$ où ρ est le paramètre de celui des deux tores contenant x_1 et x_2 qui est le plus extérieur. Puis il faut calculer l'intégrale double de cette quantité. On voit donc pourquoi la signature asymptotique diffère essentiellement de l'invariant d'Arnold dans le cas non ergodique : il s'agit une

moyenne sur des paires de points qui peuvent être dans des composantes ergodiques différentes alors que la signature asymptotique ne prend en compte qu'un seul point.

Faisons une dernière remarque sur cet exemple. Le calcul de la signature d'un nœud torique met en jeu d'intéressantes fonctions arithmétiques liées aux sommes de Dedekind (voir [11]). En fait, cette signature est la somme de deux termes : l'un est facile à calculer explicitement et l'autre est beaucoup plus subtil, mais petit par rapport au précédent. Lors du calcul que nous venons d'effectuer de la signature asymptotique, ceci est apparu lorsque nous avons omis un nombre de faces linéaire en T dans le calcul de la matrice de Goeritz et nous avons négligé les "effets de bords du diagramme" (qui sont cependant très intéressants). En résumé, l'aspect asymptotique de la signature que nous étudions simplifie grandement le problème du calcul, mais il y a perte d'information topologique dans le passage à la limite.

Passons à notre deuxième exemple. Le *modèle géométrique de l'attracteur de Lorenz* est un champ de vecteurs X dans \mathbf{R}^3 qui s'obtient à partir d'une surface branchée \mathcal{S} munie d'un semi-flot Ψ^s ($s \geq 0$) et plongée dans l'espace comme sur la figure 8. Le flot du champ X préserve un ensemble compact Λ proche de la surface branchée et la dynamique du flot sur Λ est la limite inverse du semi-flot. Autrement dit, à un point de Λ est associée une orbite de Ψ^s , c'est-à-dire une courbe $c : t \in \mathbf{R} \mapsto c(t) \in \mathcal{S}$ telle que $\Psi^s(c(t)) = c(t + s)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et $s > 0$. L'application qui à un point de Λ associe $c(0)$ est une projection de Λ sur \mathcal{S} proche de l'identité ; c'est une fibration dont les fibres sont des ensembles de Cantor. Pour plus de détails, voir, par exemple, [4].

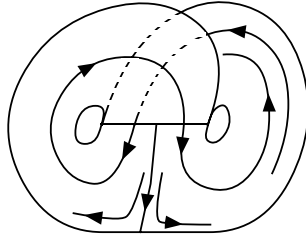


Figure 8

Prenons un point x dans Λ et considérons la projection de l'arc d'orbite de longueur T issu de x (voir figure 9). On constate donc que le diagramme du nœud contient un nombre de faces qui croît quadratiquement en T et que si on enlève de ce diagramme un nombre de faces croissant linéairement en T , la partie du diagramme qui reste est une grille du type $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ que nous avons rencontré plus haut. Ainsi, toujours par le même argument, la signature de la matrice de Goeritz associée à la projection

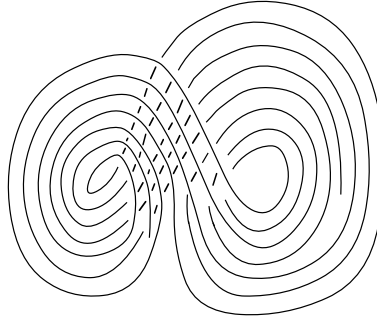


Figure 9

du nœud croît au plus linéairement en T . Comme dans le cas précédent, il faut évaluer l'entier ν . Toujours à une quantité linéaire en T près, la moitié des points doubles sont de type II et, si les orientations sont comme sur la figure 9, ils sont tous d'indice $+1$.

En résumé, la limite de $\sigma(k(T, x))/T^2$ est égale à la moitié de la limite de $\mathcal{N}(T, x)/T^2$ où $\mathcal{N}(T, x)$ est le nombre de points doubles de la projection de l'arc d'orbite considéré.

Il nous reste à montrer que si μ est une mesure ergodique invariante par le flot, alors pour μ -presque tout point x cette limite est égale à l'invariant d'Arnold pour μ . Pour cela, on considère la fonction $\mathcal{N} : \Lambda^2 \rightarrow \mathbf{R}$ qui associe à deux points x_1 et x_2 le nombre de points de croisements des projections des arcs d'orbites de temps unité issus de x_1 et x_2 , affectés de l'indice ± 1 suivant l'orientation. Par définition, l'invariant d'Arnold est la valeur moyenne de la limite, pour μ -presque toute paire x_1, x_2 , de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} \mathcal{N}(\phi^i(x_1), \phi^j(x_2)).$$

Quant à la signature asymptotique, nous venons de montrer que pour le modèle géométrique de Lorenz, elle est égale à la moitié de la limite pour μ -presque tout x de :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} \mathcal{N}(\phi^i(x), \phi^j(x)).$$

Le théorème ergodique montre que la deuxième limite existe presque partout et qu'elle est égale à la moitié de la valeur moyenne de \mathcal{N} sur Λ^2 (voir [14]). Toujours d'après le théorème ergodique (mais cette fois pour l'action de \mathbf{Z}^2 sur Λ^2 engendrée par (ϕ^1, id) et (id, ϕ^1)), la première limite existe presque partout et sa moyenne est également la moitié de la moyenne de \mathcal{N} sur Λ^2 . Nous avons bien établi l'égalité entre la signature

asymptotique et la moitié de l'invariant d'Arnold dans l'exemple de l'attracteur de Lorenz.

2. Décomposition d'un champ en tubes de flot

Les exemples précédents sont particuliers car les points doubles des projections des orbites sont très bien contrôlés. La structure de la preuve du théorème principal dans le cas général sera dans le même esprit. Nous allons montrer que pour presque tout point, la signature de la matrice de Goeritz de la projection de $k(T, x)$ croît moins vite que ϵT^2 pour tout $\epsilon > 0$, de sorte que la contribution dominante dans la signature de $k(T, x)$ provient en fait du terme ν . C'est l'étape essentielle de la preuve : il nous faudra montrer que la plus grande partie du diagramme de la projection du nœud $k(T, x)$ est constituée de grilles du type $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ étudié plus haut. Nous remarquerons ensuite qu'environ la moitié des points doubles sont de type II. Il sera alors facile d'établir le lien entre signature asymptotique et enlacement asymptotique à l'aide du théorème ergodique, comme nous venons de le faire dans un cas particulier.

Pour étudier la nature de la projection de $k(T, x)$, nous plaçons d'abord le champ "en bonne position" par rapport à la projection sur les deux premières coordonnées, ce qui permet en particulier d'estimer le nombre de points d'intersection de la projection d'un segment d'orbite avec une droite quelconque. Dans un second temps, nous dégageons un principe général sur les champs de vecteurs qui, nous semble-t-il, peut avoir un intérêt indépendant. Il s'agit de la décomposition d'un champ en une collection dénombrable de tubes de flots disjoints. C'est une suite de telles décompositions en des tubes de plus en plus fins qui va nous permettre de construire la démonstration du théorème.

Nous allons rencontrer deux types de difficultés techniques. D'une part les points singuliers du champ de vecteurs ne peuvent pas être placés dans des tubes de flots et on pourrait penser a priori que les orbites s'enlacent beaucoup au voisinage d'une singularité : nous verrons que ce n'est pas le cas. D'autre part, lorsqu'une orbite devient verticale par rapport à la projection plane utilisée, sa projection présente typiquement un point de rebroussement et les projections des orbites voisines présentent de petites boucles que nous allons devoir contrôler. La partie gauche de la figure 10 montre les projections sur un plan de quelques orbites d'un champ de vecteurs linéaire de type col. La partie droite montre les projections des orbites d'un champ non singulier près d'un point où il est vertical. Le lecteur pourra supposer dans un premier temps que le champ étudié est non singulier et qu'il n'est jamais vertical.

2.1. Bonnes projections

Dans toute la suite \mathcal{D} est une sous-variété compacte connexe à bord de \mathbf{R}^3 dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est une surface de classe C^∞ . On note $X(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$ l'ensemble des champs de

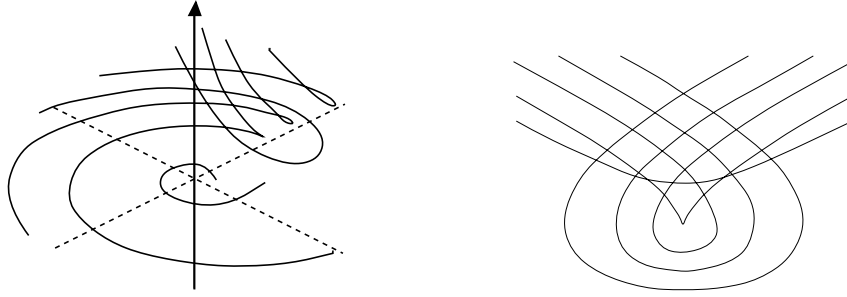


Figure 10

vecteurs de classe C^∞ définis sur \mathcal{D} et tangent à $\partial\mathcal{D}$. On note également $X_0(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$ le sous-ensemble de $X(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$ constitué des champs dont toutes les singularités sont hyperboliques linéarisables de type col. Enfin, l'ensemble des applications de classe C^∞ de \mathcal{D} dans \mathbf{R}^2 est noté $C^\infty(\mathcal{D}, \mathbf{R}^2)$. Muni de la topologie C^∞ de Whitney, c'est un espace de Baire.

Nous fixons à présent un champ de vecteurs X dans $X_0(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$, et notons ϕ^t le flot correspondant. Les singularités du champ X , qui sont en nombre fini, sont notées s_1, \dots, s_n . Soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{D} invariante par ϕ^t , ergodique, qui ne charge pas la réunion des singularités et des orbites périodiques. Soit τ un réel strictement positif (que nous penserons petit) et qui est plus petit que toutes les périodes des orbites périodiques (ceci est possible d'après nos hypothèses sur les singularités). Nous allons découper les orbites en arcs compacts $t \in [0, \tau] \mapsto \phi^t(x) \in \mathcal{D}$.

La preuve qui suit fait apparaître beaucoup de constantes dont les valeurs exactes n'ont pas d'intérêt. Pour alléger l'écriture, nous noterons **Cst** une constante dont la valeur ne dépend que de X et de τ . *Nous insistons sur le fait que la même notation **Cst** peut désigner des constantes différentes au cours du texte* (parfois dans la même phrase) : nous pensons que ceci ne présentera pas d'ambiguïté.

Soit $\pi_0 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la projection sur les deux premières coordonnées. La *verticale* est par définition la direction du noyau de π_0 . Un plan est vertical s'il contient la verticale. Nous dirons que le champ (\mathcal{D}, X) est *en bonne position* par rapport à π_0 si les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (1) L'ensemble $\mathcal{V}ert \subset \mathcal{D}$ où le champ X est vertical est une courbe lisse dont le bord, s'il existe, est dans le bord de \mathcal{D} .
- (2) Les sous-espaces invariants du champ linéarisé en chaque singularité ne sont pas verticaux.

- (3) Il existe une partie dénombrable dense $P \subset \mathcal{D}$ telle que la restriction de π_0 à la réunion disjointe des arcs d'orbites $t \in [0, \tau] \mapsto \pi_0 \phi^t(x) \in \mathbf{R}^2$ ($x \in P$) est une immersion dont les points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes.
- (4) La projection par π_0 de tout arc d'orbite $t \in [0, \tau] \mapsto \pi_0 \phi^t(x) \in \mathbf{R}^2$ rencontre toute droite en au plus **Cst** points.
- (5) Dans un voisinage suffisamment petit de chaque singularité, les projections par π_0 de deux arcs d'orbites de longueur τ se coupent en au plus **Cst** points dès qu'elles sont transverses.
- (6) Si x est un point de \mathcal{D} tel que la courbe $t \in [0, \tau] \mapsto \pi_0 \phi^t(x)$ est immergée, alors le vecteur tangent à cette courbe tourne au plus de **Cst** tours lorsque t parcourt $[0, \tau]$.

PROPOSITION 2.1

Il existe un difféomorphisme $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \Psi(\mathcal{D}) \subset \mathbf{R}^3$ proche de l'identité tel que $(\Psi(\mathcal{D}), \Psi_*(X))$ est en bonne position par rapport à π_0 .

La démonstration de cette proposition repose sur des arguments standards de la théorie des singularités et ne présente pas d'intérêt particulier. Pour cette raison, nous avons choisi de la reporter à l'appendice A.

Bien sûr, pour démontrer le théorème principal, nous pouvons transporter toute la structure par Ψ sans changer le problème. En d'autres termes, *nous pouvons supposer que (\mathcal{D}, X) est en bonne position par rapport à π_0 .*

2.2. Tubes de flots et boîtes associées aux singularités

Nous appelons *bon disque* un domaine fermé du plan limité par une courbe de Jordan de classe C^∞ par morceaux. Souvent, nous identifions un bon disque avec son image par un plongement lisse dans \mathcal{D} .

Un *tube de flot* du champ X est l'image par un plongement p d'un cylindre $\overline{\mathcal{U}} \times [0, 1]$ dans \mathcal{D} , où $\overline{\mathcal{U}}$ est un bon disque, qui vérifie :

- (i) les disques $p(\overline{\mathcal{U}} \times \{0\})$ et $p(\overline{\mathcal{U}} \times \{1\})$ sont transverses au flot ϕ^t ;
- (ii) pour tout x dans $\overline{\mathcal{U}}$, les arcs $p(\{x\} \times [0, 1])$, orientés de zéro vers 1, sont des segments d'orbites orientés du flot ϕ^t .

Nous appelons *longueur maximale* (resp., *longueur minimale*) d'un tube de flot le temps maximum (resp., minimum) que met l'orbite issue d'un point $p(x, 0)$ à rejoindre $p(x, 1)$ quand x parcourt $\overline{\mathcal{U}}$. Quant au *diamètre transverse* d'un tube de flot, c'est la borne inférieure des réels η tels que le tube est contenu dans le η -voisinage de tout

arc $p(\{x\} \times [0, 1])$. Le *bord entrant* (resp., *sortant*) d'un tube de flot est l'ensemble $p(\overline{\mathcal{U}} \times \{0\})$ (resp., $p(\overline{\mathcal{U}} \times \{1\})$). Enfin nous dirons qu'un tube de flot est à *bords verticaux* (par rapport à la projection π_0) si $p(\overline{\mathcal{U}} \times \{0\})$ et $p(\overline{\mathcal{U}} \times \{1\})$ sont contenus dans des plans verticaux. Pour un tel tube, nous pourrions toujours supposer que la restriction de p à $\overline{\mathcal{U}} \times \{0\}$ est une isométrie sur son image.

Nous allons maintenant nous intéresser aux régions de \mathcal{D} qui sont près des singularités du champ X . Choisissons une singularité s_i qui, nous le rappelons, est hyperbolique. L'espace tangent $T\mathcal{D}_{s_i}$ est donc la somme de deux espaces supplémentaires $E_s(s_i)$ et $E_u(s_i)$ qui sont respectivement les espaces propres stable et instable de l'opérateur linéarisé $dX(s_i)$. Supposons pour l'instant que l'espace instable est de dimension 1 (en conséquence, l'espace stable est naturellement de dimension 2) et que la singularité s_i se situe à l'intérieur du domaine \mathcal{D} . Dans une petite boule $B_\epsilon(s_i)$ de rayon ϵ , centrée en s_i , nous pouvons choisir deux petits disques D_i^1 et D_i^2 centrés sur la variété instable locale issue de s_i , transverses à cette variété et situés de part et d'autre de la singularité s_i .

Une fois ces deux disques fixés, nous pouvons choisir dans $B_\epsilon(s_i)$, un anneau A_i , qui rencontre transversalement la variété stable locale le long d'une courbe simple entourant la singularité. Il est facile de voir que si l'anneau A_i est suffisamment fin, l'orbite future de tout point issu de A_i et qui n'est pas sur la variété stable locale, va rencontrer l'un des deux disques D_i^1 et D_i^2 . L'ensemble des points de $D_i^1 \cup D_i^2$ ainsi atteints est la réunion de deux disques $D_i'^1 \subset D_i^1$ et $D_i'^2 \subset D_i^2$ privés de leur point d'intersection avec la variété instable de s_i . On appelle *boîte associée* à la singularité s_i la fermeture de l'ensemble des arcs d'orbites joignant A_i à $D_i'^1$ et $D_i'^2$ dans $B_\epsilon(s_i)$. L'anneau A_i est le *bord entrant* de la boîte et la réunion $D_i'^1 \cup D_i'^2$ est le *bord sortant* (voir figure 11). Nous appelons *longueur minimale* d'une boîte associée à une singularité s_i , le temps minimum que met l'orbite issue d'un point issu de A_i à rejoindre l'un des deux disques $D_i'^1$ et $D_i'^2$. Une boîte associée à une singularité s_i et qui est incluse dans une boule $B_\epsilon(s_i)$ est de *taille* inférieure à ϵ . De même que nous utiliserons des tubes de flots à bords verticaux, nous utiliserons des *boîtes à bords verticaux*, dont les bords entrants et sortants sont contenus dans une réunion finie de plans verticaux. Pour cela, on peut utiliser un anneau différentiable par morceaux A_i qui est la réunion de quatre morceaux planaires.

Dans le cas où la dimension de l'espace instable associé à la singularité est 2, une construction identique permet à nouveau, en changeant le sens dans lequel sont parcourues les orbites, de définir des boîtes associées. Enfin, lorsque la singularité se trouve sur le bord du domaine \mathcal{D} , on construit les boîtes associées de manière analogue, en se restreignant toutefois à la demi-boîte qui est incluse dans \mathcal{D} .

Tubes de flots et boîtes associées aux singularités vont être les deux pièces de base qui vont nous permettre de décomposer le champ de vecteurs X .

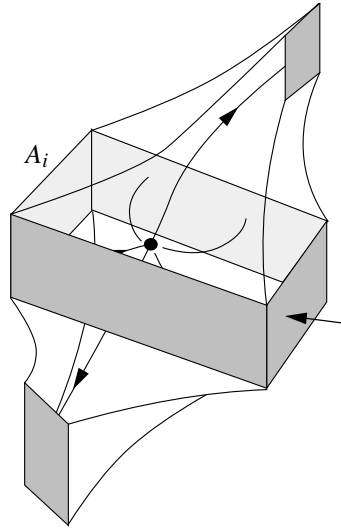


Figure 11

2.3. Squelette d'un champ de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs dans $X_0(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$ en bonne position par rapport à π_0 . On appelle *squelette* associé au couple (X, π_0) une collection dénombrable \mathcal{S}_q de tubes de flots à bords verticaux, $(\mathcal{T}_i)_{i>0}$ telle que :

- la réunion des tubes recouvre $\mathcal{D} \setminus \text{Sing}(X)$ (où $\text{Sing}(X)$ désigne le lieu singulier de X);
- les intérieurs des tubes sont deux à deux disjoints;
- le complémentaire de tout voisinage des singularités est recouvert par un nombre fini de tubes de la collection.

Plus précisément, nous appelons (τ, λ) -*squelette* un squelette dont les tubes sont de longueur maximale inférieure à τ et de longueur minimale supérieure à λ .

Soient \mathcal{S}_q et $\mathcal{S}_{q'}$ deux squelettes associés au couple (X, π_0) , on dit que $\mathcal{S}_{q'}$ est un *raffinement* de \mathcal{S}_q si tout tube de \mathcal{S}_q est réunion d'un nombre fini de tubes de $\mathcal{S}_{q'}$, les bords entrants (*resp.*, sortants) des tubes de $\mathcal{S}_{q'}$ étant contenus dans les bords entrants (*resp.*, sortants) des tubes de \mathcal{S}_q .

Enfin, on appelle *maille* d'un squelette la borne supérieure des diamètres transverses de tous les tubes qui le constituent.

LEMME 2.2

Tout squelette admet un raffinement de maille arbitrairement petite et constitué de tubes dont les bords entrants sont étoilés.

Démonstration

Soit $\overline{\mathcal{U}}$ un bon disque. On peut trouver un nombre fini de bons disques étoilés contenus dans $\overline{\mathcal{U}}$ qui recouvrent $\overline{\mathcal{U}}$, dont les intérieurs sont disjoints deux à deux et dont les diamètres sont arbitrairement petits. Ceci permet de décomposer un tube de flot donné en une réunion finie de tubes d'intérieurs disjoints et de diamètre transverse aussi petit que l'on veut. En faisant de même avec tous les tubes d'un squelette donné, on obtient le lemme. \square

La proposition suivante est l'outil clé qui va nous permettre de comprendre le diagramme de la projection des nœuds $k(T, x)$. Sa démonstration est uniquement technique, aussi nous avons choisi de la repousser dans l'appendice B.

PROPOSITION 2.3

Soit X un champ de vecteurs dans $X_0(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$ en bonne position par rapport à π_0 . Alors, pour tout réel $\tau > 0$, il existe un réel $\lambda > 0$ et un (τ, λ) -squelette associé au couple (X, π_0) .

Remarque. Grâce au lemme 2.2, le résultat de la proposition 2.3 peut être précisé : on peut en fait trouver un (τ, λ) -squelette associé au couple (X, π_0) de maille arbitrairement petite. Nous supposons toujours, grâce au lemme 2.2, que tous les bords entrants des tubes qui constituent le squelette sont étoilés.

2.4. Isotopie dans les tubes d'un squelette

Soit X un champ de vecteurs dans $X_0(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$ en bonne position par rapport à π_0 . Fixons $\tau > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout t tel que $|t| \leq \tau$:

$$\|d\phi^t(x) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{10}.$$

Choisissons un (τ, λ) -squelette $\mathcal{S}q$ associé au couple (X, π_0) (donné par la proposition 2.3). $\mathcal{S}q$ est constitué d'une réunion de tubes $(\mathcal{T}_i)_{i>0}$ qui sont chacun l'image par un plongement p_i d'un cylindre $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, 1]$ où $\overline{\mathcal{U}}_i$ est un bon disque étoilé.

LEMME 2.4

Dans l'intérieur de chaque tube \mathcal{T}_i , il existe un arc d'orbite joignant un bord du tube à l'autre, $\gamma_i = p_i(\{z_i\} \times [0, 1])$ tel que la projection π_0 restreinte à la réunion des arcs γ_i est une immersion sans points triples et dont les points doubles sont à tangentes distinctes. On peut choisir z_i de façon que le bord entrant de \mathcal{T}_i soit étoilé par rapport à z_i .

Démonstration

Ceci résulte de la propriété (3) de la section 2.1. \square

Pour tout point x de γ_i , considérons le plan $v_i(x)$ qui est vertical et contient $X(x)$. D'après le point (5) de la section 2.1, nous savons que lorsque x décrit γ_i , le plan $v_i(x)$ tourne de moins de \mathbf{Cst} tours. Notons $o_i = p_i((z_i, 0))$ l'origine de γ_i . Soit $t \leq \tau$ tel que $x = \phi^t(o_i)$ et considérons le plan $w_i(x)$ image de $v_i(x)$ par $d\phi^{-t}(x)$. On obtient ainsi une famille de plans $w_i(x)$ contenant $X(o_i)$ paramétrée par le point x de γ_i . Puisque la différentielle est 1/10-proche de l'identité, les plans $w_i(x)$ font un angle inférieur à $\pi/4$ avec le plan vertical $v_i(x)$ de sorte que le plan $w_i(x)$ tourne d'un angle inférieur à \mathbf{Cst} tours lorsque x décrit γ_i .

Construisons maintenant un plongement d'une bande $[-\eta_i, \eta_i] \times [0, 1]$ dans \mathcal{T}_i qui envoie $[-\eta_i, \eta_i] \times \{0\}$ et $[-\eta_i, \eta_i] \times \{1\}$ dans $p_i(\overline{\mathcal{W}}_i \times \{0\})$ et $p_i(\overline{\mathcal{W}}_i \times \{1\})$, respectivement, et $\{0\} \times [0, 1]$ sur γ_i . L'image de ce plongement est notée \mathcal{B}_i . On choisit ce plongement de telle sorte que le plan tangent à \mathcal{B}_i en un point x de γ_i soit précisément le plan perpendiculaire au plan vertical $v_i(x)$ contenant $X(x)$. Quitte à restreindre la largeur η_i de la bande, on peut assurer les propriétés suivantes (voir figure 12) :

- la restriction de la projection π_0 à la réunion des bandes \mathcal{B}_i est une immersion sans points triples ;

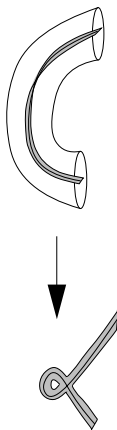


Figure 12

- chaque composante connexe de l'ensemble des points doubles de $\pi_0(\cup_{i>0} \mathcal{B}_i)$ contient un et un seul point double de $\pi_0(\cup_{i>0} \gamma_i)$.

Considérons maintenant la bande $p_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \subset \overline{\mathcal{W}}_i \times [0, 1]$. D'après nos observations sur l'angle de rotation de $w_i(x)$ lorsque x décrit γ_i , nous déduisons que le plan tangent à $p_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ le long de la courbe $\{z_i\} \times [0, 1]$ tourne d'un angle inférieur

à **Cst** tours (voir figure 13). Pour tout $i > 0$ choisissons n_i points q_1, \dots, q_{n_i} distincts dans $\overline{\mathcal{U}}_i$.

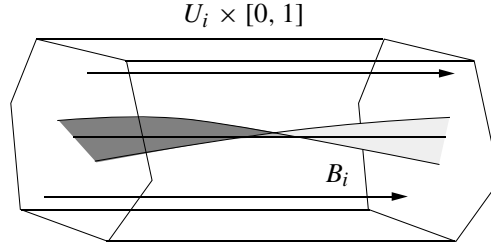


Figure 13

Puisque la bande $p_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ tourne de moins de **Cst** tours dans $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, 1]$, le lemme suivant est clair (voir figure 14).

LEMME 2.5

Pour tout $\epsilon_i \in]0, 1/2[$, il existe dans $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, 1]$ une isotopie $(\psi_s^i)_{s \in [0, 1]}$ qui vérifie :

- $\psi_0^i = \text{id}$;
- pour tout $s \in [0, 1]$, ψ_s^i est l'identité sur le bord de $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, 1]$;
- pour tout $j \in \{1, \dots, n_j\}$, $\psi_1^i(\{q_j\} \times [0, 1])$ coupe $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, \epsilon_i]$ (resp., $\overline{\mathcal{U}}_i \times [1 - \epsilon_i, 1]$) en un arc constitué d'un segment (resp., de **Cst** segments) de droite ;
- pour tout $j \in \{1, \dots, n_j\}$, $\psi_1^i(\{q_j\} \times [0, 1])$ coupe $\overline{\mathcal{U}}_i \times [\epsilon_i, 1 - \epsilon_i]$ en un arc plongé dans $p_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$.

Autrement dit, ψ_1^i “contracte” les courbes $\{q_j\} \times [\epsilon_i, 1 - \epsilon_i]$ et les place sur la bande \mathcal{B}_i dans la partie $\overline{\mathcal{U}}_i \times [1 - \epsilon_i, 1]$ du tube. Dans la partie initiale, $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, \epsilon_i]$, les courbes $\{q_j\} \times [0, \epsilon_i]$ sont envoyées sur des segments. Dans la partie finale, $\overline{\mathcal{U}}_i \times [1 - \epsilon_i, 1]$, ces courbes subissent **Cst** mouvements. Les **Cst** - 1 premiers ont pour but d'annuler l'effet de torsion subi par la bande \mathcal{B}_i et transforment les courbes en **Cst** - 1 segments de droite. Enfin, le dernier mouvement raccorde les courbes aux points $(q_j, 1)$ par un segment.

La partie supérieure de la figure 14 montre les arcs $\psi_1^i(\{q_j\} \times [0, 1])$ et la partie inférieure montre le mouvement des points $\psi_1^i(\{q_j\}, t)$ lorsque t varie de zéro à 1. Les arcs de courbes ainsi construits dans $\overline{\mathcal{U}}_i \times [\epsilon_i, 1 - \epsilon_i]$ s'envoient par p_i dans \mathcal{B}_i et par conséquent “ne s'enlacent pas.” Les segments de droites qui se trouvent dans $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, \epsilon_i]$ et $\overline{\mathcal{U}}_i \times [1 - \epsilon_i, 1]$ s'envoient par $\pi_0 \circ p_i$ sur des arcs de courbes que l'on contrôle mal pour l'instant. Cependant, la construction précédente peut se faire de manière tout à fait analogue pour tout squelette qui est un raffinement du squelette $\mathcal{S}q$.

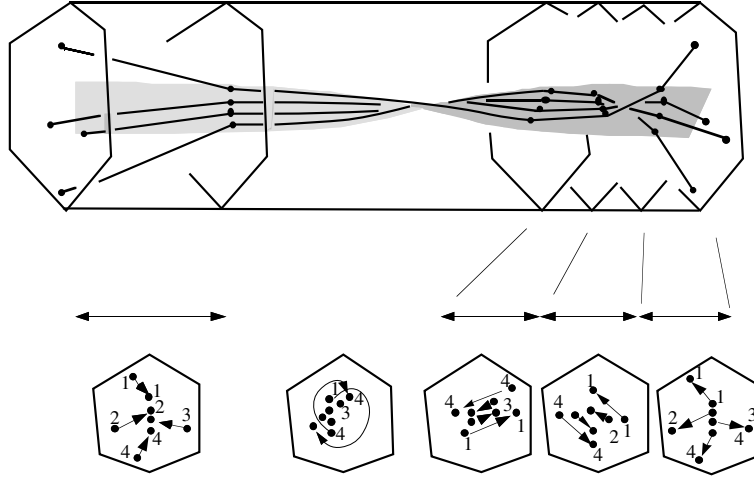


Figure 14

Un raffinement $\mathcal{S}q'$ du squelette $\mathcal{S}q$ se construit en choisissant pour tout $i > 0$, un nombre fini m_i de bons disques $\overline{\mathcal{U}}_{i,j}$ contenus dans $\overline{\mathcal{U}}_i$ qui recouvrent $\overline{\mathcal{U}}_i$, et dont les intérieurs sont disjoints deux à deux. $\mathcal{S}q'$ est alors la collection de tubes de flots $p_i(\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [0, 1])$ pour $i > 0$ et $j \in \{1, \dots, m_i\}$. Le lemme 2.4 nous donne pour ce raffinement une collection d'arcs $(\gamma_{i,j})$ à laquelle nous pouvons associer comme précédemment une collection de bandes $(\mathcal{B}_{i,j})$.

En choisissant un raffinement $\mathcal{S}q$ de maille suffisamment fine, et pour tout $i > 0$ et tout $j \in \{1, \dots, m_i\}$ un ensemble de $n_{i,j}$ points distincts $q_1, \dots, q_{n_{i,j}}$ dans $\overline{\mathcal{U}}_{i,j}$, nous sommes en mesure d'améliorer le lemme 2.5 de la manière suivante.

LEMME 2.6

Il existe dans $\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [0, 1]$ une isotopie $(\psi_s^{i,j})_{s \in [0,1]}$ qui vérifie :

- $\psi_0^{i,j} = \text{id}$;
- pour tout $s \in [0, 1]$, $\psi_s^{i,j}$ est l'identité sur le bord de $\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [0, 1]$;
- pour tout $l \in \{1, \dots, n_{i,j}\}$, $p_i(\psi_1^{i,j}(\{p_l\} \times [0, 1]))$ coupe $p_i(\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [0, \epsilon_i])$ (resp., $p_i(\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [1 - \epsilon_i, 1])$) en un arc constitué d'un segment (resp., de **Cst** segments) de droite ;
- pour tout $l \in \{1, \dots, n_{i,j}\}$, $p_i(\psi_1^{i,j}(\{q_l\} \times [0, 1]))$ coupe $p_i(\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [\epsilon_i, 1 - \epsilon_i])$ en un arc plongé dans la bande $\mathcal{B}_{i,j}$.

Démonstration

Quitte à choisir ϵ_i et la maille du raffinement $\mathcal{S}q'$ suffisamment petits, on peut assurer

que p_i restreinte aux domaines $\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [0, \epsilon_i]$ et $\overline{\mathcal{U}}_{i,j} \times [1 - \epsilon_i, 1]$ soit aussi proche qu'on le souhaite d'une application linéaire. Dans ce cas, les arcs composés de **Cst** segments de droite obtenus dans le lemme 2.5 s'envoient par p_i sur des arcs que l'on peut déformer sans croisements, en des arcs composés de moins de **Cst** segments de droite. \square

3. Démonstration du théorème principal

Soit \mathcal{D} une sous-variété de \mathbf{R}^3 compacte connexe, à bord lisse, et X un champ de vecteurs de classe C^∞ dans \mathcal{D} , tangent au bord, dont les singularités sont des cols hyperboliques et dont le flot laisse invariant une mesure ergodique de probabilité μ qui ne charge pas la réunion des singularités et des orbites périodiques.

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, nous pouvons supposer que X est en bonne position par rapport à π_0 . Nous pouvons également choisir un squelette $\mathcal{S}q$ composé de tubes $(\mathcal{T}_i)_{i>0}$ auquel est adjointe une collection de bandes $(\mathcal{B}_i)_{i>0}$. De plus, la longueur maximale τ des tubes et la maille β de ce squelette peuvent être pris suffisamment petits pour que l'on puisse appliquer le lemme 2.6. On appelle λ la longueur minimale, strictement positive, des tubes du squelette et l'on rappelle que l'on peut par raffinement, choisir la maille du squelette arbitrairement petite sans changer λ . On pourra toujours supposer que les bords des tubes utilisés sont de μ -mesure nulle.

Soit x un point de \mathcal{D} , et $k(T, x)$ le nœud obtenu en fermant un arc d'orbite de longueur T issu de x avec le segment de droite joignant $\phi^T(x)$ à x . Pour être précis, il faudrait montrer qu'il s'agit effectivement d'un nœud, c'est-à-dire que pour μ -presque tout point x , l'arc d'orbite considéré ne rencontre pas le segment qui joint ses extrémités. Pour s'en assurer, il peut être nécessaire de modifier d'abord le champ par un difféomorphisme générique. Nous ne ferons pas cette vérification par paresse mais surtout car nous savons que le nombre de points d'intersection entre l'arc et le morceau d'orbite est inférieur à **Cst**. T de sorte que les signatures des divers nœuds qu'on peut obtenir en éliminant ces points doubles diffèrent d'une quantité croissant au plus linéairement en T .

Soit $n_i(T, x)$ le nombre de composantes connexes de cet arc d'orbite de longueur T dans l'intérieur de \mathcal{T}_i . Nous pouvons déformer $k(T, x)$ en utilisant l'isotopie définie dans le lemme 2.6. Cette déformation faite, nous obtenons un nouveau nœud $k'(T, x)$ (bien sûr isotope à $k(T, x)$) composé de l'image $\Gamma(T, x)$ par l'isotopie de l'arc d'orbite issu de x et de longueur T et de l'image $\gamma(T, x)$ par l'isotopie du segment joignant x à $\phi^T(x)$. Considérons maintenant le nouveau nœud $k''(T, x)$ obtenu à partir de $k'(T, x)$ en remplaçant $\gamma(T, x)$ par le segment de droite joignant x à $\phi^T(x)$. Le nœud $k''(T, x)$ n'est en général plus isotope au nœud $k(T, x)$. Cependant, la propriété de continuité

de la signature signalée à la suite du lemme 1.2 nous permet d'affirmer que :

$$|\sigma(k(T, x)) - \sigma(k''(T, x))| \leq 2 \sum_{i>0} n_i(T, x).$$

Nous savons en outre que $n_i(T, x) \leq \theta_i(T, x)/\lambda$ où $\theta_i(T, x)$ est le temps de passage dans \mathcal{T}_i de l'arc d'orbite issu de x et de longueur T ; on en conclut que :

$$|\sigma(k(T, x)) - \sigma(k''(T, x))| \leq \frac{2T}{\lambda}.$$

Par conséquent, si la limite de la quantité $\sigma(k''(T, x))/T^2$ existe quand T tend vers $+\infty$, la quantité $\sigma(k(x, T))/T^2$ converge vers la même limite.

Tentons à présent de décrire les points doubles de la projection $\pi_0(k''(T, x))$. Les points doubles de cette projection se décomposent en trois types :

- D₁** les projections d'une paire de points de $\Gamma(T, x)$ qui sont chacun sur une bande \mathcal{B}_i ;
- D₂** les projections d'une paire de points de $\Gamma(T, x)$ dont l'un au moins n'est pas dans une bande \mathcal{B}_i ;
- D₃** les projections d'une paire de points dont l'un au moins appartient au segment joignant x à $\phi^T(x)$.

Le nombre de points doubles de type **D₃** est facilement estimable. En effet, la proposition 2.1 nous assure que la projection d'un segment de droite rencontre chacun des arcs de $\Gamma(T, x)$ dans chaque tube \mathcal{T}_i en au plus **Cst** points. On obtient que le nombre de points doubles de type **D₃** de la projection $\pi_0(k''(T, x))$ est majoré par **Cst**. $\sum_{i>0} n_i(T, x) \leq \mathbf{Cst} \cdot T/\lambda$.

Nous nous proposons maintenant d'estimer le nombre de points doubles de type **D₂**.

LEMME 3.1

*Le nombre de points doubles de type **D₂** dont les préimages par π_0 sont l'une dans \mathcal{T}_i et l'autre dans \mathcal{T}_j est inférieur ou égal à **Cst** $n_i(T, x)n_j(T, x)$.*

Démonstration

Chaque arc de $\Gamma(T, x)$ qui traverse le tube \mathcal{T}_i est constitué de **Cst** segments de droite et d'un arc sur \mathcal{B}_i dont la projection est "parallèle" à la projection de l'arc d'orbite γ_i . Les projections de deux segments de droite se coupent en au plus un point. Ceci nous permet de majorer la contribution au nombre de points doubles de type **D₂** dont les deux préimages par π_0 sont l'une dans un segment de droite de $\Gamma(T, x)$ dans \mathcal{T}_i et l'autre dans un segment de droite de $\Gamma(T, x)$ dans \mathcal{T}_j par **Cst** $n_i(T, x)n_j(T, x)$.

D'autre part, la proposition 2.1 nous assure que la projection d'un segment de droite rencontre un translaté de l'arc γ_j en **Cst** points au plus. On majore alors la contribution au nombre de points doubles de type **D₂** dont les préimages par π_0 sont l'une dans un segment de droite de $\Gamma(T, x)$ dans \mathcal{T}_i et l'autre dans un arc de $\Gamma(T, x)$ dans \mathcal{T}_j par **Cst** $n_i(T, x)n_j(T, x)$, et l'on obtient évidemment le même résultat en permutant i et j . \square

Il s'agit là d'une majoration très brutale, les projections de certaines paires de tubes peuvent ne pas se rencontrer, où lorsqu'elles le font, le faire de manière plus ou moins sauvage. Une paire de tubes est une *mauvaise paire de tubes* si la projection des bords entrant et sortant de l'un des deux tubes rencontre la projection de l'autre tube. Dans le cas contraire on dit qu'on a affaire à une *bonne paire de tubes*. Par exemple, la paire composée de deux tubes identiques est mauvaise.

LEMME 3.2

La mesure (produit) du sous-ensemble de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ constitué des mauvaises paires de tubes tend vers zéro avec la maille du squelette $\mathcal{S}q$.

Démonstration

Observons d'abord que la μ -mesure de tout segment vertical $\pi_0^{-1}(y)$ est nulle. C'est évident si ce segment ne rencontre pas le lieu de tangence vertical $\mathcal{V}ert$ car alors pour les petits réels t les images par ϕ^t de ces segments verticaux sont disjointes deux à deux et ont la même mesure. Si le segment vertical rencontre $\mathcal{V}ert$, il le rencontre en un nombre fini de points qui sont de mesure nulle car μ n'a pas d'atome et on peut appliquer le même argument à tout intervalle compact contenu dans le segment vertical et ne rencontrant pas $\mathcal{V}ert$.

Soit S un borélien du plan \mathbf{R}^2 et $\mathcal{T}(S, \tau)$ la réunion des arcs d'orbites de longueur τ dont la projection rencontre S . La mesure μ ne chargeant pas les segments verticaux, il est clair que pour tout $\eta > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout sous-ensemble S du plan \mathbf{R}^2 de diamètre plus petit que β , la mesure de l'ensemble $\mathcal{T}(S, \tau)$ est plus petite que $\eta/2$. Choisissons alors le squelette $\mathcal{S}q$ de sorte que sa maille soit inférieure à β et fixons un tube \mathcal{T}_{i_0} de $\mathcal{S}q$. La mesure de la réunion des tubes dont la projection rencontre la projection du bord entrant ou sortant de \mathcal{T}_{i_0} est donc plus petite que η . On en déduit que la mesure totale des mauvaises paires de tubes est inférieure à η . \square

Désormais nous supposons que la maille du squelette $\mathcal{S}q$ est inférieure à β . On peut alors choisir une collection *finie* \mathcal{C} de bonnes paires de tubes de flot de $\mathcal{S}q$ dont la mesure produit est supérieure à $1 - \eta$. Dans chaque tube \mathcal{T}_i choisi par cette collection, on peut alors diminuer la taille des domaines $\overline{\mathcal{U}}_i \times [0, \epsilon_i]$ et $\overline{\mathcal{U}}_i \times [1 - \epsilon_i, 1]$ en diminuant ϵ_i . En choisissant tous les ϵ_i (qui sont en nombre fini) suffisamment petits,

on assure qu'il n'y a pas de points doubles de type \mathbf{D}_2 dont la paire de préimages est dans une paire de tubes de la collection \mathcal{C} . Ceci nous permet d'estimer le comportement asymptotique du nombre de points doubles de la projection de $k''(T, x)$. En effet, avec ce choix des ϵ_i , il n'y a pas de point double de type \mathbf{D}_2 qui provienne d'une bonne paire de tubes dans la collection \mathcal{C} .

LEMME 3.3

Pour μ -presque tout point $x \in \mathcal{D}$, le nombre de points doubles de type \mathbf{D}_2 de la projection de $k''(T, x)$ croît moins vite que $\mathbf{Cst} \cdot \eta \lambda^{-2} T^2$.

Démonstration

Décomposons la collection de tubes de $\mathcal{S}q$ en deux parties : la première qui est constituée d'un nombre fini de tubes et que l'on appelle $\overline{\mathcal{B}}_\eta$ et la seconde \mathcal{B}_η qui est constituée d'une infinité de tubes dont la mesure totale est inférieure à η .

Nous savons que les points doubles de type \mathbf{D}_2 ne proviennent pas des paires de la collection \mathcal{C} . La collection \mathcal{C}' des paires de tubes de $\mathcal{S}q$ qui ne sont pas dans la collection \mathcal{C} se décompose en trois parties :

- \mathcal{C}'_1 les paires constituées de 2 tubes qui sont dans $\overline{\mathcal{B}}_\eta$;
- \mathcal{C}'_2 les paires constituées de 2 tubes dans \mathcal{B}_η ;
- \mathcal{C}'_3 les paires constituées d'un tube dans $\overline{\mathcal{B}}_\eta$ et d'un tube dans \mathcal{B}_η .

On sait, grâce au lemme 3.1, que chaque paire $(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j)$ dans \mathcal{C}' apporte une contribution inférieure à $\mathbf{Cst} n_i(T, x) n_j(T, x)$ au nombre de points doubles de type \mathbf{D}_2 de la projection de $k''(T, x)$ et ce nombre est lui même majoré par $\mathbf{Cst} \theta_i(T, x) \theta_j(T, x) / \lambda^2$.

Le théorème ergodique de Birkhoff nous permet d'affirmer que pour μ -presque tout x , le nombre $\theta_i(T, x) / T$ converge vers la mesure $\mu(\mathcal{I}_i)$. Par conséquent, pour μ -presque tout x on a, pour T assez grand :

$$\left| \sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}'_1} \theta_i(T, x) \theta_j(T, x) - \sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}'_1} \mu(\mathcal{I}_i) \mu(\mathcal{I}_j) T^2 \right| \leq \eta T^2,$$

et donc :

$$\sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}'_1} \theta_i(T, x) \theta_j(T, x) \leq 2\eta T^2$$

car \mathcal{C}' est de mesure inférieure à η . D'autre part :

$$\sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}'_2} \theta_i(T, x) \theta_j(T, x) \leq \left(\sum_{\mathcal{I}_i \in \mathcal{B}_\eta} \theta_i(T, x) \right)^2.$$

Or la quantité $\sum_{\mathcal{T}_i \in \mathcal{B}_\eta} \theta_i(T, x)$ est le temps de passage dans \mathcal{B}_η de l'orbite de longueur T issue de x . C'est à nouveau le théorème ergodique qui nous permet d'affirmer que pour T suffisamment grand :

$$\sum_{(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j) \in \mathcal{C}'_2} \theta_i(T, x) \theta_j(T, x) \leq \eta^2 T^2.$$

Enfin :

$$\sum_{(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j) \in \mathcal{C}'_3} \theta_i(T, x) \theta_j(x, T) \leq 2 \left(\sum_{\mathcal{T}_i \in \mathcal{B}_\eta} \theta_i(T, x) \right) \left(\sum_{\mathcal{T}_j \in \mathcal{B}_\eta} \theta_j(T, x) \right).$$

En appliquant une troisième fois le théorème ergodique, on obtient, pour T assez grand :

$$\sum_{(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j) \in \mathcal{C}'_3} \theta_i(T, x) \theta_j(x, T) \leq 2\eta T^2.$$

En ajoutant ces dernières estimations nous obtenons bien le lemme 3.3. \square

Il nous reste à présent à considérer le nombre de points doubles de type \mathbf{D}_1 de la projection de $k''(T, x)$. Celui-ci est donné par la quantité $\sum_{i, j > 0} c_{i, j} n_i(T, x) n_j(T, x)$ où $c_{i, j}$ est le nombre de points d'intersection des projections des arcs γ_i et γ_j . La proposition 2.1 nous permet d'affirmer qu'il existe une constante positive \mathbf{Cst} telle que $c_{i, j} \leq \mathbf{Cst}$ pour tout $i, j > 0$ puisque deux arcs γ_i et γ_j qui sont dans le voisinage d'une singularité ont leurs projections qui se coupent en \mathbf{Cst} points au plus. Chaque paire $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)$ dans \mathcal{C}' apporte une contribution inférieure à $\mathbf{Cst} n_i(T, x) n_j(T, x)$ au nombre de points doubles de type \mathbf{D}_1 et cette contribution est elle-même majorée par $\mathbf{Cst} \theta_i(T, x) \theta_j(T, x) / \lambda^2$. Ainsi, la contribution des paires dans \mathcal{C}' au nombre de points doubles de type \mathbf{D}_1 de la projection de $k''(T, x)$ croît moins vite que $\mathbf{Cst} \cdot \eta \lambda^{-2} T^2$ lorsque T tend vers l'infini.

À ce point, nous avons démontré qu'il existe une constante \mathbf{Cst} telle que le nombre de points doubles de la projection de $k''(T, x)$ croît comme la somme

$$\sum_{(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j) \in \mathcal{C}} c_{i, j} n_i(T, x) n_j(T, x)$$

avec une erreur inférieure à $\mathbf{Cst} \cdot \eta \lambda^{-2} T^2$. De plus, nous savons que le diagramme se présente comme sur la figure 15 :

- au voisinage de chaque point d'intersection des arcs $\pi_0(\gamma_i)$ et $\pi_0(\gamma_j)$ associés à une paire de tube dans \mathcal{C} se trouvent $n_i(T, x)$ segments parallèles orientés dans le même sens qui passent tous au dessus ou tous au dessous de $n_j(T, x)$ segments parallèles orientés dans le même sens ;

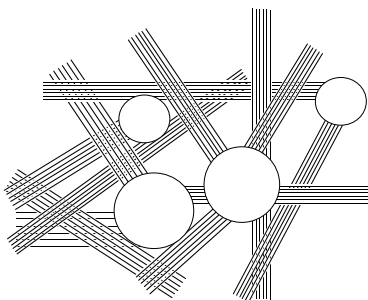


Figure 15

- en dehors d'un voisinage de ces points, se trouvent au plus $\mathbf{Cst} \cdot \eta \lambda^{-2} T^2$ points doubles supplémentaires.

On peut à présent estimer la signature du nœud $k''(T, x)$. Cette signature est, on le rappelle (voir §1.3), la différence de deux termes :

$$\sigma(k''(T, x)) = \sigma(\mathcal{G}(T, x)) - \nu(T, x).$$

Le premier, $\sigma(\mathcal{G}(T, x))$, est la signature de la matrice de Goeritz $\mathcal{G}(T, x)$ associée à la projection de $k''(T, x)$ et le second, $\nu(T, x)$, correspond à la somme des indices $\theta(y)$ sur tous les points doubles de type II.

Une conséquence directe des lemmes 1.2 et 1.3 nous indique que la valeur absolue de la signature de la matrice de Goeritz, $|\sigma(\mathcal{G}(T, x))|$ est majorée par la quantité $\mathbf{Cst} \cdot \eta \lambda^{-2} T^2$. Quant à l'entier $\nu(T, x)$, il se calcule ainsi.

Soient $y_1, \dots, y_{c_{i,j}}$ les points d'intersection des arcs $\pi_0(\gamma_i)$ et $\pi_0(\gamma_j)$ associés à une paire de tube dans \mathcal{C} . On remarque qu'au voisinage de chaque point d'intersection y_l , les points doubles de type II sont en nombre $n_i(T, x)n_j(T, x)/2$ avec une erreur inférieure à $(n_i(T, x) + n_j(T, x))$. Leurs indices notés $\theta(y_l)$ sont tous égaux et sont déterminés par les positions relatives de γ_i et γ_j au dessus de $y_{i,j}$.

On convient d'appeler $l_{i,j}$ la somme des indices $\theta(y_l)$ lorsque y_k parcourt $y_1, \dots, y_{c_{i,j}}$. On a alors :

$$\left| \nu(T, x) - \frac{1}{2} \sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}} l_{i,j} n_i(T, x) n_j(T, x) \right| \leq \mathbf{Cst} \cdot \eta T^2 + \frac{2T}{\lambda}.$$

La signature $\sigma(k(T, x))$ croît donc comme

$$\frac{1}{2} \sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}} l_{i,j} n_i(T, x) n_j(T, x)$$

avec une erreur inférieure à $\mathbf{Cst}.\eta\lambda^{-2}T^2$ où C_2 est une constante positive. En divisant par T^2 et en faisant tendre T vers l'infini nous obtenons :

$$\left| \omega - \frac{1}{2} \sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}} l_{i,j} \frac{\mu(\mathcal{I}_i)\mu(\mathcal{I}_j)}{\tau_i \tau_j} \right| \leq \mathbf{Cst}.\eta\lambda^{-2},$$

où τ_i et τ_j sont respectivement les temps moyens de séjour d'une orbite dans les tubes \mathcal{I}_i et \mathcal{I}_j , et ω est n'importe quelle valeur d'adhérence de la suite $\sigma(k(T, x))/T^2$.

Calculons à présent l'invariant d'Arnold associé au champ X et à la mesure μ . Dans ce but choisissons une paire d'orbites distinctes issues de deux points x_1 et x_2 génériques pour la mesure μ . Remarquons que nous utilisons l'hypothèse que μ ne charge pas les orbites périodiques : on peut affirmer que pour $(\mu \times \mu)$ -presque tout couple (x_1, x_2) , les points x_1 et x_2 sont sur des orbites différentes.

En utilisant le squelette $\mathcal{S}q$ et les mêmes estimations que celles que nous venons d'établir pour la signature, nous obtenons que le nombre d'enlacement des nœuds $k(T, x_1)$ et $k(T, x_2)$ est égal, avec une erreur inférieure à $\mathbf{Cst}.\eta\lambda^{-2}T^2$ à la somme $\sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}} l_{i,j} n_i(T, x_1) n_j(T, x_2)$. En divisant par T^2 et en faisant tendre T vers l'infini, on déduit que :

$$\left| A_X(x_1, x_2) - \sum_{(\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j) \in \mathcal{C}} l_{i,j} \frac{\mu(\mathcal{I}_i)\mu(\mathcal{I}_j)}{\tau_i \tau_j} \right| \leq \mathbf{Cst}.\eta\lambda^{-2}.$$

Nous avons donc établi l'existence d'une constante positive \mathbf{Cst} telle que pour toute valeur d'adhérence ω de la suite $\sigma(k(T, x))/T^2$:

$$\left| \omega - \frac{1}{2} A_X(x_1, x_2) \right| \leq \mathbf{Cst}.\eta\lambda^{-2}.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $\eta > 0$, on obtient :

$$\omega = \frac{1}{2} A_X(x_1, x_2).$$

On rappelle que, la mesure μ étant ergodique, la quantité $A_X(x_1, x_2)$ est égale pour presque tout x_1 et x_2 à l'invariant d'Arnold $\mathcal{A}_\mu(X)$. On en déduit que limite de la quantité $\sigma(k(T, x))/T^2$ existe pour μ -presque tout x et vaut $\mathcal{A}_\mu(X)$. Ceci termine la démonstration du théorème principal lorsque la mesure invariante est ergodique. Lorsque la mesure μ n'est pas ergodique, le même argument s'applique pour μ -presque tout x à la mesure ergodique μ_x qui lui est associée. L'hypothèse sur la mesure μ signifie que pour μ -presque tout x , la mesure μ_x n'est concentrée ni en une singularité ni sur une orbite périodique.

Appendices

A. Mise en bonne position

Dans cet appendice, nous démontrons la proposition 2.1. Nous allons chercher un difféomorphisme $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \Psi(\mathcal{D})$ de la forme $\Psi(u_1, u_2, u_3) = (\pi(u_1, u_2, u_3), u_3)$ où $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est une application proche de $\pi_0 : (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D} \mapsto (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$. Nous étudions donc d'abord les images des arcs $t \in [0, \tau] \mapsto \phi^t(x)$ par une application générique $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ (au sens de Baire).

LEMME A.1

Si $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est générique, les dérivées première et seconde des courbes $t \in \mathbf{R} \mapsto \pi\phi^t(x)$ ne s'annulent pas simultanément pour x non singulier. De même, pour π générique, les cinq premières dérivées de ces courbes ne sont jamais colinéaires.

Démonstration

Au voisinage d'un point non singulier, on peut introduire un système de coordonnées locales (u_1, u_2, u_3) dans lequel le champ X s'écrit $\partial/\partial u_3$. Dans cette carte, l'annulation des deux premières dérivées de $\pi\phi^t(x)$ en $t = 0$ signifie que les deux dérivées partielles $\partial\pi/\partial u_3$ et $\partial^2\pi/\partial u_3^2$ sont nulles. Cette condition définit donc une sous-variété de codimension 4 dans la variété des 2-jets d'applications de \mathcal{D} vers \mathbf{R}^2 . D'après le théorème de transversalité pour les jets de Thom et Mather (voir, p. ex., [9]), le 2-jet d'une application générique $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ évite cette sous-variété et ceci montre la première partie du lemme.

La deuxième partie est dans le même esprit. La condition que les cinq premières dérivées partielles de π par rapport à u_3 sont colinéaires est une condition algébrique de codimension 4 dans les 5-jets d'applications : elle peut donc être évitée génériquement. \square

LEMME A.2

*Supposons le champ X non singulier. Pour un choix générique d'une application $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$, tout arc $t \in [0, \tau] \mapsto \pi\phi^t(x) \in \mathbf{R}^2$ rencontre toute droite en au plus **Cst** points.*

Démonstration

Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite de droites $(\Delta_i)_{i>0}$, une suite de temps $(\tau_i)_{i>0}$ tendant vers zéro et une suite de points $(x_i)_{i>0}$ dans \mathcal{D} telles que l'arc $t \in [0, \tau_i] \mapsto \pi\phi^t(x) \in \mathbf{R}^2$ rencontre Δ_i en au moins i points. On peut supposer que x_i converge vers un point x et que la droite Δ_i converge vers une droite Δ .

L'application $t \in \mathbf{R} \mapsto \pi \phi^t(x)$ suivie de la projection orthogonale de \mathbf{R}^2 sur la droite orthogonale à Δ est une limite de fonctions qui s'annulent un nombre croissant de fois dans des intervalles qui tendent vers zéro : toutes ses dérivées en zéro sont donc nulles. Cela signifie donc que toutes les dérivées de la courbe $t \in \mathbf{R} \mapsto \pi \phi^t(x)$ en $t = 0$ sont colinéaires. Nous savons que ceci ne se produit pas pour une application générique π . \square

Lorsque X est singulier, l'argument précédent ne s'applique plus car la suite de points x_i pourrait converger vers un point singulier x pour lequel la courbe $t \in \mathbf{R} \mapsto \phi^t(x)$ est constante. C'est pour cette raison que nous imposons une condition sur les singularités.

Soit L un champ de vecteurs *linéaire* hyperbolique dans \mathbf{R}^3 . Bien sûr, les variétés stables et instables sont des sous-espaces vectoriels de sorte que L possède au moins une orbite rectiligne. Une projection linéaire $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ envoie cette orbite dans une droite et nous voulons éviter cette situation.

Soit B la boule unité fermée dans \mathbf{R}^3 . Considérons l'espace \mathcal{P}_l des applications polynomiales $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ de degré inférieur à un entier l . Nous affirmons que pour l assez grand et pour π générique dans \mathcal{P}_l , les cinq premières dérivées de $t \in \mathbf{R} \mapsto \pi(\exp(tL)(x))$ en $t = 0$ ne sont pas colinéaires pour x dans $B \setminus \{0\}$. Il suffit en effet d'appliquer l'argument du lemme A.1 à l'espace des applications polynomiales et pour que cet argument soit effectivement applicable, il suffit que l'application naturelle d'évaluation $ev : \mathcal{P}_l \times \mathcal{D} \rightarrow J_5$ (où J_5 désigne l'espace des 5-jets d'applications de \mathcal{D} vers \mathbf{R}^2) soit transverse à la sous-variété de codimension 4 de J_5 que nous avons définie plus haut (voir [1] pour cette version du théorème de transversalité dans une famille d'applications). Cette condition de transversalité de ev est bien sûr satisfaite pour l assez grand.

Génériquement dans \mathcal{P}_l , on peut affirmer que π n'envoie aucune orbite de L dans une droite. On peut également imposer génériquement à π que le long d'une fibre $\pi^{-1}(y)$ les vecteurs $L(x)$ ne sont pas tous projetés par $d\pi$ sur un même vecteur.

LEMME A.3

Avec un tel choix générique de $\pi : B \rightarrow \mathbf{R}^2$, les propriétés suivantes sont satisfaites.

- (a) La projection par π de tout arc d'orbite de L de longueur τ rencontre toute droite en au plus **Cst** points.
- (b) Si deux points x_1 et x_2 de B sont tels que les arcs de longueur τ issus de x_1, x_2 ont des projections par π qui sont transverses, alors ces projections se coupent en au plus **Cst** points.

Démonstration

Considérons l'ensemble $\mathcal{A} \subset B \times B$ formé des couples de points (x_1, x_2) tels que

$\pi(x_1) = \pi(x_2)$ et $d\pi(X(x_1)) = d\pi(X(x_2))$. C'est un ensemble analytique de $B \times B$ de dimension 3 d'après nos hypothèses. Soit $\mathcal{B} \subset B \times B$ l'ensemble des couples de points de la forme $(\phi^{-t_1}(x_1), \phi^{-t_2}(x_2))$ avec t_1 et t_2 dans $[0, \tau]$ et $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$. C'est un ensemble sous-analytique dans $B \times B$. Enfin, soit \mathcal{C} l'ensemble des couples (x_1, x_2) tels que $\pi(x_1) = \pi(\phi^t(x_2))$ ou $\pi(x_2) = \pi(\phi^t(x_1))$ ou $\pi(\phi^\tau(x_1)) = \pi(\phi^t(x_2))$ ou $\pi(\phi^\tau(x_2)) = \pi(\phi^t(x_1))$ pour un certain $t \in [0, \tau]$. C'est également un ensemble sous-analytique. Dans le complémentaire $B \times B \setminus \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ on peut affirmer que les projections des arcs de longueur τ issus de x_1 et x_2 sont transverses et que les extrémités de l'un ne sont pas sur l'autre. Le nombre de points d'intersection de ces arcs est constant sur chaque composante connexe du complémentaire. La propriété (b) du lemme résulte donc du fait que le complémentaire d'un ensemble sous-analytique compact dans une variété compacte à bord n'a qu'un nombre fini de composantes connexes (voir, p. ex., [13]).

On procède exactement de la même manière pour la propriété (a). Soit $\mathcal{T} \subset B \times [0, \tau]$ l'ensemble des couples (x, s) tels que l'arc $t \in [0, s] \mapsto \pi\phi^t(x)$ n'est pas transverse à la droite qui joint $\pi(x)$ à $\pi(\phi^s(x))$. C'est un ensemble sous-analytique et dans chaque composante du complémentaire l'arc $t \in [0, s] \mapsto \pi\phi^t(x)$ rencontre la droite joignant $\pi(x)$ à $\pi(\phi^s(x))$ en un nombre constant de points. On conclut comme auparavant. On remarquera également que si un arc de courbe analytique n'est pas rectiligne et rencontre toute droite qui lui est transverse en **Cst** points, il rencontre aussi les droites non transverses en **Cst** points. \square

Étudions maintenant le cas général d'un champ X dans \mathcal{D} qui possède un nombre fini de singularités, toutes linéarisables et hyperboliques s_1, \dots, s_n . Bien sûr, quitte à transporter X par un difféomorphisme, on peut supposer que X est linéaire dans une petite boule B_i centrée sur s_i . D'après ce que nous avons vu, on peut construire une application $\pi : \cup B_i \rightarrow \mathbf{R}^2$, polynomiale dans chaque boule, arbitrairement proche de la projection π_0 qui vérifie les conditions du lemme A.3 et qui, par ailleurs, est telle que les cinq premières dérivées des projections par π des arcs d'orbites issus d'un point de $\cup B_i$ ne sont jamais colinéaires. Puisque X est évidemment non singulier en dehors des boules B_i , on peut trouver une application $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ arbitrairement proche de π_0 , qui prolonge l'application π définie sur la réunion des B_i , et dont le 2-jet évite la condition de colinéarité des cinq premières dérivées que nous avons déjà discutée.

Nous affirmons que pour un tel choix de π , les projections de tous les arcs $t \in [0, \tau] \mapsto \pi\phi^t(x) \in \mathbf{R}^2$ rencontrent toutes les droites en au plus **Cst** points. C'est en effet le cas au voisinage des singularités par le lemme A.3 et également dans $\mathcal{D} \setminus \cup B_i$ car nous pouvons maintenant y appliquer la preuve du lemme A.2.

Fixons à présent une direction de droite générique δ dans le plan \mathbf{R}^2 et considérons l'ensemble \mathcal{V} des points x pour lesquels $d\pi(X)(x)$ est dans cette direction δ . Par des arguments très proches de ceux que nous venons de présenter, on peut choisir π pour

que \mathcal{V} soit une surface lisse dans \mathcal{D} (bien entendu sans perdre les autres propriétés de généralité de π que nous venons de dégager !). L'ensemble des points x tels que l'arc d'orbite de longueur τ issu de x n'est pas transverse à \mathcal{V} rencontre $\cup B_i$ sur un ensemble sous-analytique. Avec les mêmes arguments que précédemment, on en déduit que pour un choix générique de π , un arc d'orbite de longueur τ issu de tout point x non singulier rencontre \mathcal{V} en au plus **Cst** points. En particulier, si un arc d'orbite de longueur τ se projette par π sur un arc immergé, le vecteur tangent à cet arc tourne d'au plus **Cst** tours.

Nous pouvons d'ailleurs supposer que l'application π est polynomiale car les contraintes que nous avons imposées dans les boules B_i sont génériques dans \mathcal{P}_1 et sont ouvertes dans $\mathcal{D} \setminus \cup B_i$.

Considérons maintenant l'application $\Psi : (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D} \mapsto (\pi(u_1, u_2, u_3), u_3) \in \mathbf{R}^3$. Puisque π est proche de π_0 , l'application Ψ un difféomorphisme sur son image. Considérons le champ $(\Psi(\mathcal{D}), \Psi_*(X))$ et étudions s'il est en bonne position par rapport à π_0 . Remarquons que la projection par π_0 d'un arc d'orbite de $\Psi_*(X)$ n'est rien d'autre que la projection par π d'un arc d'orbite de X : c'est ce que nous venons d'étudier. Il en résulte que les propriétés (4), (5) et (6) de la proposition 2.1 sont satisfaites. Évidemment, il est facile également de choisir π pour que les propriétés (1) et (2) soient satisfaites.

Pour la propriété (3), on remarque d'abord la propriété suivante. Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ un nombre fini d'arcs plongés disjoints dans \mathbf{R}^3 . Alors pour une application polynomiale générique π dans \mathcal{P}_1 , les images $\pi(\gamma_1), \dots, \pi(\gamma_n)$ sont immergées, leur réunion n'a pas de point triple et les points doubles sont à tangentes distinctes. Il suffit alors de choisir une suite dénombrable dense $x_i \in \mathcal{D}$ et de considérer les arcs d'orbite γ_i de longueur τ issus de x_i . On applique alors l'observation précédente à toute les parties finies d'arcs γ_i de façon à trouver une application polynomiale générique qui vérifie la propriété (3).

B. Construction de squelettes associés aux champs de vecteurs

Dans cet appendice, nous montrons la proposition 2.3. La démonstration se fait en deux étapes. Dans un premier temps nous analysons la situation en dehors d'un voisinage du lieu des points singuliers du champ X ; ensuite nous étudions le voisinage du lieu singulier.

B.1. En dehors d'un voisinage du lieu singulier

Considérons une collection (B_{s_i}) de boîtes disjointes à bords verticaux, associées à chaque singularité et convenons d'appeler \mathcal{D}_0 le domaine $\mathcal{D} \setminus \text{int} \cup_{i=1}^{i=n} B_{s_i}$.

LEMME B.1

Pour tout réel positif τ , il existe dans \mathcal{D}_0 un nombre fini de bons disques verticaux, deux à deux disjoints, transverses au flot ϕ^t et tels que l'orbite future issue de tout point de \mathcal{D}_0 , rencontre l'un de ces disques ou le bord vertical de l'une des boîtes B_{s_i} en un temps plus petit que τ .

Démonstration

À tout point x dans \mathcal{D}_0 qui n'appartient pas au bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} , et qui n'est pas non plus dans $\mathcal{V}^{\text{vert}}$, nous pouvons associer un bon disque vertical $D_x \subset \mathcal{D}_0$ qui possède les propriétés suivantes :

- si x n'est pas sur le bord de \mathcal{D}_0 , alors x est dans l'intérieur de D_x ;
- si x est sur le bord de \mathcal{D}_0 , alors l'intersection de D_x avec ce bord est un arc qui contient x en son intérieur.

À partir de chaque disque D_x on construit le tube de flot :

$$\mathcal{T}_x = \left\{ y \in \mathcal{D} \mid y \in \phi^t(D_x) \text{ pour } t \in \left[-\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{4} \right] \right\},$$

et pour chaque singularité s_i , on considère également les domaines :

$$\Delta_{s_i} = \left\{ y \in \mathcal{D} \mid y \in \phi^t(B_{s_i}) \text{ pour } t \in \left[-\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{4} \right] \right\} \setminus \text{int } B_{s_i}.$$

La réunion des intérieurs (pour la topologie induite sur \mathcal{D}_0) des tubes \mathcal{T}_x et des domaines Δ_{s_i} forment un recouvrement d'ouverts de \mathcal{D}_0 dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Soit D_{x_1}, \dots, D_{x_m} les disques choisis par ce sous-recouvrement fini. Il est clair que tout arc d'orbite issu d'un point de \mathcal{D}_0 rencontre l'un des disques D_{x_j} ou le bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} au bout d'un temps plus petit ou égal à $\tau/2$. Ce qui empêche de conclure la démonstration du lemme à présent, c'est que rien ne permet d'affirmer que les disques D_{x_j} , $j = 1, \dots, m$, sont deux à deux disjoints. Cependant, quitte à agrandir un peu chacun de ces disques et à leur faire subir un petit déplacement, nous pouvons toujours nous ramener au cas où il existe un nombre fini de bons disques verticaux D'_{x_j} , $j = 1, \dots, m$, transverses au flot ϕ^t et qui vérifient les conditions suivantes :

- (i) les disques, lorsqu'ils se coupent, le font transversalement ;
- (ii) les bords des disques lorsqu'ils se coupent, le font transversalement sur le bord de \mathcal{D}_0 ;
- (iii) aucun point de \mathcal{D}_0 n'appartient à plus de trois de ces disques ;
- (iv) tout arc d'orbite issu d'un point de \mathcal{D}_0 rencontre l'un des disques D'_{x_j} ou le bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} au bout d'un temps inférieur ou égal à $3\tau/2$.

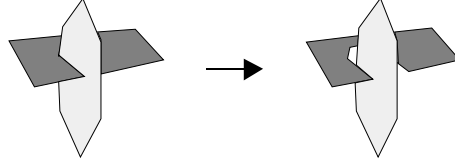


Figure 16

Nous procédons à présent à une suite de chirurgies (voir figure 16). Considérons d'abord le disque D'_{x_1} . Pour chaque disque D'_{x_j} ($j > 1$), l'intersection $D'_{x_1} \cap D'_{x_j}$ est un graphe plongé dans D'_{x_1} . Retirons à chaque D'_{x_j} ($j > 1$) un petit voisinage régulier de ce graphe : on obtient des domaines D''_{x_j} ($j > 1$) qui ne sont pas nécessairement simplement connexes (mais que nous découperons par la suite). Si les voisinages que nous avons retirés sont assez petits, on peut assurer que tout arc d'orbite issu d'un point de \mathcal{D}_0 rencontre l'un des domaines D'_1, D''_{x_j} ou le bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} au bout d'un temps inférieur ou égal à $3\tau/2$. On considère ensuite l'intersection $D''_{x_2} \cap D'_{y_j}$ ($j > 2$) et on ôte à chaque D'_{x_j} ($j > 2$) un petit voisinage régulier de cette intersection. On obtient des domaines D'''_{y_j} . On continue ainsi jusqu'au dernier disque D'_{x_m} . On obtient finalement un nombre fini de domaines disjoints et tels que tout arc d'orbite issu d'un point de \mathcal{D}_0 rencontre l'un d'entre eux ou le bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} au bout d'un temps inférieur ou égal à $3\tau/2$. Pour obtenir le lemme, il ne reste plus qu'à découper ces domaines en morceaux simplement connexes et à perturber légèrement ces nouveaux bons disques pour les rendre disjoints. \square

Soit D_1, \dots, D_m la collection de bons disques construite dans le lemme précédent. On construit alors la collection $C_1, \dots, C_{m+n'}$ où chaque C_j est soit un disque D_l soit l'une des composantes planaires d'un bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} . Pour chaque composante C_j qui n'est pas une composante connexe d'un bord vertical d'une des boîtes B_{s_i} où le flot entre dans la boîte, nous pouvons considérer l'application

$$\psi_j : C_j \longrightarrow \bigcup_{j=1}^{i=m+n'} C_j,$$

qui associe à chaque point x dans C_j , le prochain point de l'orbite issue de x à nouveau dans $\bigcup_{j=1}^{i=m+n'} C_j$, et l'application

$$\tau_j : C_j \longrightarrow \mathbf{R},$$

qui associe à chaque point x dans C_j , le temps mis à l'orbite issue de x pour rencontrer à nouveau $\bigcup_{j=1}^{i=m+n'} C_j$.

Remarquons que, quitte à augmenter le nombre des disques D_1, \dots, D_m vérifiant le lemme B.1, nous pouvons toujours assurer que $\psi_j(C_j) \cap C_j = \emptyset$ et que lorsque C_j est la composante connexe du bord vertical d'une boîte, $\psi_j(C_j)$ ne rencontre le bord d'aucune des boîtes. Il est clair que le lemme B.1 et cette dernière propriété sont préservés par toute petite perturbation qui laisse les disques D_1, \dots, D_m verticaux. En jouant sur de telles perturbations, il est facile d'assurer que pour chaque j dans $\{1, \dots, m + n'\}$ pour lequel ψ_j est défini, et pour tout l dans $\{1, \dots, m + 3n\}$, $\psi_j^{-1}(C_l)$ est un domaine fermé $D_{j,l}$ (éventuellement vide) dont le bord est une courbe différentiable par morceaux. Les domaines $D_{j,l}$ sont des réunions finies de bons disques verticaux $D_{j,l,k}$ dont les intérieurs sont, deux à deux, d'intersection vide.

La collection de tubes de flots

$$\mathcal{T}_{j,l,k} = \{x \in \mathcal{D}_0 \mid x = \phi^t(y), t \in [0, \tau_j(y)], y \in D_{j,l,k}\},$$

répond au lemme suivant.

LEMME B.2

Pour tout réel positif τ , l'adhérence de \mathcal{D}_0 est la réunion d'une collection finie de tubes de flots à bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, et de longueur maximale inférieure à τ .

B.2. Au voisinage des singularités

LEMME B.3

Soit X un champ de vecteurs dans $X_0(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$. Soit s_i une singularité de X , π une bonne projection et $B(s_i)$ une boîte à bords verticaux de longueur minimale supérieure à $\tau > 0$. Alors, $B(s_i)$ est la réunion d'une collection dénombrable de tubes de flots à bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, et de longueur minimale supérieure à τ .

Démonstration

Nous considérons ici le cas où l'espace stable associé à la singularité s_i est de dimension deux et où cette singularité se situe à l'intérieur du domaine \mathcal{D} . Les autres cas se traitent de manière analogue. On appelle A_i , D_i^1 et D_i^2 les composantes du bord de B_{s_i} qui sont transverses au champ X . Dans B_{s_i} nous considérons une nouvelle boîte $B_{s_i}^1$ associée à la singularité s_i de taille suffisamment petite pour que tout arc d'orbite qui joint le bord de $B_{s_i}^1$ au bord de B_{s_i} , le fasse en un temps plus grand que τ . De façon analogue, on note A_i^1 , $D_i^{1,1}$ et $D_i^{1,2}$ les composantes du bord de $B_{s_i}^1$ qui sont transverses au champ X . On décompose alors $B_{s_i} \setminus \text{int } B_{s_i}^1$ en cinq domaines :

- l'ensemble E_1 des arcs d'orbites du champ X joignant A_i à A_i^1 ;

- l'ensemble E_2 des arcs d'orbites du champ X joignant A_i à $D_i^{1,1}$ qui ne rencontrent pas l'intérieur de $B_{s_i}^1$;
- l'ensemble E_3 des arcs d'orbites du champ X joignant A_i à $D_i^{1,2}$ qui ne rencontrent pas l'intérieur de $B_{s_i}^1$;
- l'ensemble E_4 des arcs d'orbites du champ X joignant D_i à $D_i^{1,1}$;
- l'ensemble E_5 des arcs d'orbites du champ X joignant D_i^2 à $D_i^{1,2}$.

Par construction, les domaines E_4 et E_5 sont des tubes de flots à bords verticaux ; quant aux domaines E_1 , E_2 , et E_3 , il est facile de voir qu'ils sont chacun la réunion d'un nombre fini de tubes de flots d'intérieurs disjoints, à bords verticaux. Ces tubes de flots sont tous constitués d'arcs d'orbites de longueur supérieure à τ . On choisit à présent une troisième boîte $B_{s_i}^2$ associée à la singularité s_i de longueur minimale supérieure à τ et de taille suffisamment petite pour que tout arc d'orbite qui joint le bord de $B_{s_i}^2$ au bord de $B_{s_i}^1$, le fasse en un temps plus grand que τ . Le lemme se démontre alors par récurrence. \square

B.3. Fin de la démonstration de la proposition 2.3

Le découpage d'un tube de flot introduit dans le lemme 2.2, nous donne également une démonstration immédiate du lemme suivant.

LEMME B.4

Pour tout réel positif τ , tout tube de flot à bords verticaux de longueur minimale τ est la réunion d'une collection finie de tubes de flots à bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, de longueur maximale inférieure à $\tau/2$ et de longueur minimale supérieure à $\tau/3$.

Démonstration

Les tubes obtenus en découpant le tube de flot gardent une longueur minimale plus grande que τ . Chacun de ces tubes se décompose à son tour, en une collection finie de tubes de flots à bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, et de longueur maximale inférieure à $\tau/2$ et de longueur minimale supérieure à $\tau/3$. \square

La démonstration de la proposition 2.3 se conclut de la manière suivante. Le lemme B.2 nous a laissé avec une décomposition de \mathcal{D}_0 en une collection finie de tubes de flots à bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, et de longueur maximale inférieure à τ . Appelons ξ la longueur minimale des tubes de cette collection. Le lemme B.3 nous a permis de découper chaque boîte $B(s_i)$ en une collection dénombrable de tubes de flots à bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, et de longueur minimale supérieure à τ . Enfin le lemme B.4 nous permet de découper chacun des tubes constituant les boîtes $B(s_i)$ en une collection finie de tubes de flots à

bords verticaux, d'intérieurs deux à deux disjoints, de longueur maximale inférieure à $\tau/2$ et de longueur minimale supérieure à $\tau/3$. Ceci nous donne la collection de tubes recherchée dans la

proposition 2.3 pour $\lambda = \inf(\xi, \tau/3)$.

Références

- [1] R. ABRAHAM et J. ROBBIN, *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, New York, 1967.
- [2] V. ARNOLD, *The asymptotic Hopf invariant and its applications*, *Selecta Math. Soviet.* **5** (1986), 327–345.
- [3] V. ARNOLD et B. KHESIN, *Topological Methods in Hydrodynamics*, *Appl. Math. Sci.* **125**, Springer, New York, 1998.
- [4] J. BIRMAN et R. F. WILLIAMS, *Knotted periodic orbits in dynamical systems, I : Lorenz's equations*, *Topology* **22** (1983), 47–82.
- [5] G. BURDE et H. ZIESCHANG, *Knots*, de Gruyter Stud. Math. **5**, de Gruyter, Berlin, 1985.
- [6] G. CONTRERAS et R. ITURRIAGA, *Average linking numbers*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), 1425–1435.
- [7] J.-M. GAMBAUDO et É. GHYS, *Enlacements asymptotiques*, *Topology* **36** (1997), 1355–1379.
- [8] R. GHRIST, P. HOLMES, et M. SULLIVAN, *Knots and Links in Three-dimensional Flows*, *Lecture Notes in Math.* **1654**, Springer, Berlin, 1997.
- [9] M. GOLUBITSKY et V. GUILLEMIN, *Stable Mappings and Their Singularities*, *Grad. Texts Math.* **14**, Springer, New York, 1973.
- [10] C. MCA. GORDON et R. A. LITHERLAND, *On the signature of a link*, *Invent. Math.* **47** (1978), 53–69.
- [11] F. HIRZEBRUCH et D. ZAGIER, *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory*, *Math. Lecture Ser.* **3**, Publish or Perish, Boston, 1974.
- [12] L. KAUFFMAN, *On Knots*, *Ann. of Math. Stud.* **115**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1987.
- [13] S. ŁOJASIEWICZ, *Sur la géométrie semi- et sous-analytique*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), 1575–1595.
- [14] R. MAÑÉ, *Introdução à teoria ergódica*, *Projeto Euclides* **14**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.
- [15] J. MILNOR, “Infinite cyclic coverings” dans *Conference on the Topology of Manifolds (E. Lansing, Mich., 1967)*, Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, 1968, 115–133.
- [16] K. MURASUGI, *Knot Theory and Its Applications*, traduit de l'édition japonaise (1995) par Bohdan Kurpita, Birkhäuser, Boston, 1996.

- [17] D. ROLFSEN, *Knots and Links*, Math. Lecture Ser. **7**, Publish or Perish, Houston, 1990.
- [18] K. TANIYAMA et A. YASUHARA, *On C-distance of knots*, Kobe J. Math. **11** (1994), 117–127.
- [19] A. VERJOVSKY et R. VILA FREYER, *The Jones-Witten invariant for flows on a 3-dimensional manifold*, Comm. Math. Phys. **163** (1994), 73–88.

Gambaudo

Université de Bourgogne, Unité Fondamentale de Recherche des Sciences et Techniques,
Laboratoire de Topologie, Unité Mixte de Recherche 5884 du Centre National de la Recherche
Scientifique, 9 Avenue Alain Savary, F-21078 Dijon Cedex, France ; gambaudo@u-bourgogne.fr

Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, École Normale Supérieure de Lyon, Unité Mixte
de Recherche 5669 du Centre National de la Recherche Scientifique, 46 Allée d'Italie, F-69364
Lyon Cedex 07, France ; ghys@umpa.ens-lyon.fr