Les systèmes dynamiques holomorphes

Étienne Ghys

Ce volume contient quatre articles traitant de dynamique holomorphe. Dans cette introduction, nous décrivons quelques racines historiques de la théorie. Il ne s'agit cependant pas d'une analyse historique détaillée du développement des systèmes dynamiques holomorphes depuis les origines. Notre seul but est de présenter un point de vue et d'aider le lecteur à comprendre l'unité du sujet.

L'apport du dix-neuvième siècle : la monodromie

"Après l'invention du Calcul intégral, le problème qui s'imposa aux mathématiciens fut l'intégration des équations différentielles *(à une ou plusieurs variables indépendantes). Les premiers efforts eurent pour but de représenter l'intégrale à l'aide de fonctions et de symboles élémentaires connus. Quand on eut compris qu'une telle représentation était impossible en général, il fallut bien se résoudre à étudier directement, sur l'équation différentielle elle-même, les propriétés de l'intégrale.*

Le développement naturel de cette étude conduisit bientôt les géomètres à embrasser dans leurs recherches les valeurs imaginaires de la variable aussi bien que les valeurs réelles. La théorie de la série de Taylor, celle des fonctions elliptiques, la vaste doctrine de Cauchy firent éclater la fécondité de cette généralisation. Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe."

Ainsi s'exprimait Painlevé, à la fin du dix-neuvième siècle [8]. Il avait raison ! Il n'est pas possible ici de faire une analyse précise de l'apport des variables complexes en mathématiques, mais on peut cependant insister sur une découverte fondamentale, "invisible" d'un point de vue réel, celle du *phénomène de monodromie*, au cœur de la dynamique holomorphe.

L'étude des fonctions algébriques, c'est-à-dire des fonctions "multiformes" $y(x)$ d'une variable x vérifiant une relation polynomiale $P(x,y) = 0$, conduisit Riemann à son point de vue génial des "surfaces de Riemann étalées au dessus du plan des x" et sur lesquelles des fonctions algébriques deviennent uniformes. Si l'on considère un point (x_0, y_0), si l'on fait décrire à x un lacet γ issu de x_0 évitant les "points singuliers" et si l'on suit "par continuité" la valeur de $y(x)$, la valeur obtenue par y lorsque x est "revenu" à son point de départ x_0 est en général différente de y_0. Pour chaque chemin, on obtient donc une permutation de l'ensemble des solutions de $P(x_0, y) = 0$; c'est un "groupe de monodromie", (fini dans ce cas). Il a fallu beaucoup de temps et de travail pour donner un sens précis à tous ces guillemets...

Du point de vue des équations différentielles, les exemples les plus anodins mènent à des solutions multiformes : les solutions de l'équation différentielle linéaire $xdy =$

$\lambda y dx$ sont $y = Const.x^\lambda$ et ne sont pas des fonctions uniformes de la variable x dès que λ n'est pas entier. Lorsque x fait "un tour" autour du "point singulier" 0, une solution est multipliée par $\exp(2i\pi\lambda)$. Dans ce cas, le "groupe de monodromie", agissant sur l'espace des solutions est le groupe monogène engendré par $\exp(2i\pi\lambda)$, en général infini. Bien sûr, cet exemple est trop élémentaire. Considérons une équation de Riccati :

$$P(x)\frac{dy}{dx} = A(x) + B(x)y + C(x)y^2.$$

Ici, P, A, B, C sont des polynômes en une variable complexe x. Partons d'une condition initiale (x_0, y_0) pour laquelle x_0 n'est pas un point singulier (*i.e.* $P(x_0) \neq 0$). Il existe une solution locale de l'équation, définie dans un voisinage de x_0. Choisissant un chemin γ issu de x_0 et ne rencontrant aucun point singulier, on peut montrer qu'il est possible de prolonger cette solution le long du chemin, comme une solution *méromorphe*. Si γ est un lacet issu de x_0, la valeur y_1 de la solution y lorsque γ revient en x_0 est en général différente de y_0. La transformation qui associe cette nouvelle valeur y_1 à la valeur initiale y_0 est une homographie $y_1 = (ay_0+b)/(cy_0+d)$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ (évitant les points singuliers). Ceci définit donc un homomorphisme du groupe fondamental du plan complexe privé des points singuliers vers le groupe des homographies agissant sur la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Puisque ce groupe fondamental est un groupe libre non commutatif (dès que P a au moins trois racines), le groupe de monodromie, image de cet homomorphisme, peut être extrêmement compliqué, par exemple dense dans le groupe homographique. Les "solutions" de l'équation de Riccati sont alors "très multiformes", ce qui effrayait beaucoup nos prédécesseurs...

Si l'on considère une équation du type précédent mais où l'on remplace le polynôme $A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ par $A(x) + B(x)y + C(x)y^2 + D(x)y^3$, il apparaît un nouveau phénomène : lorsque l'on prolonge analytiquement une solution le long d'un chemin γ, on rencontre en général des singularités (de type ramification) en des points qui ne sont pas singuliers pour l'équation. Par exemple, l'équation $-2\frac{dy}{dx} = y^3$ a comme solutions $y = 1/\sqrt{x - Const}$ qui présente une "singularité mobile" au point $x = Const$. Autrement dit, on ne peut même plus définir de groupe de monodromie puisqu'on ne peut plus suivre les valeurs d'une solution le long d'un chemin qui évite les points singuliers de l'équation. Comment analyser les "solutions" d'une telle équation si on ne peut mesurer leur défaut d'uniformité par un groupe ? Lorsque l'on considère des équations non résolues en $\frac{dy}{dx}$, ou des équations d'ordre supérieur, d'autres phénomènes (encore pires) apparaissent, comme l'existence de points singuliers transcendants mobiles : par exemple $y^2y'' + 2yy'^2 + 1 = 0$ a comme solutions $y = 1/(Const + \ln(x - Const'))$.

La réaction des mathématiciens du dix-neuvième siècle devant cet "excès de monodromie" des solutions des équations différentielles algébriques fut d'essayer de classifier les équations différentielles ayant peu de monodromie, dans l'espoir que ces équations soient suffisamment riches pour produire des "transcendantes nouvelles qui enrichiraient l'analyse". Le choix était clair : négliger l'étude des équations différentielles "génériques", trop compliquées, pour se consacrer aux rares exemples où la monodromie est contrôlée. Voici quelques exemples. Briot-Bouquet, puis Fuchs et Poincaré cherchent parmi les équations polynomiales de la forme $P(y', y, x) = 0$ celles dont les solutions sont uniformes ou, au pire, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs : outre les fonctions algébriques, ils montrent que seules les fonctions elliptiques peuvent vérifier ce critère. Schwarz décrit les équations hypergéométriques dont le groupe de monodromie est *fini*, c'est-à-dire dont les solutions sont des fonctions algébriques. Painlevé étudie dans le même esprit les équations du second ordre dont les solutions sont uniformes : il découvre ainsi ses fameuses "transcendantes de Painlevé". Pour une étude historique de ces questions, on pourra consulter avec intérêt le livre remarquable de Gray [3].

Ainsi, au tournant du siècle, l'immense majorité des équations différentielles restaient inexplorées.

Parallèlement à cette riche théorie des équations différentielles dans le domaine complexe, une théorie plus modeste de l'itération des fonctions holomorphes, et tout particulièrement des fractions rationnelles, voyait le jour vers la fin du dix-neuvième siècle. Un livre passionnant de Alexander retrace cette histoire [1]. On y apprend notamment que les motivations de précurseurs (comme Schröeder, Koenigs, Leau) étaient bien éloignées des équations différentielles ; l'analogie entre les itérations en temps discrets et continus (comme dans une équation différentielle) ne leur apparaissant pas clairement. L'objet d'étude était plutôt la "théorie des équations fonctionnelles". Un exemple est l'équation d'Abel : étant donnée une fonction analytique $\phi(z)$, peut-on trouver une autre fonction analytique f telle que $f(\phi(z)) = f(z) + 1$? C'est l'occasion de développer des concepts comme ceux de conjugaison entre deux systèmes dynamiques mais aussi d'ébaucher une description qualitative de l'itération au voisinage d'un point fixe. Un point commun avec les équations différentielles est cependant à noter. L'objet de base n'est pas l'étude de la dynamique (d'une équation différentielle ou d'une fonction analytique) mais plutôt la recherche de transcendantes nouvelles et intéressantes qu'on peut définir par ce procédé. Comme pour les équations différentielles, au début du siècle, aucune étude générale n'a été tentée : au mieux quelques jolis exemples ont été analysés. Cependant, cette théorie primitive de l'itération des fractions rationnelles ne peut en aucun cas être comparée *en volume* à celle des équations différentielles qui a déjà une longue tradition : les résultats importants sont encore peu nombreux.

Le début du vingtième siècle : Poincaré, Painlevé, Fatou et Julia

Il est temps de passer au vingtième siècle ! Trichons un peu en considérant les travaux de Poincaré sur les groupes fuchsiens et kleinéens comme datant du vingtième siècle (ils sont si révolutionnaires !) Voici au moins trois idées fondamentalement nouvelles.

Poincaré se lance dans une étude systématique des groupes (discrets mais infinis) de transformations homographiques de la sphère de Riemann : ce sont les groupes kleinéens. Il prend conscience de leur richesse dynamique, des ensembles limites compliqués qu'ils engendrent, et il montre leur intérêt fondamental : grâce aux fonctions fuchsiennes et kleinéennes, on peut "résoudre" et "uniformiser" les solutions des équations différentielles algébriques linéaires (ou, ce qui revient presque au même, des équations de Riccati). La chose importante est qu'il s'agit ici d'étudier les équations générales. Les groupes fuchsiens s'avèrent remarquablement puissants : le théorème d'uniformisation de Koebe-Poincaré montre par exemple que *toute* surface de Riemann connexe est isomorphe à la sphère de Riemann, à un quotient de $\mathbf{C}$ par un groupe discret de translations ou bien au quotient du disque unité par un groupe fuchsien (cas "générique").

Pour les équations différentielles non linéaires, Poincaré comprend l'importance de l'analyse locale au voisinage des points singuliers. Son théorème de linéarisation au voisinage de l'origine de l'équation $(ax + by + \ldots)\, dx = (cx + dy + \ldots)\, dy$ sous une condition *générique* sur la partie linéaire, est un bon exemple de l'importance qu'il accorde aux équations les plus générales.

Dans le domaine de la dynamique réelle, par exemple dans ses travaux de mécanique céleste, il met en évidence des phénomènes appelés aujourd'hui *chaotiques.* Pour un système générique, il ne faut plus chercher à "intégrer" l'équation, ce qui serait le plus souvent impossible, mais il faut au contraire s'efforcer de décrire qualitativement leur comportement.

Toujours dans le domaine de la dynamique réelle, il définit le concept d'*application de premier retour* sur une section de Poincaré. Par cet artifice, on peut (parfois) remplacer l'étude d'une équation différentielle par celle de l'itération d'une transformation. Il ne semble pas cependant que ceci lui ait permis d'entrevoir un lien entre la dynamique des équations différentielles complexes et la théorie de l'itération des fractions rationnelles, encore balbutiante (et qui ne semble pas l'avoir intéressé). Il est vrai que les applications de premier retour introduites par Poincaré sont injectives par définition alors qu'une fraction rationnelle ne l'est pas !

Painlevé, que nous avons cité plus haut, commence une étude de la nature des singularités des solutions des équations différentielles générales. Il a l'intuition de la notion de *structure feuilletée* et comprend qu'il est préférable de considérer les "solutions" comme des surfaces de Riemann non paramétrées qui sont en général non singulières mais dont les projections sur les axes de coordonnées présentent des singularités. La porte est ouverte pour une étude globale du comportement qualitatif, indépendamment des coordonnées utilisées.

Du côté de l'itération des polynômes et des fractions rationnelles, entre 1917 et 1923, Fatou et Julia développent une théorie remarquablement intéressante. Ils analysent la dynamique à la fois localement, au voisinage des points périodiques par exemple, et globalement, en dégageant la dichotomie entre l'*ensemble de Julia* ("chaotique") et son complémentaire. Ils perçoivent également la nécessité de comprendre la dynamique d'une fraction rationnelle générique et découvrent l'incroyable richesse des possibilités. On peut penser que cette dynamique devint l'objet prioritaire d'étude et que les équations fonctionnelles finirent par passer au second plan dans l'esprit de Fatou et Julia.

Après Fatou et Julia, la théorie de l'itération des fractions rationnelles semble s'endormir... Il y a cependant une exception notable : en 1942, Siegel démontre son fameux théorème de linéarisation d'un germe de transformation holomorphe au voisinage d'un point fixe, lorsque la dérivée à l'origine est de module 1 et satisfait une condition diophantienne. L'existence des *disques de Siegel* dans la dynamique des polynômes avait été discutée par Fatou et Julia ; la réponse positive apportée par Siegel ajoutait encore de la richesse à la théorie. La difficulté présentée par les *petits diviseurs* avait été mise en évidence par Poincaré dans ses travaux de mécanique céleste.

De la même manière, les travaux de Poincaré concernant les groupes kleinéens ou l'étude qualitative des équations différentielles complexes n'eurent pas beaucoup d'écho parmi ses successeurs immédiats. Dans un degré moindre, c'est également le cas en ce qui concerne la dynamique réelle, avec d'importantes exceptions telles que Birkhoff ou Denjoy.

Ainsi, le domaine des systèmes dynamiques holomorphes, qui n'est pas encore unifié, entre dans une période assez longue sans grande activité. Comme on le sait, les mathématiciens ne restaient pas inactifs pour autant. C'est l'époque du développement de la topologie, de la géométrie algébrique, de la théorie des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes, de la théorie ergodique, qui sont bien utiles pour les systèmes dynamiques holomorphes d'aujourd'hui...

Les années 1960-1980

La situation allait changer dans les années 60.

Reeb, dans la lignée de Painlevé, commence l'étude systématique des *feuilletages*. Il s'agit d'objets de nature dynamique où les feuilles, remplaçant les trajectoires, ne sont pas supposées a priori paramétrées par un temps, qu'il soit réel ou complexe. L'exemple de base pourrait être celui des courbes intégrales d'une forme différentielle $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ où l'on renonce à penser aux solutions comme des fonctions $y(x)$ mais comme à des surfaces de Riemann dans un espace (projectif par exemple). La théorie des feuilletages n'est cependant pas destinée uniquement au cas complexe. Parmi les apports fondamentaux de cette théorie, il faut surtout signaler la notion d'*holonomie*, version élaborée de la monodromie. Étant donné un chemin dans les feuilles, on essaye de suivre ce chemin dans les feuilles voisines. Dans un premier temps, toujours à cause de la “peur de la monodromie”, on cherche à comprendre les cas où il y a peu d'holonomie : c'est l'époque où l'on étudie les feuilletages sans holonomie, ou presque sans holonomie, ou dont toutes les feuilles sont compactes etc...

C'est à Haefliger que l'on doit l'idée que l'étude d'un feuilletage se ramène en grande partie à celle de son *pseudogroupe d'holonomie*. Il s'agit d'une collection d'homéomorphismes entre des ouverts de $\mathbf{R}^n$ dont on étudie les compositions *là où elles sont définies*. C'est un cadre naturel parfaitement adapté aux problèmes de monodromie que nous avons rencontrés plus haut. Les outils sont enfin disponibles pour une étude générale des feuilletages holomorphes, ou même simplement différentiables. Toute une école commence à se développer autour de cette thématique. Il faut cependant noter que ce groupe de mathématiciens, extrêmement actifs et productifs, n'a pas (ou peu) de connexions avec les travaux de Poincaré sur les groupes kleinéens. L'histoire des *minimaux exceptionnels* illustre ce fait. Pendant plus de dix ans, ce groupe cherche à savoir s'il est vrai qu'un feuilletage (assez différentiable) de codimension 1 réelle, sur une variété compacte, ne peut être que de deux types : ou bien toutes les feuilles sont denses ou bien il existe une feuille compacte. Il aurait suffi d'observer, comme l'a fait Raymond en 1972, que les textes de Poincaré sur les groupes fuchsiens regorgent de contre-exemples !

L'étude locale des singularités n'est pas oubliée. Les progrès de la géométrie algébrique permettent d'aborder avec succès la *désingularisation* des points singuliers d'équations différentielles holomorphes en dimension 2 (théorème de Seidenberg). C'est également le début d'une riche théorie dynamique *locale*. Après désingularisation, le point singulier est devenu un diviseur au voisinage duquel on cherche à comprendre le germe de dynamique, en particulier à travers l'holonomie du diviseur, qui peut être très compliquée.

Pendant ce temps, et assez indépendamment, la dynamique réelle faisait des progrès fantastiques, en particulier sous l'impulsion de Smale qui proposait le programme ambitieux de comprendre la dynamique d'un difféomorphisme générique (ou d'un champ de vecteurs générique puisque l'analogie est maintenant familière à tous). C'est l'époque glorieuse où se dégagent des concepts aussi importants que ceux de la *stabilité structurelle* ou d'*hyperbolicité* des difféomorphismes. Un difféomorphisme est structurellement stable si tout difféomorphisme suffisamment proche lui est topologiquement conjugué (*i.e.* a la même dynamique topologique). Pour simplifier, un difféomorphisme est hyperbolique si le fibré tangent à la variété ambiante peut se décomposer, au moins au dessus de la partie non errante, en une somme de deux sous-fibrés, l'un étant contracté et l'autre étant dilaté par la différentielle du difféomorphisme. Une telle propriété d'hyperbolicité entraîne (presque) la stabilité structurelle. Une grande activité se développe autour de ce genre de difféomorphismes : étude topologique, ergodique etc. L'espoir qu'un difféomorphisme générique soit hyperbolique et structurellement stable a été malheureusement déçu... Il n'en reste pas moins que ces difféomorphismes hyperboliques sont fréquents et que leur étude était préliminaire à celle des difféomorphismes *partiellement hyperboliques* qui est en cours actuellement.

Parmi les exemples de difféomorphismes non hyperboliques mais dont la dynamique mérite une analyse approfondie, il faut citer l'exemple de Hénon : il s'agit d'une bijection polynomiale du plan réel de la forme $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (y + x^2 + c, ax)$. En se limitant à certaines valeurs des réels a, c, ces exemples présentent un *attracteur non hyperbolique*, c'est-à-dire un compact invariant Λ (non réduit à une orbite périodique) tel que toute trajectoire issue d'un point proche de Λ s'accumule sur Λ. Par ailleurs, même si cette dynamique n'est pas stable, l'existence de cet attracteur est persistente : elle subsiste dans "beaucoup" de petites perturbations, même en sortant de la famille des applications de Hénon.

Du coté de l'itération des fractions rationnelles, cette période est très calme... Il faut toutefois noter le travail de Brolin qui établit un lien avec la théorie du potentiel qui sera si fécond après 1980.

La théorie des groupes kleinéens, quant à elle, se développe dans le cadre de l'analyse complexe et de ses liens avec les surfaces de Riemann. On entreprend en particulier l'étude approfondie de leurs espaces de déformations. Il faut signaler à cette époque le remarquable *théorème de finitude d'Ahlfors* : si un groupe kleinéen possède une partie génératrice finie et si l'on considère le quotient du domaine de discontinuité dans la sphère de Riemann par l'action du groupe, on obtient une surface de Riemann *de type fini*, c'est-à-dire isomorphe à une surface de Riemann compacte à laquelle on a ôté un nombre fini de points.

Depuis 1980, l'unification ?

L'artisan principal de cette unification est Sullivan. Dès le début des années 1980, il propose un "dictionnaire" entre plusieurs théories : les groupes kleinéens, l'itération des fractions rationnelles, les équations différentielles algébriques et, plus généralement, les feuilletages transversalement holomorphes. Le point commun est un pseudogroupe de transformations holomorphes. Pour une fraction rationnelle, transformation non inversible de la sphère de Riemann, il faut penser au pseudogroupe engendré par toutes les branches de l' "inverse". Pour les groupes kleinéens, ce pseudogroupe est un groupe global : il n'y a plus de point critique et donc de ramification pour l'inverse, mais par contre, au lieu d'itérer une seule transformation, on doit considérer les orbites d'un groupe en général très "gros". Pour les feuilletages algébriques, il s'agit du pseudogroupe d'holonomie de Reeb-Haefliger, les difficultés étant alors doubles puisque, d'une part on a affaire à plusieurs transformations qu'il faut composer et, d'autre part, les transformations en question ne sont pas globalement définies. On trouve par exemple dans le dictionnaire l'analogie (enfin établie clairement) entre l'ensemble limite d'un groupe kleinéen et l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle. Ces analogies vont s'avérer fructueuses. L'exemple le plus célèbre est celui du théorème de Sullivan des composantes non errantes du complémentaire de l'ensemble de Julia, analogue au théorème de finitude de Ahlfors. L'étude comparée fractions rationnelles/groupes kleinéens est maintenant naturelle pour les experts. L'apport est immense, chaque théorie apportant sa contribution à l'autre. L'usage des applications quasiconformes passe des groupes kleinéens aux fractions rationnelles où il rencontre des succès remarquables avec la chirurgie holomorphe sur les fractions rationnelles. Réciproquement, la problématique stabilité structurelle/ hyperbolicité passe des fractions rationnelles vers les groupes kleinéens. Mañé, Sad et Sullivan démontrent que la stabilité structurelle est générique parmi les fractions rationnelles mais le problème de la généricité de l'hyperbolicité est encore au centre des recherches d'aujourd'hui.

Malheureusement, il ne semble pas que le dictionnaire de Sullivan ait eu beaucoup d'influence sur la théorie des équations différentielles. C'est dommage mais nous sommes persuadés que les techniques des groupes kleinéens/fractions rationnelles sauront bientôt se rendre utiles dans ce contexte des équations différentielles algébriques...

À vrai dire, le dictionnaire va plus loin et propose en fait une analogie avec la dynamique *réelle* de dimension 1, le mot clé étant en fait celui de *pseudogroupe conforme* : un difféomorphisme local de $\mathbf{R}$ est évidemment conforme puisque sa différentielle en chaque point est une similitude (en dimension 1 réelle !). Les lemmes de distorsion de Koebe, si utiles dans l'étude des fractions rationnelles, trouvent alors leurs analogues réels et on obtient toute une série de résultats remarquables sur la dynamique des applications différentiables d'un intervalle dans lui-même. On obtient par exemple des analogues précis du théorème de finitude d'Ahlfors pour la dynamique réelle de dimension 1. En fait, des techniques semblables avaient déjà été développées dans les années 70 par les spécialistes des feuilletages de codimension 1 réelle, tels que Sacksteder, par exemple autour de la notion de minimal exceptionnel citée plus haut. On peut regretter que ces points de vue nouveaux en provenance des groupes kleinéens et des fractions rationnelles n'aient pas encore permis de repenser cette théorie des minimaux exceptionnels ; la théorie dite "des niveaux" est bien développée mais un grand nombre de problèmes essentiels en dynamique réelle des feuilletages de codimension 1 restent inexplorés (peut-être simplement par manque de communication entre les spécialistes de ces sujets...)

Cette étude comparée dynamique réelle/complexe de dimension 1 est en grande partie la cause des succés obtenus dans la compréhension des "phénomènes de renormalisation et d'universalité" d'abord découverts expérimentalement et dont la justification finale est obtenue par un savant dosage de dynamique, de théorie de Teichmüller et de chirurgie holomorphe...

Il faut encore citer un développement récent. On savait depuis longtemps que l'étude des attracteurs de Hénon était plus compliquée mais assez proche de celle des polynômes quadratiques réels. Il était tentant de complexifier le difféomorphisme polynomial de Hénon et d'étudier la dynamique de l'automorphisme polynomial de

$\mathbf{C}^2$ ainsi obtenu. On cherche alors à mimer autant que possible les résultats de Fatou et Julia mais de nombreuses surprises apparaissent, ce qui ne surprendra pas le lecteur habitué aux phénomènes associés à la théorie de plusieurs variables complexes. On peut en particulier utiliser la belle théorie des courants dans les variétés complexes ainsi que la théorie du pluri-potentiel pour obtenir des analogues de la théorie ergodique des polynômes. Cette théorie récente de la dynamique holomorphe en plusieurs variables semble pleine d'avenir et ne manquera probablement pas de retombées en dynamique réelle.

En cette fin de vingtième siècle, il y a donc lieu d'être optimiste pour l'avenir des systèmes dynamiques holomorphes. D'une part, l'objet d'étude s'est considérablement élargi puisque nous avons maintenant l'ambition de comprendre les systèmes dynamiques génériques et non plus seulement quelques exemples très particuliers. D'autre part, les objets étudiés et les techniques utilisées se sont généralisés, regroupant aussi bien l'étude "classique" des équations différentielles, des feuilletages holomorphes, des groupes kleinéens ou encore celle de l'itération des polynômes ou des fractions rationnelles, en une ou plusieurs variables complexes ou même ... réelles !

Nous espérons donc avoir convaincu le lecteur de la cohérence entre les quatre textes qui constituent ce volume...

Bibliographie

Voici quelques références utiles sur l'histoire de la dynamique holomorphe.

[1] Alexander, D.S.: *A history of complex dynamics, from Schröder to Fatou and Julia*, Vieweg & Sohn, 1994.

[2] Godbillon, C.: *Feuilletages. Études géométriques*, avec une préface de G. Reeb. Progress in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[3] Gray, J.: *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, 1986.

[4] Hille, E.: *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, 1976.

[5] Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S., Yoshida, M.: *From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions.* Aspects of Mathematics, E16. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.

[6] Kolmogorov, A.N., Yushkevich, A.P.: *Mathematics of the 19th century, Geometry, analytic function theory*, Birkhäuser, 1996.

[7] Milnor, J.: *Dynamics in one complex variable: introductory lectures*, Inst. Math. Sci., SUNY Stony Brook, Stony Brook, NY, 1990.

[8] Painlevé, P.: *Œuvres de Paul Painlevé*, CNRS, tome 1, 1972, (voir en particulier les "leçons de Stockholm").

[9] Poincaré, H.: *Œuvres de Henri Poincaré*, tomes I, II et III, Gauthier Villars, 1951,1952 et 1965, (voir en particulier l'"Analyse des travaux scientifiques ; équations différentielles" dans le tome I).

[10] Reeb, G.: *Feuilletages: résultats anciens et nouveaux (Painlevé, Hector et Martinet)*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 55 (Été 1972). Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1974. 70 pp.