Le théorème du soufflet

Étienne Ghys

Une règle, un crayon, du carton, des ciseaux et de la colle : il n'en faut guère plus pour procurer aux mathématiciens du plaisir et de jolis problèmes — dont l'étude se révèle souvent, après coup et de manière inattendue, utile dans d'autres métiers.

Construisons une pyramide en carton… Pour cela, on commence par découper un patron SABCDE dans une feuille de carton comme indiqué sur la figure 1, puis on plie le long des lignes pointillées et, enfin, on colle les côtés AS et ES.

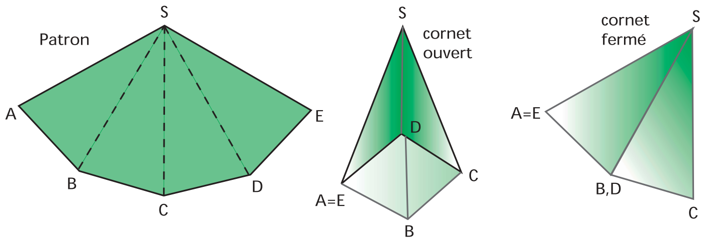

Figure 1. La construction d'une pyramide en carton. Dépourvu de la base ABCDA, cet objet est flexible.

Le résultat est une espèce de cornet dont le sommet est le point S et dont le bord est un quadrilatère ABCD. Cet objet est *flexible*. Si on le tient dans la main, le quadrilatère ABCD peut se déformer et s'ouvrir plus ou moins : la construction n'est pas très solide. Pour compléter la pyramide, il faut encore découper un carré en carton et le coller sur le quadrilatère pour former la base. Après cette opération, la pyramide est solidifiée, rigidifiée. Si on la pose sur une table, elle ne s'écroule pas. Si on la prend dans la main et si on essaye de la déformer (avec douceur !), on n'y parvient pas, à moins de déformer les faces en carton. De même, un cube en carton est *rigide* comme tout le monde l'a souvent constaté. Qu'en est-il pour un *polyèdre* plus général, possédant peut-être des milliers de faces ? La géode de la Villette, à Paris, est-elle rigide ? Cette dernière question laisse entrevoir que le sujet de la rigidité et de la flexibilité n'est peut-être pas seulement théorique !

Un problème encore d'actualité et qui remonte à l'Antiquité

Le problème de la rigidité de ce type d'objets est très ancien. Euclide en avait probablement connaissance. Le grand mathématicien français Adrien-Marie Legendre s'y est intéressé vers la fin du XVIII^e siècle et en a parlé à son collègue Joseph-Louis Lagrange ; lequel suggéra à son tour au jeune Augustin-Louis Cauchy d'étudier cette question en 1813. Ce sera le premier résultat marquant du baron A.-L. Cauchy, qui deviendra par la suite l'un des plus grands mathématiciens de son siècle.

Cauchy s'est intéressé aux polyèdres *convexes*, c'est-à-dire aux polyèdres qui n'ont pas d'arêtes rentrantes. Par exemple, la pyramide que nous avons construite ou le ballon de football sont convexes, tandis que l'objet dessiné à droite de la figure 2 ne l'est pas.

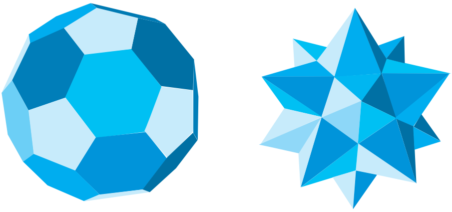

Figure 2. Un polyèdre convexe et un polyèdre étoilé, non convexe.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), l'un des grands mathématiciens de son époque. (Cliché Archives de l'École polytechnique)

Le théorème établi par Cauchy est le suivant : *tout polyèdre convexe est rigide*. Cela signifie que si l'on construit un polyèdre convexe avec des polygones indéformables (en métal par exemple) ajustés par des charnières le long de leurs arêtes, la géométrie globale de l'ensemble empêche les jointures de jouer. Le cornet que nous avons construit est flexible mais cela n'invalide pas le théorème : il lui manque une face, et c'est la dernière face qui rigidifie la pyramide…

Faire des mathématiques, c'est *démontrer* ce qu'on affirme ! Or la démonstration de Cauchy est superbe (même si certains ont fait remarquer par la suite qu'elle était incomplète). Il n'est malheureusement pas question dans ce petit article de donner une idée de cette preuve, mais j'aimerais en extraire un « lemme », c'est-à-dire une étape dans la démonstration.

Posons sur le sol une chaîne constituée de quelques barres métalliques assemblées bout à bout, comme sur la figure 3. En chacun des angles de cette ligne polygonale, bougeons les deux barres de façon à diminuer l'angle correspondant. Alors, les deux extrémités de la chaîne se rapprochent. Cela vous semble évident ? Essayez de le démontrer…

La géode de la Villette, à la Cité des sciences à Paris, est un polyèdre convexe formé de 1730 facettes triangulaires. La rigidité des polyèdres articulés donne lieu à un joli problème mathématique qui a été résolu seulement en 1997. (Cliché Cosmos/R. Bergerot)

Pendant longtemps, beaucoup de mathématiciens se sont demandé si les *polyèdres non convexes* étaient également rigides. Peut-on trouver une preuve de la rigidité qui n'utiliserait pas l'hypothèse de convexité ? Les mathématiciens aiment les énoncés dans lesquels toutes les hypothèses sont utiles pour obtenir la conclusion. Il a fallu attendre plus de 160 ans pour connaître la réponse dans ce cas particulier.

En 1977, le mathématicien canadien Robert Connelly créa la surprise. Il a construit un polyèdre (assez compliqué) qui est flexible, bien sûr non convexe pour ne pas contrarier Cauchy ! Depuis, sa construction a été quelque peu simplifiée, en particulier par Klaus Steffen. Je présente dans la figure 4 un patron qui permettra au lecteur de construire le « flexidron » de Steffen. Découpez, pliez le long des lignes. Les lignes en continu sont des arêtes saillantes et les lignes en pointillé correspondent aux arêtes rentrantes. Collez les bords libres de la manière évidente. Vous obtiendrez une espèce de Shadok et vous verrez qu'il est effectivement flexible (un peu...).

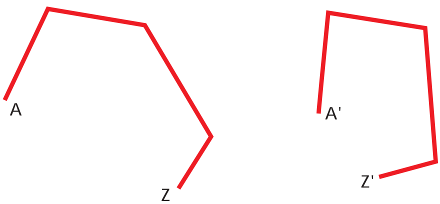

Figure 3. Si l'on diminue les angles que font les segments entre eux, les extrémités de la chaîne de segments se rapprochent.

Le volume d'un polyèdre varie-t-il lorsqu'on le déforme ?

À l'époque, les mathématiciens furent enchantés par ce nouvel objet. Un modèle métallique fut construit et déposé dans la salle de thé de l'Institut des hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette près de Paris, et l'on pouvait s'amuser à faire bouger cette chose à vrai dire pas très jolie, et qui grince un peu. L'histoire raconte que Dennis Sullivan eut l'idée de souffler de la fumée de cigarette à l'intérieur du flexidron de Connelly et qu'il constata qu'en faisant bouger l'objet, aucune fumée ne sortait... Il eut donc l'intuition que quand le flexidron se déforme, son volume ne varie pas ! L'anecdote est-elle vraie ? Quoi qu'il en soit, Connelly et Sullivan conjecturèrent que *lorsqu'un polyèdre se déforme, son volume est constant*. Il n'est pas difficile de vérifier cette propriété dans l'exemple particulier du flexidron de Connelly ou encore pour celui de Steffen (au prix de calculs compliqués mais dépourvus d'intérêt). Mais la conjecture en question considère *tous* les polyèdres, y compris ceux qui n'ont jamais été construits en pratique ! Ils ont appelé cette question la « conjecture du soufflet » : le soufflet au coin du feu éjecte de l'air quand on le presse ; autrement dit, son volume diminue (et c'est d'ailleurs sa fonction). Bien sûr, un vrai soufflet ne répond pas au problème de Connelly et Sullivan : il est en cuir et ses faces se déforment constamment, contrairement à nos polyèdres aux faces rigides.

En 1997, Connelly et deux autres mathématiciens, I. Sabitov et A. Walz, ont finalement réussi à prouver cette conjecture. Leur démonstration est grandiose, et illustre une fois de plus les interactions entre toutes les parties des mathématiques. Dans cette question éminemment géométrique, les auteurs ont utilisé des méthodes très fines d'algèbre abstraite moderne. Il ne s'agit pas d'une démonstration que Cauchy « aurait pu trouver » : les techniques mathématiques de l'époque étaient insuffisantes. Je voudrais rappeler une formule que l'on apprenait autrefois à l'école secondaire. Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a, b et c, on peut calculer facilement la superficie du triangle. Pour cela, on calcule d'abord le demi-périmètre $p = (a + b + c)/2$ et ensuite on obtient la superficie en extrayant la racine carrée de $p(p - a)(p - b)(p - c)$. Cette jolie formule porte le nom du mathématicien grec Héron et nous vient de la nuit des temps. Peut-on calculer, de façon analogue, le volume d'un polyèdre si l'on connaît les longueurs de ses arêtes ? Nos trois mathématiciens contemporains ont montré que oui.

Ils partent d'un polyèdre construit à partir d'un patron formé d'un certain nombre de triangles et ils appellent l_1, l_2, l_3, etc. les longueurs des côtés de ces triangles (éventuellement très nombreux). Ils trouvent alors que le volume V du polyèdre doit satisfaire à une équation du n^e^ degré, c'est-à-dire une équation de la forme $a_0 + a_1V + a_2V^2 + \ldots + a_nV^n = 0$. Le degré n dépend du patron utilisé et les coefficients de l'équation (a_0, a_1, etc.) dépendent explicitement des longueurs des côtés l_1, l_2, l_3, etc. Autrement dit, si l'on connaît le patron et les longueurs des côtés, on connaît l'équation. Si le lecteur se souvient qu'une équation a en général une solution lorsqu'elle est du premier degré, deux solutions lorsqu'elle est du second degré, il pourra deviner qu'une équation de degré n n'a guère que n solutions. Conclusion : si l'on connaît le patron et les longueurs, on ne connaît pas nécessairement le volume, mais on sait au moins que ce volume ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Lorsque le flexidron se déforme, son volume ne peut donc pas varier continûment (sinon, le volume prendrait une infinité de valeurs successives) ; ce volume est « bloqué » et la conjecture du soufflet est établie...

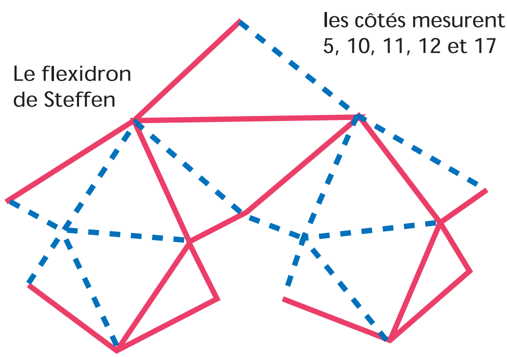

Figure 4. La patron du flexidron de Steffen.

Oui, le problème du soufflet est digne d'intérêt !

Ce problème est-il utile, intéressant ? Qu'est-ce qu'un problème mathématique intéressant ? Question difficile à laquelle les mathématiciens réfléchissent depuis longtemps, bien sûr. Voici quelques éléments de réponse, quelques indices de « qualité ». L'ancienneté est un premier critère : les mathématiciens sont très sensibles à la tradition, à des problèmes énoncés depuis longtemps, sur lesquels des mathématiciens de plusieurs générations ont planché. Un bon problème doit également s'énoncer simplement, sa solution doit mener à des développements surprenants, si possible mettant en relation des domaines très différents. De ces points de vue, le problème de la rigidité que nous venons d'aborder est intéressant.

La question de savoir si un bon problème doit avoir des applications utiles dans la pratique est plus subtile. Les mathématiciens y répondent de manière très variable. Incontestablement, les questions « pratiques », issues par exemple de la physique, servent bien souvent de motivation pour les mathématiques. Parfois, il s'agit de résoudre un problème bien concret, mais le lien est souvent plus flou : le mathématicien ne se sert alors de la question concrète que comme d'une *source d'inspiration* et la résolution effective du problème initial n'est plus la motivation véritable. Le problème de rigidité appartient à cette dernière catégorie. L'origine physique est assez claire : la stabilité et la rigidité de structures, par exemple métalliques. Pour l'instant, les exemples de Connelly ne sont d'aucune utilité pour les ingénieurs. Cependant, il paraît clair que ce genre de recherche ne manquera pas, dans un avenir indéterminé, de permettre une meilleure compréhension globale de la rigidité des vastes structures constituées d'un grand nombre d'éléments individuels (macromolécules, bâtiments, etc.). Il s'agit donc de recherches théoriques et « désintéressées », mais qui ont de bonnes chances de s'avérer utiles un jour…

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon,
CNRS-UMR 5669

Quelques références :

- M. Berger, *Géométrie, vol. 3.* - Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes (CEDIC/Nathan Information, 1977).
- R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, « The bellows conjecture », *Beiträge Algebra Geom., 38* (1997), n° 1, pp. 1-10.
- R. Connelly, « A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra », Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publication Mathématique n° 47* (1977), pp. 333-338.
- N. H. Kuiper, « Sphères polyédriques flexibles dans E^3, d'après Robert Connelly », *Séminaire Bourbaki*, 30^{e} année (1977/78), exposé n° 514, pp. 147-168 (Lecture Notes in Math. 710, Springer, 1979).