

## Surfaces et cohomologie bornée

Jean Barge et Etienne Ghys

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, U.F.R. de Mathématiques,  
U.A. 751 au C.N.R.S., F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

**Résumé.** Ce travail comprend deux parties. Dans la première, nous étudions le genre minimum d'une surface qui représente une classe d'homologie donnée de degré 2. La deuxième partie est consacrée à une analyse du second groupe de cohomologie bornée d'une surface.

### Introduction

L'homologie réelle d'un espace peut être naturellement munie d'une semi-norme qui mesure la «complexité topologique» d'une classe d'homologie. Pour définir cette semi-norme, considérons un espace  $X$  et une chaîne singulière  $c$ , sur  $X$ , écrite comme combinaison linéaire (à coefficients réels)  $\sum \lambda_i \sigma_i$  de simplexes singuliers  $\sigma_i$ . La norme  $\|c\|$  de  $c$  est alors définie comme étant  $\sum |\lambda_i|$  et la semi-norme  $\|x\|$  d'une classe d'homologie  $x$  comme la borne inférieure des normes des cycles qui représentent  $x$ . Cette notion, introduite et étudiée par M. Gromov et W. Thurston [7, 10, 11], s'est avérée utile en particulier pour l'étude des variétés de dimension 3. Dans le cas des variétés à courbure négative,  $\|\cdot\|$  est une véritable norme sur  $H_i(X, \mathbb{R})$  si  $i \neq 1$ . En général, les classes d'homologie de semi-norme nulle forment un sous-espace vectoriel de l'homologie, noté  $\text{Ker } \|\cdot\|$ .

Une notion plus puissante a été développée dans [7]. Les cochaînes singulières sur  $X$  qui sont uniformément bornées sur les simplexes de  $X$  forment un sous-complexe  $C_b^*(X, \mathbb{R})$  du complexe des cochaînes singulières  $C^*(X, \mathbb{R})$ . L'homologie de  $C_b^*(X, \mathbb{R})$  est appelée «cohomologie bornée de  $X$ » et notée  $H_b^*(X, \mathbb{R})$ . On a évidemment une application naturelle de  $H_b^*(X, \mathbb{R})$  vers  $H^*(X, \mathbb{R})$  qui n'est, en général, ni injective, ni surjective. L'image de cette application, notée  $HB^*(X, \mathbb{R})$  est appelée «partie bornée de la cohomologie de  $X$ ». Elle est naturellement équipée d'une norme qui provient de la borne supérieure sur les simplexes, des cochaînes bornées qui représentent une classe donnée. On vérifie facilement que les espaces  $HB^*(X, \mathbb{R})$  et  $H_*(X, \mathbb{R})/\text{Ker } \|\cdot\|$  sont naturellement duaux comme espaces normés (voir 1–1).

L'intérêt de cette notion de cohomologie bornée est amplement développé dans [7]. Par exemple, la classe d'Euler d'un fibré plat peut être naturellement

définie dans la cohomologie bornée [5, 7]. Un théorème fondamental de M. Gromov affirme que l'application naturelle d'un espace  $X$  dans l'espace d'Eilenberg-McLane  $K(\pi_1(X), 1)$  induit un isomorphisme (en fait une isométrie) entre les cohomologies bornées. C'est pour cette raison que cet article ne traite que de groupes discrets  $\Gamma$ . Par cohomologie bornée de  $\Gamma$ , semi-norme sur  $H_*(\Gamma, \mathbb{R})$ , on entendra évidemment les objets analogues pour  $K(\Gamma, 1)$ .

Dans ce travail, nous nous contentons en fait d'examiner le cas des classes d'homologie de dimension 2. La formule de Hopf suggère une description géométrique de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  puisqu'elle montre que toute classe d'homologie  $x$  peut être représentée par une surface fermée connexe orientée  $\Sigma$ . C'est à dire qu'il existe une application continue  $f: \Sigma \rightarrow K(\Gamma, 1)$  telle que  $f_*([\Sigma]) = x$  où  $[\Sigma]$  est la classe d'orientation de la surface  $\Sigma$ . Une autre notion de «complexité» de la classe vient alors immédiatement à l'esprit; c'est l'entier  $g(x)$ , genre minimum d'une telle surface qui représente  $x$ . Le rapport précis entre ces deux notions est donné par la formule suivante (voir 1-9):

$$\|\bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{g(nx)}{n}$$

où  $x$  désigne une classe de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  et  $\bar{x}$  désigne son image dans  $H_2(\Gamma, \mathbb{R})$ . Cette formule montre que l'information contenue dans le genre est plus riche que celle contenue dans la semi-norme.

Nous nous intéressons ici à deux cas distincts mais complémentaires. Dans le premier cas (partie 2), l'application  $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{R})$  sera nulle et dans le second (partie 3), elle sera surjective.

Les groupes moyennables (voir [6]) et, en particulier, les groupes résolubles, ont une cohomologie bornée triviale. Pour de tels groupes, l'annulation de  $HB^*(\Gamma, \mathbb{R})$  et la dualité mentionnée plus haut, montrent que la semi-norme  $\|\cdot\|$  sur  $H_*(\Gamma, \mathbb{R})$  est triviale. On peut se demander si, en dimension 2, il en est de même pour le genre. Par exemple, si  $\Gamma$  est un groupe abélien,  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  s'identifie à la puissance extérieure  $A_2(\Gamma)$  (voir [4]). Les éléments décomposables  $\gamma_1 \wedge \gamma_2$  de  $A_2(\Gamma)$  sont évidemment représentés par des tores de sorte que  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  est engendré par des classes dont le genre est le plus petit possible, à savoir 1. Curieusement, une adaptation de la méthode de Bogomolov permettant de construire des groupes finis qui sont des contre-exemples au problème de Noether [1], montre que la situation est plus compliquée, même pour les groupes nilpotents.

**Théorème.** *Pour tout entier  $k$ , il existe un groupe nilpotent de type fini  $\Gamma$  tel que  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  n'est pas engendré par des classes représentables par une surface de genre inférieur à  $k$ .*

Il est alors naturel de considérer la filtration de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  par les boules  $B_i = \{x \in H_2(\Gamma, \mathbb{Z}); g(x) \leq i\}$ .

Sous l'hypothèse que  $\Gamma$  est moyennable, la semi-norme  $\|\cdot\|$  dégénère et le genre  $g(nx)$  a donc une croissance sous-linéaire en  $n$ . Nous montrons que, si  $\Gamma$  est polycyclique, cette croissance est en fait bornée ou, si l'on veut, que la filtration  $\{B_i\}$  est finie.

**Théorème.** *Soit  $\Gamma$  un groupe polycyclique. Il existe un entier  $l$  tel que toutes les classes d'homologie de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  sont représentées par une surface fermée connexe orientée de genre inférieur à  $l$ .*

On peut poser la question suivante. Si  $\Gamma$  est moyennable et si  $x$  est une classe de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ , la suite  $g(nx)$  est-elle bornée?

A l'opposé des groupes moyennables, le groupe fondamental d'une surface fermée orientable  $\Sigma$ , différente de la sphère et du tore, a une cohomologie bornée non triviale. En fait, R. Brooks et C. Series [3] et S. Mitsumatsu [9] ont montré par des méthodes combinatoires que  $H_b^2(\pi_1(\Sigma), \mathbb{R}) \simeq H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$  est un espace de dimension infinie non dénombrable. La dimension infinie d'un tel groupe n'est pas surprenante car il est montré dans [5] que le second groupe de cohomologie bornée (entière) d'un groupe  $\Gamma$  permet de décrire toutes les actions de  $\Gamma$  sur le cercle à semi-conjugaison près. Nous nous proposons ici de montrer que  $H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$  contient d'autres objets de nature géométrique liés à la surface, à savoir les 2-formes différentielles de  $\Sigma$ . Nous pensons que ce résultat illustre bien la façon dont la cohomologie bornée rend compte de la géométrie.

Introduisons une technique décrite dans [7, 10]. Fixons une métrique riemannienne à courbure négative  $m$  sur  $\Sigma$  et considérons un 2-simplexe singulier  $\sigma$ . Nous noterons  $\bar{\sigma}$  le 2-simplexe géodésique de  $\Sigma$  ayant les mêmes sommets que  $\sigma$  et dont les côtés sont homotopes à extrémités fixes à ceux de  $\sigma$ . Soit  $\Omega^2(\Sigma)$  l'espace des 2-formes différentielles sur  $\Sigma$  et soit  $\omega \in \Omega^2(\Sigma)$ . Nous noterons  $c_\omega$  la 2-cochaîne singulière qui, évaluée sur  $\sigma$ , vaut  $\int_\sigma \omega$ . On vérifie facilement que  $c_\omega$  est un 2-cocycle borné (3-1) et il définit donc une classe  $[c_\omega]$  dans  $H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$ .

**Théorème.** *Fixons une métrique riemannienne à courbure négative sur  $\Sigma$ . Alors, l'application définie ci-dessus:*

$$\omega \in \Omega^2(\Sigma) \rightarrow [c_\omega] \in H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$$

*est injective.*

Pour illustrer le contenu de ce théorème, nous en déduisons un corollaire purement géométrique. Rappelons que si  $\Sigma$  est une surface compacte à courbure négative, le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  peut naturellement se compactifier par adjonction d'un cercle à l'infini de directions asymptotiques. Trois points sur ce cercle déterminent un «simplexe géodésique idéal» délimité par les trois géodésiques dont les points limites sont ces points. L'aire d'un tel simplexe idéal est toujours finie (d'après le théorème de Gauss-Bonnet). Dans le cas où la courbure de  $\Sigma$  est  $-1$ , tous ces simplexes idéaux sont isométriques et d'aire  $\pi$ .

**Théorème.** *Soit  $m$  une métrique riemannienne à courbure négative sur une surface fermée orientable  $\Sigma$ . On suppose que tous les simplexes idéaux du revêtement universel de  $\Sigma$  sont de même aire. Alors la courbure de  $(\Sigma, m)$  est constante.*

*Remerciements.* Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de géométrie de Lille. Nous en remercions tous les membres, en particulier Vlad Sergiescu, pour l'intérêt qu'ils y ont porté. Nous remercions le Referee, J. Lannes et L. Schwartz qui nous ont signalé une erreur dans la première version ainsi que J.J. Sansuc qui nous a expliqué [1].

### 1. Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons un certain nombre de résultats indispensables à la démonstration des théorèmes que nous avons en vue. Un certain nombre de ces résultats sont déjà connus; nous les présentons ici à la fois pour fixer les notations et pour rendre cet article «self contained».

Nous commençons par présenter la cohomologie bornée de manière plus précise. Soit  $X$  un espace topologique et  $C_*(X, \mathbb{R})$  le complexe des chaînes singulières sur  $X$ , de base l'ensemble des simplexes singuliers  $S_*(X)$ . La norme que nous avons définie dans l'introduction (en fait la norme  $l^1$ ) fait de  $C_*(X, \mathbb{R})$  un complexe d'espaces normés. Le dual topologique de ce complexe est le complexe  $C_b^*(X, \mathbb{R})$  des cochaînes bornées, muni de la norme  $l^\infty$ ; une  $n$ -cochaîne  $\phi$  est bornée si elle est bornée sur  $S_n(X)$  et sa norme  $\|\phi\|$  est la borne supérieure de son module sur  $S_n(X)$ . Par définition, la cohomologie bornée de  $X$ , notée  $HB^*(X, \mathbb{R})$ , est l'homologie de  $C_b^*(X, \mathbb{R})$ . On note  $HB^*(X, \mathbb{R})$  l'image dans  $H^*(X, \mathbb{R})$  de  $H_b^*(X, \mathbb{R})$  par l'application induite par l'inclusion  $C_b^*(X, \mathbb{R}) \subset C^*(X, \mathbb{R})$ . La borne inférieure, notée  $\|u\|$ , des normes des cocycles bornés représentant  $u$ , définit une semi-norme sur  $HB^*(X, \mathbb{R})$  qui est en fait une norme (puisque'une classe de cohomologie représentable par des cocycles arbitrairement petits est nulle). Par contre, la norme de  $C_*(X, \mathbb{R})$  n'induit en général qu'une semi-norme sur l'homologie. Cette semi-norme,  $\|\cdot\|$ , est précisément nulle sur les classes représentables par des cycles arbitrairement petits, c'est-à-dire les classes des cycles qui sont dans l'adhérence des bords.

**Proposition 1.1.** *Soit  $u \in HB^*(X, \mathbb{R})$  et  $x \in H_*(X, \mathbb{R})$  tel que  $\|x\| = 0$ . Alors:*

- 1)  $\langle u, x \rangle = 0$
- 2) *L'accouplement qui s'en déduit :*

$$HB^n(X, \mathbb{R}) \times (H_n(X, \mathbb{R}) / \text{Ker } \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$$

*est non dégénéré et identifie chaque facteur au dual de l'autre en tant qu'espaces normés.*

*Démonstration.* La première assertion est claire puisque:

$$|\langle u, x \rangle| \leq \|u\| \|x\|.$$

Pour démontrer la seconde, on remarque que  $H_n(X, \mathbb{R}) / \text{Ker } \|\cdot\|$  s'identifie au quotient des cycles par l'adhérence des bords, tandis que  $HB^n(X, \mathbb{R})$  s'identifie aux formes linéaires continues sur les cycles, nulles sur les bords et donc sur leur adhérence. On achève avec le théorème de Hahn-Banach.  $\square$

Parmi les propriétés élémentaires de la cohomologie bornée, notons que si  $f: X \rightarrow Y$  est une application continue, l'application induite en cohomologie bornée ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ . Cela résulte du fait qu'un prisme  $\Delta^n \times I$  (correspondant à une homotopie) se décompose en un nombre fini de simplexes ne dépendant que de  $n$  (en fait  $n + 1$ ). En particulier, la cohomologie bornée d'un espace ne dépend que de son type d'homotopie et on peut donc définir la cohomologie bornée d'un groupe  $\Gamma$  comme celle de son espace

d'Eilenberg-McLane  $K(\mathbb{Z}, 1)$  (défini à homotopie près). Comme mentionné dans l'introduction, l'intérêt de considérer les groupes discrets provient du résultat de M. Gromov affirmant que pour tout espace  $X$ , l'application naturelle  $X \rightarrow K(\pi_1(X), 1)$  induit un isomorphisme en cohomologie bornée.

Dans de nombreux cas, il n'est pas nécessaire d'utiliser tout le complexe  $C_*(X, \mathbb{R})$  pour calculer la cohomologie bornée de  $X$ . Nous illustrons ce fait en décrivant une construction de [7] et [11] d'une manière légèrement différente. Soit  $\Sigma$  une surface fermée, orientée et connexe, et  $m$  une métrique riemannienne sur  $\Sigma$  à courbure négative (non nécessairement constante). On note  $\tilde{m}$  le relevé de  $m$  au revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ . Puisque la courbure de  $\tilde{m}$  est négative, la fonction distance  $d: \tilde{\Sigma} \times \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}_+$  associée à  $\tilde{m}$  est strictement convexe. Il en résulte que si  $(x_0, \dots, x_d)$  sont  $d+1$  points de  $\tilde{\Sigma}$  et  $(t_0, t_1, \dots, t_d)$  sont  $d+1$  réels positifs de somme 1, la fonction

$$p \in \tilde{\Sigma} \rightarrow \sum_{i=0}^d t_i d(x_i, p)$$

admet un unique minimum noté  $b((x_i, t_i))$ . En fixant  $(x_0, \dots, x_d)$  et en faisant varier les  $t_i$ , on obtient ainsi un simplexe singulier de  $\tilde{\Sigma}$  dont l'image est exactement l'enveloppe convexe des points  $(x_0, \dots, x_d)$ . Nous dirons qu'un simplexe singulier  $\sigma$  de  $\Sigma$  est géodésique si l'un de ses relevés à  $\tilde{\Sigma}$  est du type précédent. Les chaînes engendrées par les simplexes géodésiques sont appelées chaînes géodésiques et forment un sous-complexe  $\overline{C}_*(\Sigma, \mathbb{R})$  de  $C_*(\Sigma, \mathbb{R})$ .

**Proposition 1.2.** *L'inclusion de  $\overline{C}_*(X, \mathbb{R})$  dans  $C_*(X, \mathbb{R})$  induit un isomorphisme en cohomologie bornée.*

*Démonstration.* Ceci résulte de l'existence d'une rétraction naturelle (dite de «rectification») de  $C_*(X, \mathbb{R})$  sur  $\overline{C}_*(X, \mathbb{R})$  définie de la façon suivante. Soit  $\sigma$  un simplexe singulier de  $\Sigma$  et  $\tilde{\sigma}: \Delta^n \rightarrow \tilde{\Sigma}$  l'un de ses relevés. Les images par  $\tilde{\sigma}$  des sommets de  $\Delta^n$  permettent de construire un simplexe géodésique dont la projection dans  $\Sigma$ , notée  $\bar{\sigma}$ , ne dépend que de  $\sigma$ . C'est le «rectifié» de  $\sigma$ . On observe en outre que la métrique  $m$  permet de construire une homotopie naturelle  $H: \Delta^n \times I \rightarrow \Sigma$  entre  $\sigma$  et  $\bar{\sigma}$  qui ne fait donc intervenir que  $(n+1)$  simplexes. Il en résulte facilement que l'inclusion  $\overline{C}_*(X, \mathbb{R}) \subset C_*(X, \mathbb{R})$  induit un isomorphisme en cohomologie bornée.  $\square$

Remarquons qu'il est nécessaire de conserver les simplexes géodésiques de dimension strictement supérieure à 2 car la cohomologie bornée de  $\Sigma$  n'est pas nulle en degré  $d > 2$ .

D'après la proposition 1-2, pour définir une classe de cohomologie bornée, il suffit donc de définir un cocycle borné sur les simplexes géodésiques. Par exemple, considérons la forme linéaire  $c: \overline{C}_2(\Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $c(\sigma) = \text{Aire}$  algébrique de  $\sigma$  où  $\sigma$  est un 2-simplexe géodésique de  $\Sigma$ . C'est évidemment une forme linéaire continue puisque  $|c(\sigma)|$  est inférieur à  $\pi$  d'après le théorème de Gauss-Bonnet.

**Lemme 1.3.** *La forme linéaire  $c$  est un 2-cocycle.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer les deux configurations possibles d'un 3-simplexe géodésique dans  $\tilde{\Sigma}$ , Fig. 1.

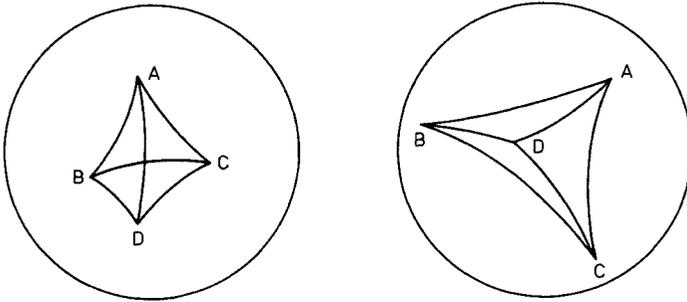


Fig. 1

Cette méthode s'applique en particulier à l'estimation de  $\|[\Sigma]\|$ .

**Proposition 1.4** (voir [7, 11]). *Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée connexe de genre  $g \geq 2$ . Alors  $\|[\Sigma]\| \geq 4g - 4$ .*

*Démonstration.* Soit  $u = |c|$  la classe de  $HB^2(\Sigma, \mathbb{R})$  définie par le 2-cocycle borné  $c$ . On a, si  $m$  est de courbure  $-1$

$$|\langle u, [\Sigma] \rangle| = \text{aire}(\Sigma) = 2\pi(2g - 2) \quad (\text{Gauss-Bonnet})$$

$$\leq \|u\| \|[\Sigma]\| \leq \|c\| \|[\Sigma]\| \leq \pi \|[\Sigma]\|.$$

Donc:

$$\|[\Sigma]\| \geq 4g - 4. \quad \square$$

Nous verrons plus loin que l'inégalité de la proposition 1-4 est en fait une égalité.

Considérons maintenant un groupe discret  $\Gamma$  et une classe d'homologie  $x$  de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ . Il est bien connu que  $x$  peut être représenté par une surface connexe fermée orientée  $\Sigma$  (la démonstration de ce fait sera rappelée plus loin). Le genre minimal d'une telle surface sera noté  $g(x)$  et nous noterons par ailleurs  $|x|$  le nombre minimum de simplexes nécessaires à l'écriture d'un 2-cycle entier représentant  $x$ . On se propose de comparer les nombres  $g(x)$ ,  $|x|$  et  $\|\bar{x}\|$  où  $\bar{x}$  désigne l'image de  $x$  dans l'homologie réelle.

**Lemme 1.5.**  $\|\bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|nx|}{n}$ .

*Démonstration.* L'inégalité  $|x + y| \leq |x| + |y|$  montre que la suite  $|nx|$  est sous-additive et donc que la limite considérée existe. Par ailleurs, l'inégalité évidente

$\|\bar{x}\| \leq |x|$  montre que:

$$\|\bar{x}\| = \frac{1}{n} \|n\bar{x}\| \leq \frac{|nx|}{n}$$

donc:

$$\|\bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|nx|}{n}.$$

L'autre inégalité résulte de la densité des cycles rationnels dans les cycles réels.  $\square$

**Lemme 1.6.** 1)  $|x| \leq 4g(x) - 2$ .

2) Une décomposition cellulaire en triangles d'une surface fermée connexe orientable de genre  $g$  nécessite au moins  $4g - 2$  triangles.

*Démonstration.* 1) Une surface connexe fermée orientable de genre  $g$  peut être obtenue à partir d'un  $4g - 2$ -gone qui peut lui même être triangulé à l'aide de  $4g - 2$  triangles.

2) Pour une triangulation, le double du nombre  $A$  d'arêtes est égal au triple du nombre  $F$  de faces. En écrivant que le nombre  $S$  de sommets est supérieur ou égal à 1, la formule d'Euler Poincaré devient:

$$2 - 2g = S - A + F = S - \frac{F}{2}$$

$$F = 4g - 4 + 2S \geq 4g - 2. \quad \square$$

Pour une estimation dans l'autre sens de  $|x|$ , nous utilisons le lemme suivant.

**Lemme 1.7.** Si  $x$  est un élément de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ , alors  $x$  peut être représenté par une surface fermée orientée  $\Sigma$  dont les composantes connexes  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\alpha$  de

genre  $g_1, \dots, g_\alpha$  vérifient:  $g_i \geq 1$  et  $\sum_{i=1}^{\alpha} (4g_i - 2) = |x|$ .

*Démonstration.* Soit  $c = \sum_{i=1}^{|x|} \sigma_i$  un 2-cycle représentant  $x$  et utilisant le nombre minimal de simplexes. Rappelons comment on utilise  $c$  pour construire une surface représentant  $x$ . Puisque le bord de  $c$  est nul, les côtés des simplexes  $\sigma_i$  peuvent se marier par paires pour s'annuler deux à deux. On considère alors le polyèdre obtenu à partir de  $|x|$  triangles en identifiant les côtés deux par deux comme dans  $\partial c$ .

On obtient une surface compacte, sauf peut être au voisinage de certains sommets où la structure locale est celle d'un cône sur un nombre fini de cercles. En démultipliant ces sommets, on obtient une surface  $\Sigma$  naturellement orientée et triangulée. Soient  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\alpha$  les composantes connexes de  $\Sigma$  et  $g_1, \dots, g_\alpha$  leur genre. Si l'un des  $\Sigma_i$  était une sphère, on pourrait la supprimer (car  $\pi_2(K(\Gamma, 1)) = 0$ ) ce qui est impossible car nous avons supposé que  $c$  représente  $x$  avec le nombre minimum de simplexes. En utilisant encore la minimalité de  $c$  et

le lemme 1-5(2), on voit que le nombre de triangles sur  $\Sigma_i$  est précisément  $4g_i - 2$ . Le nombre total de triangles étant  $|x|$ , on obtient le lemme.  $\square$

**Lemme 1.8.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} 4 \frac{g(kx)}{k} \leq |x|$ .

*Démonstration.* L'opération de somme connexe montre que  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$  et donc que la limite considérée existe.

Soit  $\Sigma$  une surface représentant  $x$  comme dans le lemme précédent. On se fixe un entier  $k$  et, pour chaque  $i=1, \dots, \alpha$ , on choisit un revêtement fini  $\bar{\Sigma}_i$  de  $\Sigma_i$  à  $k$  feuillets. Le genre  $\bar{g}_i$  de  $\bar{\Sigma}_i$  est donné par :

$$2 - 2\bar{g}_i = k(2 - 2g_i),$$

$$\bar{g}_i = k g_i + 1 - k.$$

Puisque la somme connexe des  $\bar{\Sigma}_i$  représente  $kx$ , on a :

$$g(kx) \leq \sum_{i=1}^{\alpha} \bar{g}_i = k \left( \sum_{i=1}^{\alpha} g_i \right) + \alpha(1 - k).$$

D'après le lemme précédent, on a

$$4 \sum_{i=1}^{\alpha} g_i \leq |x| + 2\alpha.$$

Par conséquent :

$$4 \frac{g(kx)}{k} \leq |x| - 2\alpha + \frac{4\alpha}{k} \leq |x| + \frac{4\alpha}{k}.$$

Un passage à la limite finit la démonstration du lemme.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer un résultat énoncé dans l'introduction.

**Proposition 1.9.**  $\|\bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{g(nx)}{n}$ .

*Démonstration.* Puisque

$$\|\bar{x}\| \leq |x| \leq 4g(x) - 2,$$

on a

$$\|\bar{x}\| = \frac{1}{n} \|n\bar{x}\| \leq 4 \frac{g(nx)}{n} - \frac{2}{n}$$

et donc

$$\|\bar{x}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{g(nx)}{n}.$$

Réciproquement, appliquons le lemme 1-8 à  $nx$ . On obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{g(nx)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{g(nkx)}{nk} \leq \frac{|nx|}{n}.$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini et en utilisant le lemme 1-5, on obtient la proposition.  $\square$

Nous pouvons terminer la détermination de  $\|[\Sigma]\|$  commencée en 1-4.

**Proposition 1.10** (voir [7, 11]). *Si  $\Sigma$  est une sphère ou un tore, alors  $\|[\Sigma]\| = 0$ . Si le genre de  $\Sigma$  est  $g \geq 2$  alors  $\|[\Sigma]\| = 4g - 4$ .*

*Démonstration.* Si  $\Sigma$  une sphère ou un tore, il existe des applications  $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$  de degré arbitrairement grand. Puisqu'une application continue contracte évidemment la semi-norme en homologie, on a

$$\|f_*([\Sigma])\| = |\deg(f)| \|[\Sigma]\| \leq \|[\Sigma]\|$$

et donc  $\|[\Sigma]\| = 0$ .

Si le genre de  $\Sigma$  est  $g \geq 2$ , un revêtement à  $n$  feuillet de  $\Sigma$  est de genre  $ng - 1 - n$ . La proposition 1-9 montre alors:

$$\|[\Sigma]\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{ng + 1 - n}{n} = 4g - 4. \quad \square$$

Remarquons pour finir que nous avons vu qu'une triangulation minimale de  $\Sigma$  nécessite  $4g - 2 > 4g - 4$  triangles. Néanmoins découpons la surface en  $2g - 2$  pantalons de bords géodésiques. La Fig. 2 inspirée de [11], montre une décomposition d'un pantalon en deux triangles idéaux qui, après recollement, fournit bien une décomposition de  $\Sigma$  en  $4g - 4$  triangles idéaux!

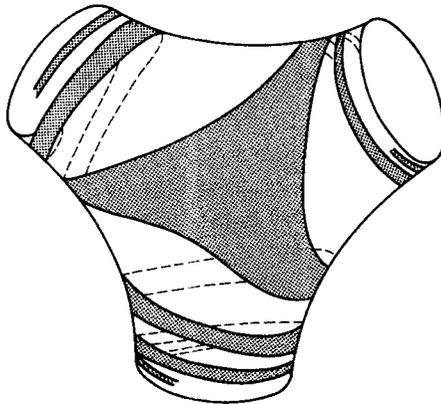


Fig. 2

## 2. Genre des classes d'homologie

Soit  $G$  un groupe. Pour tout entier  $k$  positif, on note  $B_k(G)$  la partie du second groupe d'homologie entière de  $G$ , formée des éléments représentables par une surface connexe fermée orientée de genre inférieur ou égal à  $k$ . C'est une famille

croissante de parties et, d'après le théorème de Hopf (voir 1.7 ou encore [4]), on a :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(G) = H_2(G, \mathbb{Z}).$$

Si  $A$  est une partie de  $H_2(G, \mathbb{Z})$ , on note  $E(A)$  le sous-groupe qu'elle engendre. On a alors :

**Théorème 2.1.** *Pour tout entier  $k$ , il existe un groupe nilpotent de type fini  $G$  tel que  $H_2(G, \mathbb{Z}) \neq E(B_k(G))$ .*

Rappelons que nous avons vu dans l'introduction qu'un tel groupe  $G$  ne peut pas être abélien. Par analogie avec Bogomolov [1], l'exemple de groupe  $G$  cherché sera une extension centrale d'un groupe  $\Gamma$  abélien libre de type fini par un autre groupe  $C$ , lui aussi abélien de type fini

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \rightarrow 0.$$

Une telle extension est caractérisée par une application linéaire  $\phi : A_2(\Gamma) \rightarrow C$  définie de la façon suivante :

$$i(\phi(\gamma A \gamma')) = [g, g']$$

où  $g$  et  $g'$  sont deux éléments qui relèvent  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On a alors la suite exacte bien connue :

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} (H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq A_2(\Gamma)) \xrightarrow{\phi} C$$

qui est un «petit bout» de la suite des termes de bas degrés dans la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Donnons en une description géométrique. Soit  $x$  un élément de  $H_2(G, \mathbb{Z})$  représenté par une surface  $\Sigma_l$ , de genre  $l$ , c'est-à-dire par  $2l$  éléments de  $G$ ,  $g_1, g'_1, \dots, g_l, g'_l$  tels que  $\prod_{j=1}^l [g_j, g'_j] = 1$ .

Soit  $\hat{\Sigma}_l$  l'espace obtenu en identifiant chaque lacet  $[g_j, g'_j]$  en un point. C'est un bouquet de  $l$  tores qui représente  $p_*(x)$  dans  $A_2(\Gamma)$ . En d'autres termes  $p_*(x) = \Sigma \gamma_j \wedge \gamma'_j$  où  $\gamma_j = p(g_j)$  et  $\gamma'_j = p(g'_j)$ .

A ce niveau, l'exactitude de la suite se vérifie géométriquement. D'une part, on a :

$$i \phi(p_*(x)) = i \phi(\Sigma \gamma_j \wedge \gamma'_j) = \Pi [g_j, g'_j] = 1.$$

Réciproquement, soit  $y = \Sigma \gamma_j \wedge \gamma'_j$  un élément de  $\text{Ker } \phi$ . En relevant arbitrairement les  $\gamma_j, \gamma'_j$ , on obtient  $2l$  éléments  $g_1, g'_1, \dots, g_l, g'_l$  de  $G$  tels que  $\Pi [g_j, g'_j] = 1$  et donc une application continue de  $\Sigma_l$  dans  $K(G, 1)$ . Cette dernière représente un élément  $x$  de  $H_2(G, \mathbb{Z})$  tel que  $p_*(x) = y$ .

Il est évident que :

$$p_*(B_k(G)) \subset B_k(\Gamma) \cap \text{Ker } \phi$$

et donc :

$$p_*(E(B_k(G))) \subset E(B_k(\Gamma) \cap \text{Ker } \phi).$$

Pour démontrer le théorème 2-1, il suffit donc d'exhiber  $\Gamma, C$  et  $\phi : A_2(\Gamma) \rightarrow C$  tels que  $\text{Ker } \phi$  ne soit pas engendré par  $B_k(\Gamma) \cap \text{Ker } \phi$ .

Soit alors  $\Gamma = \mathbb{Z}^{2k+2}$  et  $f: A_2(\Gamma) \rightarrow A_{2k+2}(\Gamma) = \mathbb{Z}$  définie par  $f(x) = x^{k+1}$ . L'application  $f$  est non nulle et le cône  $B_k(\Gamma)$  (formé des éléments qui sont somme d'au plus  $k$  éléments décomposables) est inclus dans  $f^{-1}(0)$ , donc différent de  $A_2(\Gamma)$  tout entier. Il existe donc un sous-groupe de rang 1 de  $A_2(\Gamma)$ , noté  $D$ , tel que  $D \cap B_k(\Gamma) = \{0\}$ . On pose alors  $C = A_2(\Gamma)/D$  et  $\phi: A_2(\Gamma) \rightarrow C$  la surjection canonique.  $\square$

Néanmoins, on vérifie facilement que pour un groupe  $G$  comme dans l'exemple précédent, il existe un entier  $k(G)$  tel que toutes les classes d'homologie sont de genre inférieur à  $k(G)$ .

L'objet de la fin de ce paragraphe est de démontrer le :

**Théorème 2.2.** *Soit  $P$  un groupe polycyclique. Il existe un entier  $k$  tel que toutes les classes de  $H_2(P; \mathbb{Z})$  sont de genre inférieur à  $k$ .*

*Démonstration.* Posons comme d'habitude,  $P_1 = [P, P]$  et  $P_{n+1} = [P_n, P_n]$  la suite

$$1 \rightarrow \frac{P_n}{P_{n+1}} \rightarrow \frac{P}{P_{n+1}} \rightarrow \frac{P}{P_n} \rightarrow 1$$

est exacte pour tout  $n$  et le groupe  $\frac{P_n}{P_{n+1}}$  est abélien de type fini. Le théorème 2.2 résulte alors par récurrence de la proposition ci-dessous.

**Proposition 2.3.** *Soit  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} G \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$  une suite exacte de trois groupes :  
On suppose que*

- 1)  $A$  est abélien de type fini,
- 2)  $G$  est de type fini,

3) *il existe un entier  $k(\Gamma)$  tel que toute classe de  $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$  est représentée par une surface de genre inférieur à  $k(\Gamma)$ . Alors il existe un entier  $k(G)$  tel que toute classe de  $H_2(G; \mathbb{Z})$  est représentée par une surface de genre inférieur à  $k(G)$ .*

*Démonstration.* La suite exacte des termes de bas degré dans la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H_1(\Gamma, A) \xrightarrow{\psi} \frac{H_2(G; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(A; \mathbb{Z}))} \xrightarrow{p_*} H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$$

montre que  $H_2(G; \mathbb{Z})$  possède une filtration

$$0 \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 = H_2(G; \mathbb{Z})$$

où

$$F_0 = i_*[H_2(A; \mathbb{Z})],$$

$$\frac{F_1}{F_0} = \text{Im } \psi = \ker p_*,$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \text{Im } p_*.$$

Nous allons montrer les trois lemmes suivants qui prouvent 2.3.

**Lemme A.** Il existe  $k_2$  tel que tout élément de  $H_2(G; \mathbb{Z})$  est congru modulo  $F_1$  à un élément de genre inférieur à  $k_2$ .

**Lemme B.** Il existe  $k_1$  tel que tout élément de  $F_1$  est congru modulo  $F_0$ , à un élément de genre inférieur à  $k_1$ .

**Lemme C.** Il existe  $k_0$  tel que tout élément de  $F_0$  est de genre inférieur à  $k_0$ .

*Démonstration du lemme A.* Il existe  $l$  tel que le genre de toutes les classes  $y$  de  $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$  est inférieur à  $l$ . On peut donc représenter  $y$  par un morphisme  $f$  de  $\pi_1(\Sigma_l)$  dans  $\Gamma$ . Remarquons que, quitte à remplacer  $l$  par  $l+k$ , où  $k$  est le nombre de générateurs de  $\Gamma$ , on peut supposer que  $f$  est surjective. Le lemme 2-5 s'achève par :

*Fait.* Soit  $x \in H_2(G, \mathbb{Z})$  et  $f: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \Gamma$  un morphisme surjectif qui représente  $y = P_*(x)$ . Alors  $f$  se relève en  $\tilde{f}: \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ .

En effet l'élément représenté par  $\tilde{f}$  est de même genre que  $y$ . Il est, par ailleurs, congru à  $x$  modulo  $\ker P_*$  ce qui démontre bien 2-5.

*Démonstration.* On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(\Gamma, A) & \xrightarrow{\cap y = \cap f_*([\Sigma])} & H_0(\Gamma, A) \\
 \downarrow f^* & & \uparrow f_* \\
 H^2(\pi_1(\Sigma), A) & \xrightarrow{D = \cap [\Sigma]} & H_0(\pi_1(\Sigma), A)
 \end{array}$$

où  $D$  est l'isomorphisme de Poincaré.

Si  $\chi \in H^2(\Gamma, A)$  représente l'extension donnée par

$$0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow \Gamma \rightarrow 1,$$

on a :

$$\chi \cap y = \chi \cap P_*(x) = P^*(\chi) \cap x = 0 \cap x = 0.$$

Donc :

$$f_* \circ D \circ f^*(\chi) = 0$$

mais  $f_*$  est un isomorphisme, puisque  $f$  est surjectif, de même que  $D$ . Il en résulte que  $f^*(\chi) = 0$  ce qui signifie précisément que  $f$  se relève à  $G$ .  $\square$

*Démonstration du lemme B.* Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  un système de générateurs du groupe  $\Gamma$ . La suite  $(Z[\Gamma])^k \xrightarrow{\partial} Z[\Gamma] \xrightarrow{e} \mathbb{Z}$  où  $\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_1^k (\gamma_j - 1) \cdot \alpha_j$  est un début

de résolution libre de  $\mathbb{Z}$ . Il en résulte que tout élément  $x$  de  $H_1(\Gamma, A)$  est la classe d'un élément  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k$  qui est un cycle c'est-à-dire tel que

$$\sum_1^k \gamma_j a_j - a_j = 0.$$

On choisit alors  $g_j$  tel que  $p(g_j) = \gamma_j$  et on pose  $g'_j = a_j$ . On a :

$$\begin{aligned} \prod_1^k [g_j, g'_j] &= \prod_1^k (g_j a_j g_j^{-1}) a_j^{-1} = \prod_1^k (g_j \cdot a_j) a_j^{-1} \\ &= i \left( \sum_1^k (g_j \cdot a_j - a_j) \right) = i(0) = 1. \end{aligned}$$

Ces  $2k$  éléments  $g_j, g'_j$  définissent donc un élément de  $H_2(G; \mathbb{Z})$  dont la classe dans le quotient  $\frac{H_2(G; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(A; \mathbb{Z}))}$  est  $\psi(x)$ . Il est de genre  $k$ .  $\square$

*Démonstration du lemme C.* Le groupe  $H_2(A; \mathbb{Z})$  s'identifie à  $A_2(A)$ . Comme  $A$  est de type fini, tout élément de  $A_2(A)$  s'écrit comme somme d'au plus  $k_0$  éléments décomposables.  $\square$

*Remarque 2.6.* Soit  $G$  un groupe dont tous les sous-groupes de type fini sont nilpotents. Il résulte alors du théorème précédent, par limite inductive, que pour toute classe  $x \in H_2(G; \mathbb{Z})$  la suite  $g(n, x)$  est bornée.

### 3. Cohomologie bornée des surfaces

Dans ce paragraphe, nous fixons une métrique riemannienne  $m$  à courbure  $k$  négative (non nécessairement constante) sur une surface fermée orientée et connexe  $\Sigma$ . Soit  $\Omega^2(\Sigma)$  l'espace des 2-formes différentielles (de classe  $C^\infty$ ) sur  $\Sigma$  et  $\omega \in \Omega^2(\Sigma)$ . Nous notons  $c_\omega$  la 2-cochaine singulière de  $\Sigma$  définie par

$$c_\omega(\sigma) = \int_{\bar{\sigma}} \omega$$

où  $\sigma$  est un 2-simplexe singulier et  $\bar{\sigma}$  son rectifié.

**Lemme 3.1.** *La 2-cochaine  $c_\omega$  est un 2-cocycle borné.*

*Démonstration.* Lorsque  $\omega = k \cdot \text{aire}$ , le théorème de Gauss-Bonnet montre que  $|c_\omega(\sigma)|$  est inférieur à  $\Pi$ . Lorsque  $\omega$  est quelconque, la compacité de  $\Sigma$  montre que  $\omega$  est comparable à  $k$ -aire de sorte que  $c_\omega$  définit toujours une 2-cochaine bornée. La démonstration du fait que  $c_\omega$  est un cocycle est identique à celle du lemme 1-3.  $\square$

On notera  $[c_\omega]$  la classe de cohomologie de  $c_\omega$  dans  $H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$ .

Le premier but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 3.2.** *L'application  $\omega \in \Omega^2(\Sigma) \mapsto [c_\omega] \in H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$  est injective.*

Dans la démonstration, nous utiliserons le résultat suivant qui nous semble présenter un intérêt propre.

**Théorème 3.3.** *Soit  $\lambda$  une 1-forme différentielle sur  $\Sigma$  dont l'intégrale sur toute géodésique fermée est nulle.*

*Alors  $\lambda$  est une forme exacte.*

*Démonstration de 3.3.* C'est un corollaire assez immédiat de [8]. L'évaluation de  $\lambda$  sur tout vecteur unitaire définit une fonction  $\bar{\lambda}$  sur le fibré unitaire tangent  $T_1 \Sigma$  à  $\Sigma$ .

L'hypothèse du théorème est que l'intégrale de  $\bar{\lambda}$  sur toute orbite périodique du flot géodésique de  $\Sigma$  est nulle. D'après [8], il existe une fonction  $f$ , de classe  $C^\infty$ , sur  $T_1 \Sigma$  dont la dérivée dans la direction du flot géodésique est précisément  $\bar{\lambda}$ . De plus, la linéarité de  $\lambda$  sur chaque espace tangent signifie que la restriction de  $\bar{\lambda}$  à chaque fibre de  $T_1 \Sigma$  est une combinaison de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  où  $\theta$  est un paramètre angulaire sur cette fibre. Il résulte alors du théorème 3-6 de [8] que  $f$  est en fait constante sur chaque fibre de  $T_1 \Sigma$  et définit donc une fonction sur  $\Sigma$  dont  $\lambda$  est évidemment la différentielle.  $\square$

Nous abordons maintenant la démonstration de 3-2.

En observant que  $[c_\omega]$  dépend linéairement de  $\omega$ , il suffit de considérer une forme  $\omega$  telle que  $[c_\omega] = 0$ .

**Lemme 3.4.** *La forme  $\omega$  est exacte.*

*Démonstration.* Choisissons en effet une triangulation géodésique de  $\Sigma$  qui donne  $[\Sigma] = \sum \sigma_i$ . On a :

$$\int_{\Sigma} \omega = \sum \int_{\sigma_i} \omega = \sum c_\omega(\sigma_i) = c_\omega([\Sigma]) = 0.$$

La forme  $\omega$  est exacte par le théorème de de Rham.  $\square$

On se fixe alors une 1-forme  $\alpha$  telle que  $\omega = d\alpha$  et une 1-cochaine bornée  $\tau$  telle que  $c_\omega = d\tau$ .

**Lemme 3.5.** *Soient  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  des géodésiques fermées orientées dont la somme est homologue à zéro dans  $\Sigma$ . En choisissant un point base sur chaque  $\gamma_i$ , et en paramétrant  $\gamma_i$  proportionnellement à la longueur d'arc, on peut considérer  $\gamma_i$  comme un 1-cycle  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \Sigma$ .*

Alors :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha = \sum_{i=1}^n \tau(\gamma_i).$$

*Démonstration.* Soit  $c$  une 2-chaîne telle que  $\partial c = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ . En rectifiant  $c$  et en observant que  $\gamma_i$  est géodésique, on peut supposer que  $c$  est une chaîne géodésique.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \tau(\gamma_i) &= \tau\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i\right) \\ &= \tau(\partial c) = d\tau(c) \quad (\text{définition de } d) \\ &= c_\omega(c) = c_{d\alpha}(c) \\ &= \int_c d\alpha \quad (\text{car } c \text{ est géodésique}) \\ &= \int_{\partial c} \alpha \quad (\text{théorème de Stokes}) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 3.6.** Si  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  sont  $n$  géodésiques fermées dont la somme est homologue à zéro, alors :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha = 0.$$

*Démonstration.* Pour chaque entier  $N$ , on note  $\gamma_i^N$  la géodésique  $\gamma_i$  parcourue  $N$  fois. La somme des  $\gamma_i^N$  étant évidemment homologue à zéro, le lemme 3-5 montre que :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i^N} \alpha = \sum_{i=1}^n \tau(\gamma_i^N).$$

Le premier membre de cette égalité est égal à :

$$N \left( \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha \right).$$

Quant au second membre, il est borné quand  $N$  tend vers l'infini car  $\tau$  est une cochaîne bornée. On en déduit immédiatement le lemme.  $\square$

**Lemme 3.1.** Il existe une forme fermée  $\beta$  telle que, pour toute géodésique fermée  $\gamma$ , on a :

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \beta.$$

*Démonstration.* Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux géodésiques fermées homologues, le lemme 3-6 montre que :

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Chaque classe d'homotopie libre et, en particulier, chaque classe d'homologie de  $\Sigma$  contient une géodésique fermée. L'intégration de  $\alpha$  permet donc de définir une application  $I$  de  $H_1(M, \mathbb{Z})$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette application est un morphisme car, si  $\gamma_1 + \gamma_2$  est homologue à  $\gamma_3$ , le lemme 3-6 montre que  $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$ . Par conséquent,  $I$  définit une classe de cohomologie de  $H^1(M, \mathbb{R})$ . Le théorème de De Rham permet alors de trouver une forme fermée  $\beta$  dont la classe de cohomologie est  $I$ . Ceci démontre le lemme.  $\square$

*Démonstration de 3.2.* D'après le lemme 3-7, l'intégrale de  $\alpha - \beta$  est nulle sur toutes les géodésiques fermées. Le théorème 3-3 montre que  $\alpha - \beta$  est exacte et donc que  $\alpha$  est fermée car  $\beta$  est fermée. Le théorème est démontré car on a  $\omega = d\alpha = 0$ .  $\square$

Avant d'utiliser le théorème 3-2 pour étudier l'aire des simplexes idéaux d'une surface à courbure négative, nous décrivons quelques constructions.

Notons  $\Gamma$  le groupe fondamental de  $\Sigma$  considéré comme groupe d'automorphismes du revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ . L'ensemble simplicial (contractile) formé des simplexes géodésiques de  $\tilde{\Sigma}$  est noté :  $\tilde{S}_*(\tilde{\Sigma})$ . Le quotient de  $\tilde{S}_*(\tilde{\Sigma})$  par l'action libre de  $\Gamma$  a été noté  $\tilde{S}_*(\Sigma)$ . Nous avons vu que l'inclusion  $\tilde{S}_*(\tilde{\Sigma}) \subset S_*(\tilde{\Sigma})$  induit

un isomorphisme en cohomologie bornée. Par cohomologie bornée d'un ensemble simplicial, nous entendons toujours l'homologie des cochaines bornées sur les simplexes.

Rappelons par ailleurs la bar-construction. On note  $\bar{S}_*(\tilde{\Gamma})$  l'ensemble simplicial (contractile) dont les  $k$ -simplexes sont les  $(k+1)$ -uplets d'éléments de  $\Gamma$  Le quotient de  $\bar{S}_*(\tilde{\Gamma})$  par l'action libre de  $\Gamma$ :

$$\gamma \cdot (\gamma_0, \dots, \gamma_k) = (\gamma\gamma_0, \dots, \gamma\gamma_k)$$

est noté  $\bar{S}_*(\Gamma)$ . La cohomologie de cet ensemble simplicial est la cohomologie de  $\Gamma$ .

Soit  $p$  un point de  $\tilde{\Sigma}$ . On peut alors plonger  $\bar{S}_*(\tilde{\Gamma})$  dans  $\bar{S}_*(\tilde{\Sigma})$  en envoyant  $(\gamma_0, \dots, \gamma_k)$  sur le simplexe géodésique de sommets  $(\gamma_0(p), \dots, \gamma_k(p))$ . Ce plongement est évidemment  $\Gamma$ -équivariant et on obtient donc, par passage au quotient, un plongement:

$$i_p: \bar{S}_*(\Gamma) \rightarrow \bar{S}_*(\Sigma).$$

**Lemme 3.8.**  $i_p$  induit un isomorphisme en cohomologie bornée.

*Démonstration.* On considère une retraction (ensembliste)  $\Pi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Gamma(p)$  qui est  $\Gamma$ -équivariante. Ceci permet de projeter  $\bar{S}_*(\tilde{\Sigma})$  sur l'ensemble des simplexes dont les sommets sont dans  $\Gamma(p)$ , c'est-à-dire sur  $i_p(\bar{S}_*(\tilde{\Gamma}))$ . Par passage au quotient, on obtient donc une retraction de l'ensemble simplicial  $\bar{S}_*(\Sigma)$  sur  $\bar{S}_*(\Gamma)$ . Ceci entraîne immédiatement le lemme.  $\square$

L'isomorphisme induit par  $i_p$  ne dépend en fait pas du choix du point  $p$ . Nous n'utiliserons qu'une version faible de ce fait. Notons  $c_{p,\omega}$  le 2-cocycle sur  $\Gamma$  égal à  $i_p^* c_\omega$ . Explicitement,  $c_{p,\omega}$  est le 2-cocycle homogène sur  $\Gamma$  qui, évalué sur le 2-simplexe  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  vaut l'intégrale de  $\tilde{\omega}$  sur le simplexe géodésique de sommets  $(\gamma_0(p), \gamma_1(p), \gamma_2(p))$  où  $\tilde{\omega}$  désigne le relevé à  $\tilde{\Sigma}$  de  $\omega$ .

**Lemme 3.9.** La classe de cohomologie bornée de  $c_{p,\omega}$  dans  $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R})$  ne dépend pas du choix de  $p$ .

*Démonstration.* Soient  $p$  et  $p'$  deux points de  $\tilde{\Sigma}$ . Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux éléments de  $\Gamma$  les quatre points  $\gamma_1(p), \gamma_1(p'), \gamma_2(p), \gamma_2(p')$  déterminent un quadrilatère géodésique dans  $\tilde{\Sigma}$ . L'intégrale de  $\tilde{\omega}$  sur ce quadrilatère sera notée  $\tau_{p,p'}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Il est clair que  $\tau_{p,p'}$  définit une 2-cochaîne homogène:

$$\tau_{p,p'}(\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2) = \tau_{p,p'}(\gamma_1, \gamma_2).$$

De plus, cette cochaîne est bornée car un quadrilatère se décompose en deux triangles. Enfin, la figure [3] suivante montre que

$$d\tau_{p,p'} = c_{p,\omega} - c_{p',\omega}. \quad \square$$

Les simplexes idéaux n'étant pas de «vrais simplexes», il est impossible de donner un sens à  $i_{p_\infty}$  lorsque  $p_\infty$  est un point à l'infini de  $\tilde{\Sigma}$ . Il est cependant facile de définir  $c_{p_\infty,\omega}$  lorsque  $p_\infty$  est à l'infini. Considérons en effet trois éléments  $\gamma_0, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\Gamma$ . Les trois points à l'infini  $\gamma_0(p_\infty), \gamma_1(p_\infty)$  et  $\gamma_2(p_\infty)$  déterminent

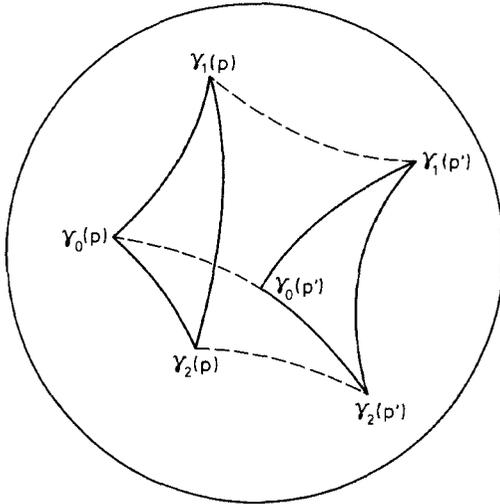


Fig. 3

alors un simplexe idéal sur lequel  $\tilde{\omega}$  est intégrable. Si l'on note  $c_{p_\infty, \omega}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  cette intégrale, on construit évidemment un 2-cocycle sur  $\Gamma$

**Lemme 3.10.** *Le cocycle  $c_{p_\infty, \omega}$  est cohomologue dans  $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R})$  à  $c_{p, \omega}$  où  $p$  est un point quelconque de  $\tilde{\Sigma}$ .*

*Démonstration.* On procède de manière analogue au lemme 3-9.

Les points  $\gamma_0(p), \gamma_1(p)$  (à distance finie) et  $\gamma_0(p_\infty), \gamma_1(p_\infty)$  (à l'infini) déterminent un quadrilatère. L'intégrale de  $\tilde{\omega}$  sur ce quadrilatère (finie et uniformément bornée) fournit une cochaîne bornée dont le cobord est  $c_{p, \omega} - c_{p_\infty, \omega}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé dans l'introduction.

**Théorème 3.11.** *Si les simplexes idéaux de  $\tilde{\Sigma}$  sont de même aire, alors la courbure de  $\Sigma$  est constante.*

*Démonstration.* Soit  $\omega = \text{aire}$ , l'élément d'aire de  $\Sigma$  et  $\omega' = k\omega$  où  $k$  est la courbure de  $\Sigma$ .

Pour comparer  $[c_\omega]$  et  $[c_{\omega'}]$  dans  $H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$ , il suffit, d'après ce que nous venons de voir, de comparer les éléments  $[c_{p_\infty, \omega}]$  et  $[c_{p_\infty, \omega'}]$  de  $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R})$ . L'hypothèse signifie que tous les simplexes idéaux ont la même aire  $A$ , c'est-à-dire que  $c_{p_\infty, \omega}$  prend la valeur  $A$  ou  $-A$  suivant que le simplexe idéal correspondant est orienté positivement ou négativement.

Par ailleurs, le théorème de Gauss-Bonnet appliqué aux simplexes idéaux (d'angles aux sommets nuls) montre que  $c_{p_\infty, \omega'}$  ne prend que les valeurs  $-\Pi$  ou  $+\Pi$  suivant l'orientation de ce même simplexe idéal. On a donc :

$$c_{p_\infty, \omega} = -\frac{\Pi}{A} c_{p_\infty, \omega'}$$

Les lemmes 3-8, 3-9, 3-10 montrent alors que  $[c_\omega] = -\frac{\Pi}{A} [c_{\omega'}]$  dans  $H_b^2(\Sigma, \mathbb{R})$ . Le théorème 3-2 montre donc que :

$$\omega = -\frac{\Pi}{A} \omega' = -\frac{\Pi}{A} k \omega.$$

Ceci montre bien que la courbure  $k$  est constante (égale à  $A/\Pi$ ).  $\square$

Nous signalons enfin un autre corollaire de 3-2 démontré dans [9] lorsque  $k$  est constante par une autre méthode.

**Corollaire 3.12.** *La classe de cohomologie bornée de  $c_{k \cdot \text{aire}}$  est constante sur les métriques à courbure négative.*

*Démonstration.* Ceci résulte de deux observations. La première est que le type topologique de l'action de  $\Gamma$  sur le cercle à l'infini de  $\tilde{\Sigma}$  ne dépend pas de la métrique à courbure négative. La deuxième est que  $c_{p_\infty, k \cdot \text{aire}}$  ne prend que les valeurs  $+\Pi$  et  $-\Pi$  suivant l'ordre cyclique des trois points du cercle à l'infini considérés.

Il en résulte que si  $m$  et  $m'$  sont deux métriques à courbure négative sur  $\Sigma$ , on peut trouver des points  $p_\infty$  et  $p'_\infty$  sur les cercles à l'infini de  $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$  et  $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m}')$  de sorte que les cocycles  $[c_{p_\infty, k(m) \cdot \text{aire}(m)}]$  et  $[c_{p'_\infty, k(m') \cdot \text{aire}(m')}]$  coïncident.  $\square$

## Bibliographie

1. Bogomolov, F.A.: Groupe de Brauer des espaces quotient des représentations linéaires (A paraître)
2. Brooks, R.: Some remarks on bounded cohomology, in Riemannian surfaces and related topics. Ann. Math. Stud. **91**, 53-65 (1981)
3. Brooks, R., Series, C.: Bounded cohomology of surface groups. Topology **23**, 29-36 (1984)
4. Brown, K.: Cohomology of groups. Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
5. Ghys, E.: Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. Contemp. Math. **58**, 81-106 (1987)
6. Greenleaf, F.: Invariant means on topological groups. Math. Stud. **16**, American Book Company (1969)
7. Gromov, M.: Volume and bounded cohomology. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **56**, 5-100 (1982)
8. Guillemin, V., Kazhdan, D.: Some inverse spectral results for negatively curved manifolds. Topology **19**, 301-312 (1980)
9. Mitsumatsu, Y.: Bounded cohomology and  $l^1$ -homology of surfaces. Topology **23**, 465-471 (1984)
10. Thurston, W.: Geometry and Topology of 3-manifold. Preprint, Princeton, 1978
11. Thurston, W.: A norm for the homology of 3-manifolds. Mem. Am. Math. Soc. **59**, 100-130 (1986)