

## Topologie des Feuilles Generiques

Etienne Ghys



*The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 141, No. 2. (Mar., 1995), pp. 387-422.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X%28199503%292%3A141%3A2%3C387%3ATDFG%3E2.0.CO%3B2-1>

*The Annals of Mathematics* is currently published by Annals of Mathematics.

---

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/about/terms.html>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/journals/annals.html>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

---

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to creating and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

# Topologie des feuilles génériques

Par ETIENNE GHYS

## Introduction

Les feuilles d'une variété feuilletée compacte sont en général non compactes et leur topologie peut être extrêmement complexe. La richesse des possibilités est illustrée par le théorème suivant de J. Cantwell et L. Conlon [2]. Sur une variété compacte quelconque de dimension 3, il est possible de construire un feuilletage de dimension 2 dont l'une des feuilles est difféomorphe à une surface non compacte donnée *a priori*. Cependant, nous nous proposons de montrer que, un feuilletage étant fixé, la topologie de la "plupart" de ses feuilles est soumise à de sérieuses contraintes. Lorsque les feuilles sont de dimension 2, ces contraintes sont si fortes qu'elles décrivent complètement les surfaces qui peuvent apparaître "génériquement". Avant de discuter ce que nous entendons par genericité, nous citons une application typique de nos résultats. Nous nous plaçons en fait dans le contexte des laminations, plus général que celui des feuilletages, où l'espace ambiant n'est pas supposé être une variété mais un espace métrique compact quelconque (voir §2 pour une définition).

**THÉORÈME A.** *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination orientable de dimension 2 sur un espace compact quelconque. Si  $\mathcal{F}$  n'a pas de feuille compacte, alors une infinité non dénombrable de ses feuilles sont difféomorphes à l'une des six surfaces suivantes:*

- a) le plan  $\mathbf{R}^2$ ,
- a') le "monstre du Loch-Ness" i.e. le plan auquel on attache une infinité d'anses,
- b) le cylindre  $S^1 \times \mathbf{R}$ ,
- b') l'"échelle de Jacob", i.e. le cylindre auquel on attache une infinité d'anses dans les deux directions,
- c) l'"arbre de Cantor", i.e. la sphère  $S^2$  à laquelle on retire un ensemble de Cantor,
- c') l'"arbre de Cantor fleuri", i.e. l'arbre de Cantor auquel on attache une infinité d'anses dans toutes les directions.

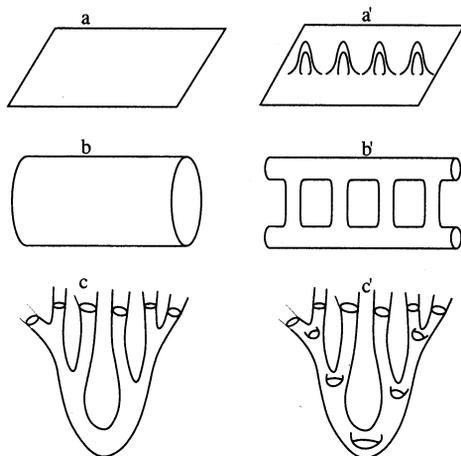


FIGURE 1.

Dans le cas non orientable, on obtiendrait un résultat analogue en ajoutant trois surfaces à la liste précédente (voir §3).

Pour donner un sens à la notion de généricité, on est tout d'abord tenté d'utiliser une mesure transverse invariante par holonomie. Malheureusement, nos résultats ne pourraient pas alors s'appliquer à toutes les laminations puisque ce type de mesure n'existe que rarement. On utilise donc une notion plus générale, introduite par L. Garnett dans [7]. Soit  $\mathcal{F}$  une lamination sur un espace compact  $M$  et munissons le fibré tangent aux feuilles d'une métrique riemannienne (les conditions de régularité pour cette métrique sont très faibles, voir §2). Dans ces conditions, on peut privilégier certaines mesures sur  $M$ , appelées *mesures harmoniques* (par rapport à  $\mathcal{F}$  et à la métrique choisie). Ces mesures rendent compte de la distribution asymptotique d'un chemin brownien contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$ . Nous rappellerons la définition et les principales propriétés de ces mesures au §2 mais il convient de remarquer dès maintenant que ces mesures ont l'avantage d'exister! Toute lamination possède au moins une mesure harmonique non triviale. Le résultat que nous montrons, plus précis que le théorème A, est le suivant:

**THÉORÈME A'.** *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination orientable de dimension 2 sur un espace compact. Alors, la réunion des feuilles qui sont compactes ou difféomorphes à l'une des six surfaces décrites plus haut est un borélien de mesure totale pour toute mesure harmonique (par rapport à  $\mathcal{F}$  et à n'importe quelle métrique le long des feuilles).*

Le fait qu'il soit possible de décrire un nombre fini de surfaces qui apparaissent génériquement comme feuilles non compactes est bien entendu relié à

la classification des surfaces. Rappelons que les surfaces, éventuellement non compactes, mais orientables pour simplifier, sont classées à difféomorphisme près par les invariants suivants [12]:

- i) le genre, qui est un entier ou  $+\infty$ ,
- ii) l'espace des bouts  $\mathcal{E}$  qui est un compact métrisable totalement discontinu quelconque (voir §3, ou [6], [13]),
- iii) l'ouvert  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$  formé des *bouts planaires*, c'est-à-dire des bouts "ne portant pas d'anse". Si le genre est infini, on demande bien sûr que  $\mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}$  et, s'il est fini, on demande que  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ .

Les six surfaces que nous avons mentionnées sont caractérisées par le fait que  $\mathcal{E}$  est un ensemble à 1 ou 2 éléments ou est homéomorphe à un ensemble de Cantor, et que  $\mathcal{E}_0$  est soit vide soit égal à  $\mathcal{E}$ .

Evidemment, en dimension supérieure, une telle classification des variétés non compactes n'est pas concevable et une liste finie de feuilles génériques n'est plus possible. Pour illustrer ce fait, nous construisons au §1 un exemple d'une lamination de dimension 4 d'un espace compact dont toutes les feuilles sont denses et telle que deux feuilles distinctes quelconques sont non difféomorphes. Nous obtenons cependant le résultat suivant:

**THÉORÈME B.** *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination d'un espace compact  $M$  et  $\mu$  une mesure harmonique (par rapport à une métrique quelconque le long des feuilles). Alors, la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $\mu$ -presque tout point de  $M$  a 0, 1, 2 ou un ensemble de Cantor de bouts.*

Le lecteur aura noté l'analogie entre le théorème précédent et le théorème de H. Hopf suivant lequel un revêtement galoisien d'un polyèdre fini ne peut posséder que 0, 1, 2 ou un ensemble de Cantor de bouts. D'une certaine façon, la feuille générique d'une lamination d'un espace compact possède une certaine "quasi-périodicité topologique" qui l'apparente à un revêtement galoisien d'un polyèdre fini (sur lequel le groupe de Galois opère de manière cocompacte). D'ailleurs, on se convainc facilement que les six surfaces précédentes sont précisément celles qui sont des revêtements galoisiens de surfaces compactes orientables.

Cette analogie suggère immédiatement le problème de savoir si les théorèmes de structure bien connus concernant les bouts des groupes de type fini ont un analogue dans le contexte des laminations. Nous allons voir que c'est effectivement le cas. Pour la théorie des bouts d'espaces ou de groupes, nous renvoyons à [6] et [12] mais nous ferons quelques rappels au §3.

Les groupes de type fini ayant deux bouts sont précisément les extensions finies de  $\mathbf{Z}$ . De manière équivalente, un groupe de type fini  $\Gamma$  a deux bouts

si et seulement s'il existe une surjection à noyau fini de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{Z}$  ou sur le groupe diédral infini  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Les exemples les plus simples de laminations dont presque toutes les feuilles ont deux bouts sont évidemment donnés par les laminations de dimension 1 puisque presque toutes leurs feuilles sont difféomorphes à  $\mathbf{R}$  (si l'on suppose que la mesure de la réunion des feuilles compactes est nulle). Nous allons montrer que "les laminations à deux bouts sont les extensions compactes des laminations de dimension 1". Pour pouvoir préciser le sens de cette assertion, il faut étendre la définition des laminations de dimension 1, en sortant de la catégorie topologique.

Soit  $(X, \mathcal{A}, m)$  un espace borélien standard. Ici,  $X$  est un ensemble,  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre de parties de  $X$  et  $m$  est une mesure finie et positive sur  $(X, \mathcal{A})$ . On suppose que  $(X, \mathcal{A})$  est isomorphe à la  $\sigma$ -algèbre des boréliens d'un espace métrique séparable. Soit  $(t, x) \in \mathbf{R} \times X \mapsto \phi^t(x) \in X$  un flot mesurable préservant  $m$  et apériodique (i.e. le stabilisateur de  $m$ -presque tout point est trivial). La relation d'équivalence sur  $X$  correspondant aux orbites de  $\phi^t$  sera appelée *feuilletage mesuré et orienté de dimension 1*. Pour définir la notion de feuilletage mesuré non orienté, on passe tout naturellement au "revêtement des orientations". Soit  $\phi^t$  un flot comme précédemment et  $\tau: X \rightarrow X$  une involution mesurable sans point fixe, préservant  $m$  et qui conjugue  $\phi^t$  et  $\phi^{-t}$ . Alors, l'espace  $X' = X/\tau$  peut être naturellement muni d'une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}'$  et d'une mesure  $m'$ . De plus, les orbites de  $\phi^t$  dans  $X$  permettent de définir une relation d'équivalence  $\mathcal{G}$  dans  $X'$ . Les classes d'équivalence de  $\mathcal{G}$  sont naturellement équipées d'une métrique isométrique à  $\mathbf{R}$  mais ne sont pas naturellement orientées. Nous dirons de  $\mathcal{G}$  que c'est un *feuilletage mesuré de dimension 1* sur  $(X', \mathcal{A}', m')$ .

**THÉORÈME C.** *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination sur un espace compact  $M$  et  $\mu$  une mesure harmonique. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) *la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $\mu$ -presque tout point de  $M$  a deux bouts,*
- ii) *il existe un feuilletage mesuré  $\mathcal{G}$  de dimension 1 sur un espace borélien standard  $(X, \mathcal{A}, m)$  et une application borélienne  $\pi: M \rightarrow X$  telle que  $\pi_*\mu = m$  et telle que la restriction de  $\pi$  à  $\mu$ -presque toute feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  est une application continue et propre sur une feuille  $\ell$  de  $\mathcal{G}$ , envoyant les deux bouts de  $L$  sur les deux bouts de  $\ell$ .*

Enfin, nous établissons un résultat analogue au théorème de structure de Stallings concernant les groupes ayant une infinité de bouts. Rappelons que ces groupes sont des produits amalgamés ou des HNN-extensions au dessus de groupes finis (la réciproque étant également vraie, à quelques exceptions près, telles que  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ). Pour pouvoir énoncer notre théorème, nous commençons par définir l'analogue des produits libres et des HNN-extensions dans la catégorie des pseudogroupes mesurables.

Soit  $(T, \mathcal{A}, \nu)$  un espace borélien standard et  $(\gamma_i)_{i=1, \dots, r}$  des bijections bi-mesurables de boréliens  $A_i$  sur leur image  $\gamma_i(A_i)$ . On suppose que  $\nu(A_i) > 0$  et que les  $\gamma_i$  préservent les ensembles de  $\nu$ -mesure nulle. Dans ces conditions, les  $\gamma_i$  engendrent un *pseudogroupe mesurable*  $\mathcal{P}$  agissant sur  $T$ . Les orbites de  $\mathcal{P}$  sont naturellement des espaces métriques; la distance entre deux points  $x, x'$  de la même orbite est la borne inférieure des entiers  $k$  tels qu'il existe une suite d'entiers  $i_1, \dots, i_k$  de  $\{1, \dots, r\}$  avec  $x' = \gamma_{i_1}^{\pm 1} \circ \gamma_{i_2}^{\pm 1} \circ \dots \circ \gamma_{i_k}^{\pm 1}(x)$ .

Un exemple simple et classique d'une telle situation est fourni par le *pseudogroupe d'holonomie* d'une lamination  $\mathcal{F}$  sur un compact  $M$ . Pour cela, on considère un "bon recouvrement" de  $M$  par des ouverts feuilletés trivialement (voir [8] et le §3). Dans ce cas,  $T$  est la réunion disjointe des espaces des feuilles de la restriction de  $\mathcal{F}$  à ces ouverts et les  $\gamma_i$  sont les applications d'holonomie élémentaires correspondant aux intersections deux à deux de ces ouverts. Si  $\mu$  est une mesure harmonique sur  $M$  (toujours par rapport à une certaine métrique le long des feuilles), il est en général impossible de construire une mesure naturelle sur  $T$  (sauf lorsque  $\mu$  provient d'une mesure transverse invariante). Cependant,  $\mu$  permet de définir une *classe de mesure* naturelle sur  $T$ , invariante par holonomie. En d'autres termes, la donnée de  $\mu$  permet de construire une mesure  $\nu$  sur  $T$  (définie à équivalence près) telle que les ensembles de  $\nu$ -mesure nulle soient invariants par les  $\gamma_i$  (voir [7] et le §2 pour des détails).

Bien sûr, ce pseudogroupe d'holonomie dépend fortement du choix du recouvrement. Pour tenir compte de cette dépendance, une notion déjà classique est introduite: celle de *l'équivalence de Kakutani*. La définition technique sera rappelée plus loin; elle s'applique à deux pseudogroupes mesurables munis de systèmes finis de générateurs et de mesures quasi-invariantes. Cette définition est dictée par le fait que les pseudogroupes associés à deux bons recouvrements sont équivalents au sens de Kakutani.

Soit  $\mathcal{P}$  un pseudogroupe mesurable engendré par  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  et agissant sur  $(T, \mathcal{A}, \nu)$  et  $\varphi: A \rightarrow \varphi(A)$  un isomorphisme mesurable défini sur le borélien  $A$  avec  $\nu(A) \neq 0$ , tel que  $A$  et  $\varphi(A)$  sont disjoints et qui préserve les ensembles de  $\nu$ -mesure nulle. On supposera que  $\varphi$  ne "présERVE pas du tout les orbites de  $\mathcal{P}$ " dans un sens qui sera précisé au §4. On supposera aussi que, pour  $\nu$ -presque tout  $x$  de  $T$ , l'orbite  $\mathcal{P}(x)$  rencontre  $A \cup \varphi(A)$  en au moins deux points. Dans ces conditions, nous dirons que le pseudogroupe  $\mathcal{P}'$  engendré par  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  et  $\varphi$  est une *HNN-extension non triviale*.

Rappelons enfin qu'une lamination est *ergodique* pour une mesure harmonique  $\mu$  si tout borélien saturé (i.e. réunion de feuilles) est de  $\mu$ -mesure triviale ou totale. L'étude d'une lamination non ergodique se ramène à celle de ses composantes ergodiques [7].

THÉORÈME D. *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination sur un espace compact et  $\mu$  une mesure harmonique ergodique. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) *la feuille passant par  $\mu$ -presque tout point a au moins deux bouts,*
- ii) *le pseudogroupe transverse mesurable associé à  $\mu$  est équivalent au sens de Kakutani à une HNN-extension non triviale.*

Remarquons que l'analogue du produit amalgamé rentre dans la définition de HNN-extension. Ce qu'on pourrait être amené à définir comme étant le produit amalgamé de deux pseudogroupes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  agissant sur  $(T_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$  et  $(T_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ , au dessus d'un isomorphisme  $\varphi$  entre  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  peut aussi être considéré comme une HNN-extension par  $\varphi$  du pseudogroupe naturel sur la réunion disjointe de  $T_1$  et  $T_2$ .

Pour terminer cette introduction, nous mentionnons un problème naturellement soulevé par ces résultats. Les six surfaces qui apparaissent génériquement dans les laminations de dimension 2 peuvent apparaître de bien des manières. Le plan, par exemple, peut être un plan euclidien, un plan hyperbolique... En rappelant qu'une feuille d'une lamination compacte est munie d'un type de quasi-isométrie bien défini, on peut se demander s'il est possible de décrire les types de quasi-isométries génériques. Dans [5], on trouvera quelques informations sur les types de quasi-isométries des feuilles apparaissant dans une lamination dont toutes les feuilles sont denses.

Nous avons regroupé au §1 quelques exemples significatifs qui illustrent nos résultats. Bien que ce paragraphe soit logiquement indépendant des suivants, il nous semble qu'il sera utile à la compréhension de l'ensemble. Dans le §2, après quelques rappels sur les mesures harmoniques, nous établissons une "proposition fondamentale" qui explicite l'idée de "quasi-périodicité topologique" d'une feuille générique. C'est cette proposition fondamentale qui est à la base de la démonstration de nos résultats, effectuée aux §§3 et 4. Enfin, nous avons relégué au §5 la démonstration de la mesurabilité de certains ensembles rencontrés dans les preuves. Un lecteur persuadé que "tout ensemble bien défini sans l'axiome du choix est mesurable" pourra se passer de ce paragraphe. . .

Je voudrais remercier Dennis Sullivan. Sa remarque selon laquelle "there is no measurable way to pick a point in a leaf" est à l'origine de ce travail. Le lecteur pressé (ou non francophone) pourrait d'ailleurs limiter sa lecture à cette phrase.

Cet article a été rédigé lors d'un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro que j'aimerais remercier pour son hospitalité.

## 1. Quelques exemples

Nous commençons par montrer que les six surfaces décrites dans l'introduction peuvent effectivement apparaître comme feuille générique.

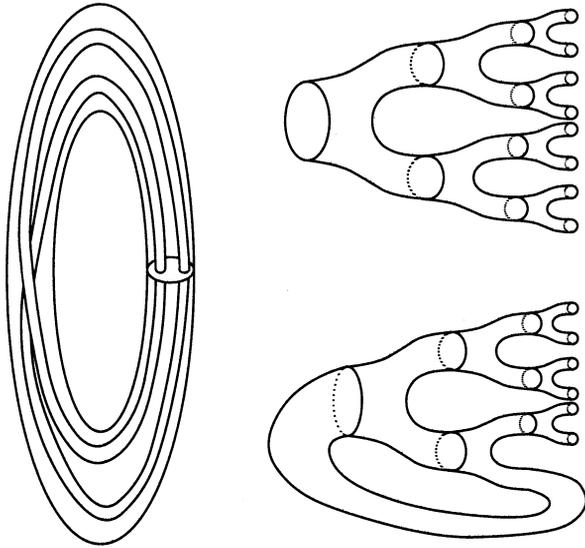


FIGURE 2.

Les cas du *plan* et du *cylindre* ne posent aucune difficulté. Un feuilletage linéaire de dimension 2 sur un tore de dimension 3 peut avoir *toutes* ses feuilles difféomorphes à un plan ou *toutes* ses feuilles difféomorphes à un cylindre.

Le cas de l'*arbre de Cantor* se rencontre par exemple dans un feuilletage construit par M. Hirsch. Dans un tore solide  $D^2 \times S^1$ , on retire l'intérieur d'un tore solide, voisinage d'une tresse (voir figure 2). On obtient ainsi une variété de dimension 3, à bord, dont le bord est constitué de deux tores  $T^2$ . Cette variété est naturellement feuilletée par "pantalons" (sphère moins trois disques) transverses au bord. En recollant les deux composantes connexes du bord par un difféomorphisme convenable, on obtient une variété fermée de dimension 3 munie d'un feuilletage de codimension 1. Les feuilles de ce feuilletage sont toutes des "arbres de Cantor" sauf celles qui correspondent aux "points périodiques" du recollement. Il est naturellement possible de supposer que le nombre de feuilles du second type est dénombrable de sorte que la feuille générique est effectivement un arbre de Cantor. Nous ne connaissons pas d'exemple de feuilletage d'une variété fermée de dimension 3 dont *toutes* les feuilles sont de tels arbres de Cantor.

Soit  $S$  la surface compacte orientable de genre 2 dont le bord a une composante connexe. Munissons  $S \times S^1$  du feuilletage produit dont les feuilles sont  $S \times \{*\}$ . Si  $(M, \mathcal{F})$  est une variété feuilletée de dimension 3 et si  $c$  est une courbe fermée simple transversale à  $\mathcal{F}$ , on peut ôter à  $M$  un voisinage tubulaire de  $c$  de façon à obtenir une variété à bord  $\overline{M}$  munie d'un feuilletage transverse au bord et y induisant un feuilletage trivial. Si l'on recolle  $\overline{M}$  et

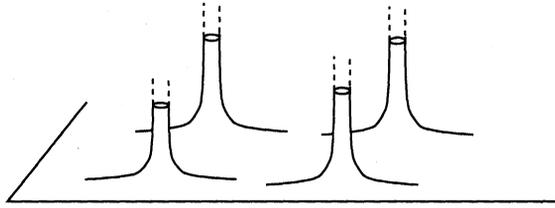


FIGURE 3.

$S \times S^1$  le long de leur bord, on obtient ainsi un feuilletage  $\mathcal{F}'$  sur une variété fermée  $M'$ . Les feuilles de  $\mathcal{F}'$  ont "acquis du genre" par rapport à celles de  $\mathcal{F}$ .

En appliquant cette construction aux feuilletages que nous venons de décrire, on obtient des *exemples dont toutes les feuilles sont respectivement des monstres du Loch-Ness, des échelles de Jacob et des arbres de Cantor fleuris*. En ce qui concerne le dernier cas, le lecteur vérifiera en effet que l'adjonction d'anses identifie les feuilles génériques et spéciales du feuilletage de Hirsch.

Comme nous l'avons déjà signalé, ces surfaces génériques peuvent apparaître de bien des manières géométriquement différentes. Par exemple, le feuilletage stable du flot géodésique d'une surface fermée à courbure  $-1$  a presque toutes ses feuilles planaires, isométriques au disque de Poincaré. On trouvera de nombreux exemples de types d'isométrie possibles dans les travaux de J. Cantwell et L. Conlon ([2], [3] par exemple).

Nous construisons maintenant un exemple illustrant la signification de la généricité utilisée dans cet article. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage linéaire par plans sur le tore  $T^3$  et  $c_1, c_2$  deux courbes fermées simples disjointes et transverses à  $\mathcal{F}$ . Soit  $\mathcal{F}'$  le feuilletage sur  $T^3$  obtenu par tourbillonnement autour de  $c_1$  et  $c_2$  i.e. en introduisant des composantes de Reeb aux voisinages de  $c_1$  et  $c_2$ . Les feuilles de  $\mathcal{F}'$  extérieures à ces composantes ont une géométrie suggérée par la figure 3. Si l'on ôte à  $T^3$  l'intérieur des deux composantes de Reeb de  $\mathcal{F}'$  et si l'on identifie les deux composantes toriques du bord qui en résultent, on obtient un feuilletage  $\mathcal{F}''$  sur une variété fermée  $M$  qui possède exactement une feuille compacte. Les autres feuilles sont toutes difféomorphes à un plan privé d'un ensemble discret dénombrable. Notons que  $\mathcal{F}''$  est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue de  $M$  puisque le feuilletage original  $\mathcal{F}$  sur  $T^3$  l'est. Par conséquent, un feuilletage peut être ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue sans que la plupart de ses feuilles ne soient difféomorphes à l'une des six surfaces du théorème A. Cet exemple montre qu'il est sans espoir de vouloir généraliser le théorème B aux bouts des orbites d'un pseudogroupe mesurable pour une mesure quasi-invariante ergodique. Bien sûr, il résulte du théorème B que, dans cet exemple, l'unique mesure harmonique de  $\mathcal{F}''$  se concentre sur la feuille compacte.

Voici une petite variation sur l'exemple précédent. Soit  $c_3$  une courbe fermée simple plongée dans  $M$  et transversale à  $\mathcal{F}''$ . Otons à  $M$  un voisinage tubulaire de  $c_3$  et soit  $\mathcal{F}'''$  le feuilletage obtenu en prenant le double

de la variété feuilletée à bord qui en résulte. Il est facile de décrire l'espace des bouts  $\mathcal{E}$  des feuilles non compactes de  $\mathcal{F}''$ . Tout point de  $\mathcal{E}$  est limite de points isolés et l'ensemble des points d'accumulation de  $\mathcal{E}$  est un ensemble de Cantor; en particulier  $\mathcal{E}$  n'est pas un ensemble de Cantor. *L'espace des bouts de l'orbite générique d'une HNN-extension non triviale peut donc être infini sans être un ensemble de Cantor.* Ici encore, ce phénomène est dû au fait que nous considérons une mesure quasi-invariante qui ne provient pas d'une mesure harmonique.

Nous construisons maintenant un exemple où *presque toutes les feuilles ont deux bouts mais dont certaines en ont un nombre dénombrable ou fini supérieur à 2.* Soit  $f_0$  un feuilletage de dimension 1 sur  $S^3 \times [-1, +1]$  (de coordonnées  $(x, t)$ ) ayant les propriétés suivantes (voir figure 4):

- i)  $f_0$  est défini par un champ de vecteurs respectant le volume de  $S^3 \times [-1, +1]$ , égal à  $\frac{\partial}{\partial t}$  aux voisinages des bords,
- ii) si  $x$  est un point de  $S^3$  situé hors d'un grand cercle  $C$  de  $S^3$ , la feuille de  $f_0$  passant par  $(x, 1)$  est un intervalle compact dont l'autre extrémité est  $(x, -1)$ ,
- iii) les feuilles passant par  $(x, 1)$  ou  $(x, -1)$  avec  $x$  dans  $C$  s'accroissent toutes sur la même feuille fermée de  $f_0$ , située à l'intérieur de  $S^3 \times [-1, +1]$ .

Soit  $\mathcal{F}_0$  le feuilletage de dimension 2 sur  $S^3 \times [-1, +1] \times S^1$  dont les feuilles sont le produit par  $S^1$  de celles de  $f_0$ .

Soit  $S$  une surface compacte orientable dont le bord est constitué de quatre composantes, notées  $c_+$ ,  $c_-$ ,  $c_{+1}$  et  $c_{-1}$  et soit  $\mathcal{F}_1$  le feuilletage sur  $S \times S^3$  dont les feuilles sont  $S \times \{*\}$ . On construit alors une variété fermée de dimension 5 munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de dimension 2 en considérant la réunion disjointe de  $S \times S^3$  et  $S^3 \times [-1, +1] \times S^1$  et en identifiant:

- i)  $c_{\pm 1} \times S^3$  et  $S^3 \times \{\pm 1\} \times S^1$ , en envoyant la trace de  $\mathcal{F}_1$  sur celle de  $\mathcal{F}_0$  et en induisant l'identité sur le facteur  $S^3$ ,
- ii)  $c_+ \times S^3$  et  $c_- \times S^3$ , en respectant les traces de  $\mathcal{F}_1$  et en induisant sur  $S^3$  un difféomorphisme  $\varphi$  qui respecte le volume.

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  possède un volume transverse invariant. Nous verrons plus loin qu'une mesure transverse invariante donne lieu à une mesure harmonique de sorte que la topologie de presque toute feuille au sens de Lebesgue est décrite par le théorème A'. De fait, on peut décrire les feuilles de la façon suivante. Si  $x$  est un point sur  $c_+$  la transversale  $\{x\} \times S^3$  coupe presque toute feuille de  $\mathcal{F}$  sur une orbite de  $\varphi$ . Si cette orbite est infinie et ne rencontre pas le grand cercle  $C$  la feuille correspondante est une échelle de Jacob; c'est le cas pour presque toute orbite. Une orbite infinie qui rencontre  $C$  en  $k$

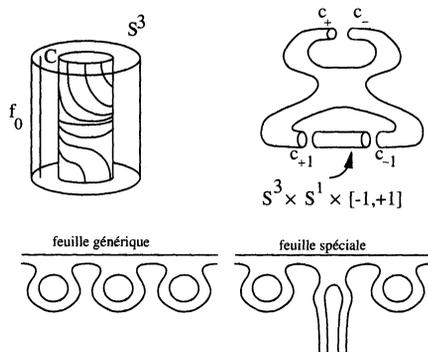


FIGURE 4.

points ( $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ ) a  $2 + 2k$  bouts: chaque intersection de l'orbite avec  $C$  "ouvrant l'une des barres de l'échelle". En choisissant convenablement  $\varphi$ , on peut obtenir diverses situations.

Nous abordons maintenant la construction d'un exemple illustrant le fait qu'il n'y a pas de "classification borélienne" possible des variétés non compactes.

**THÉORÈME.** *Il existe un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur une variété compacte  $M$  possédant un ensemble minimal  $M$  non réduit à une feuille compacte et tel que deux feuilles différentes quelconques dans  $M$  sont non homéomorphes.*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème.

Commençons par une construction simplifiée qui éclairera l'idée générale. Soient  $D_0$  et  $D_1$  deux calottes sphériques disjointes, fermées, voisinages des pôles nord et sud de la sphère  $S^2$ . Soit  $\phi: S^2 \rightarrow S^2$  un difféomorphisme ayant la propriété suivante. Si  $(\varepsilon_i)$  est une suite de 0 et de 1, indexée par  $i \in \mathbf{Z}$ , l'intersection infinie des  $\phi^i(D_{\varepsilon_i})$  se réduit à un point. Un exemple classique d'un tel difféomorphisme est le célèbre "fer à cheval" de S. Smale. En d'autres termes, la sphère contient le fermé invariant  $\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} \phi^i(D_0 \cup D_1)$  qui est un ensemble de Cantor et la dynamique de la restriction de  $\phi$  à  $\Lambda$  est celle du décalage sur  $\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$ . Il est bien connu que ce décalage contient de nombreux ensembles minimaux non triviaux, i.e. non réduits à une orbite finie.

Considérons alors la variété  $S^2 \times [0, 1]$  comme feuilletée par les intervalles  $\{*\} \times [0, 1]$  et colorions  $\{x\} \times [0, 1]$  en blanc si  $x \in D_0$  et en noir si  $x \in D_1$ . Lorsque l'on identifie les deux bords  $S^2 \times \{0\}$  et  $S^2 \times \{1\}$  à l'aide de  $\phi$ , on obtient un feuilletage de dimension 1 sur une variété de dimension 3. Les feuilles correspondant à des points non périodiques de  $\phi$  sont bien sûr des droites et celles qui correspondent à des points de  $\Lambda$  sont des "chapelets" constitués d'intervalles noirs et blancs suivant les disques  $D_0$  et  $D_1$  successivement rencontrés par l'orbite de  $\phi$ . Il est clair que les feuilles, considérées comme "droites

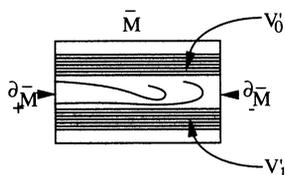


FIGURE 5.

colorées” (orientées) sont différentes pour deux points de  $\Lambda$  situés sur deux orbites différentes de  $\phi$ .

Pour construire un feuilletage qui démontre le théorème, nous allons utiliser l’idée précédente en “coloriant topologiquement” les variétés.

Soient  $V_0$  et  $V_1$  deux variétés fermées orientables de dimension 4 dont les groupes fondamentaux sont respectivement isomorphes à  $\mathbf{Z}^3$  et  $\mathbf{Z}^4$ . Choisissons dans  $V_0$  (resp.  $V_1$ ) deux lacets plongés disjoints  $c_0^+, c_0^-$  (resp.  $c_1^+, c_1^-$ ) représentant les éléments  $(1,0,0)$  et  $(0,2,0)$  (resp.  $(1,0,0,0)$  et  $(0,2,0,0)$ ) du groupe fondamental. Soit  $V'_0$  (resp.  $V'_1$ ) la variété à bord obtenue en ôtant à  $V_0$  (resp.  $V_1$ ) des voisinages tubulaires disjoints de  $c_0^+$  et  $c_0^-$  (resp.  $c_1^+$  et  $c_1^-$ ). Le bord de  $V'_0$  (resp.  $V'_1$ ) est la réunion de deux composantes  $\partial_+ V'_0$  et  $\partial_- V'_0$  (resp.  $\partial_+ V'_1$  et  $\partial_- V'_1$ ) correspondant à  $c_0^+$  et  $c_0^-$  (resp.  $c_1^+$  et  $c_1^-$ ), chacune difféomorphe à  $S^2 \times S^1$ .

Soit  $\bar{M}$  une variété compacte de dimension 6 dont le bord est constitué de deux composantes  $\partial_+ \bar{M}$  et  $\partial_- \bar{M}$ , toutes deux difféomorphes à  $S^2 \times (S^1 \times S^2)$ . On suppose  $\bar{M}$  munie d’un feuilletage de codimension 2, transverse aux bords, tel que :

- i) la trace du feuilletage sur  $\partial_\pm \bar{M} \simeq S^2 \times (S^1 \times S^2)$  est le feuilletage dont les feuilles sont  $\{*\} \times S^1 \times S^2$ ,
- ii) si  $x$  est un point de  $D_j \subset S^2$  ( $j = 0, 1$ ), la feuille contenant  $\{x\} \times S^1 \times S^2 \subset \partial_+ \bar{M}$  est compacte, difféomorphe à  $V'_j$  et coupe les deux composantes  $\partial_+ \bar{M}$  et  $\partial_- \bar{M}$  sur  $\{x\} \times S^1 \times S^2 \simeq \partial_+ V'_j \subset \partial_+ \bar{M}$  et  $\{x\} \times S^1 \times S^2 \simeq \partial_- V'_j \subset \partial_- \bar{M}$ .

La construction explicite d’un exemple d’une telle variété feuilletée n’est pas difficile. On peut aussi utiliser le théorème de réalisation de W. Thurston [17]. Nous ne donnons pas de détails pour ne pas obscurcir la construction d’autant que nous sommes essentiellement intéressés par la construction d’une lamination  $\mathcal{M}$  et beaucoup moins par celle d’un feuilletage sur une variété dont  $\mathcal{M}$  est un ensemble minimal.

Enfin, identifions les deux bords  $\partial_+ \bar{M}$  et  $\partial_- \bar{M} \simeq S^2 \times (S^1 \times S^2)$  par le difféomorphisme  $\phi \times \text{id}$ . On obtient ainsi une variété fermée  $M$  de dimension

6, équipée d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 2. Nous allons montrer que  $\mathcal{F}$  vérifie les conditions du théorème.

Tout d'abord, au fermé  $\Lambda$  de  $S^2$ , invariant par  $\phi$ , correspond un fermé de  $M$  saturé par  $\mathcal{F}$ . De même, à un ensemble minimal pour  $\phi$  contenu dans  $\mathcal{F}$  correspond un ensemble minimal pour  $\mathcal{F}$ . Soit  $x$  un point de  $\Lambda$ , associé la suite  $(\varepsilon_i)$  de 0 et de 1. La feuille correspondante  $L_{(\varepsilon_i)}$  est obtenue en considérant une suite de variétés à bord  $L_i$  définie par:

$$\begin{aligned} L_i &= V'_0 \quad \text{si } \varepsilon_i = 0, \\ &= V'_1 \quad \text{si } \varepsilon_i = 1, \end{aligned}$$

et en collant  $\partial_+ L_i \simeq S^2 \times S^1$  avec  $\partial_- L_{i+1} \simeq S^2 \times S^1$ . Nous affirmons que  $L_{(\varepsilon_i)}$  et  $L_{(\varepsilon'_i)}$  ne sont homéomorphes que si les suites  $(\varepsilon_i)$  et  $L_{(\varepsilon'_i)}$  sont décalées l'une de l'autre. Pour distinguer ces variétés, nous distinguerons leurs groupes fondamentaux. Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental de  $L_{(\varepsilon_i)}$ . C'est une somme de groupes  $\Gamma_i (i \in \mathbf{Z})$  avec:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \mathbf{Z}^3 \quad \text{engendré par } a_i, b_i, c_i \text{ si } \varepsilon_i = 0, \\ \Gamma_i &= \mathbf{Z}^4 \quad \text{engendré par } a_i, b_i, c_i, d_i \text{ si } \varepsilon_i = 1, \end{aligned}$$

amalgamée par les relations  $a_{i+1} = b_i^2$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ . Selon la théorie générale des sommes amalgamées, on peut construire une action de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial  $\text{Ar}$  ayant la propriété suivante [13], [14]. Un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\text{Ar}$  est un graphe dont les sommets sont les entiers  $i \in \mathbf{Z}$  et les arêtes les paires  $(i, i+1)$ . Le stabilisateur du sommet  $i$  est  $\Gamma_i$  et celui de l'arête  $(i, i+1)$  est le groupe  $\mathbf{Z}$  dont le générateur 1 est  $a_{i+1} = b_i^2 \in \Gamma_{i+1} \cap \Gamma_i$ .

Un sommet  $s$  de  $\text{Ar}$  dans l'orbite par  $\Gamma$  du sommet  $i$  du domaine fondamental sera dit de type  $i$ ; son stabilisateur  $\text{Stab}(s) \subset \Gamma$  est alors un conjugué de  $\Gamma_i$ . Une arête de  $\text{Ar}$  dans l'orbite par  $\Gamma$  de  $(i, i+1)$  sera dite de type  $(i, i+1)$ ; son stabilisateur est un groupe infini cyclique dont un générateur est divisible par 2 dans le stabilisateur de l'extrémité de type  $i$  et indivisible dans le stabilisateur de l'extrémité de type  $i+1$ .

Etudions les stabilisateurs de chemins de  $\text{Ar}$ , i.e. les intersections de stabilisateurs de sommets. Les arêtes qui émanent d'un sommet de type  $i$  sont de type  $(i, i+1)$  ou  $(i-1, i)$ . Celles qui sont de type  $(i, i+1)$  ont toutes le même stabilisateur (car  $\Gamma_i$  est abélien), de même que toutes les arêtes de type  $(i-1, i)$ . Ces deux stabilisateurs s'intersectent trivialement. Il en résulte que si  $s_1$  et  $s_2$  sont deux sommets de  $\text{Ar}$  de types différents, le stabilisateur du chemin qui les joint est trivial sauf si les types de  $s_1$  et  $s_2$  sont deux entiers consécutifs  $i, i+1$  et si les arêtes qui constituent le chemin sont alternativement du type  $(i, i+1)$  et  $(i+1, i)$ . Nous utiliserons la conséquence suivante. Si  $s_1$  et  $s_2$  sont deux sommets de types différents et si les stabilisateurs  $\text{Stab}(s_1)$  et  $\text{Stab}(s_2)$  s'intersectent non trivialement, alors les types de  $s_1$  et  $s_2$  diffèrent de 1. De plus, le générateur de  $\text{Stab}(s_1) \cap \text{Stab}(s_2)$  est indivisible dans celui des

stabilisateurs qui correspond au sommet de plus grand indice et divisible par 2 dans l'autre.

Nous caractérisons maintenant les conjugués des  $\Gamma_i$  parmi les sous-groupes de  $\Gamma$ . Nous affirmons qu'un sous-groupe  $\mathcal{G}$  de  $\Gamma$  isomorphe à  $\mathbf{Z}^3$  ou  $\mathbf{Z}^4$  est un sous-groupe d'un conjugué de  $\Gamma_i$ , autrement dit fixe un sommet de Ar. Il suffit pour cela de montrer que chaque élément de  $\mathcal{G}$  fixe un sommet [14]. Si un élément  $g$  de  $\mathcal{G}$  agissait sans point fixe, il préserverait une unique géodésique (ou "droit chemin" dans la terminologie de [13])  $\ell$  de Ar. Le groupe  $\mathcal{G}$ , étant abélien, fixerait  $\ell$  et agirait sur  $\ell$  par translations entières. Ceci permettrait de construire un morphisme de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbf{Z}$  dont le noyau opérerait trivialement sur  $\ell$ . Puisque le stabilisateur d'une arête est cyclique, le rang du groupe abélien  $\mathcal{G}$  serait au plus 2, ce qui est en contradiction avec le fait que  $\mathcal{G}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}^3$  ou  $\mathbf{Z}^4$ . Nous avons donc montré que les conjugués des sous-groupes  $\Gamma_i$  avec  $\varepsilon_i = 1$  peuvent être considérés comme les sous-groupes de  $\Gamma$  isomorphes à  $\mathbf{Z}^4$  et maximaux pour cette propriété. De même, les conjugués des  $\Gamma_i$  avec  $\varepsilon_i = 0$  peuvent être considérés comme les sous-groupes de  $\Gamma$  isomorphes à  $\mathbf{Z}^3$ , non contenus dans un sous-groupe isomorphe à  $\mathbf{Z}^4$  et maximaux pour ces propriétés.

Considérons une autre suite  $\varepsilon'_i$  et supposons que le groupe  $\Gamma'$  correspondant à  $\varepsilon'_i$  soit isomorphe à  $\Gamma$ . Notons  $\Gamma'_i$  les sous-groupes de  $\Gamma'$  jouant le même rôle que les  $\Gamma_i$  par rapport à  $\Gamma'$ . Soit  $\theta: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un isomorphisme.

La caractérisation des  $\Gamma_i$  que nous venons de donner montre qu'il existe une bijection  $\sigma$  de  $\mathbf{Z}$  telle que  $\theta(\Gamma_i)$  soit conjugué de  $\Gamma'_{\sigma(i)}$  dans  $\Gamma'$ . Evidemment, on a l'égalité:  $\varepsilon_i = \varepsilon'_{\sigma(i)}$ .

D'autre part, nous savons que  $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}$  est non trivial de sorte qu'il en est de même pour  $\theta(\Gamma_i) \cap \theta(\Gamma_{i+1})$ . D'après les remarques précédentes sur les intersections de stabilisateurs de sommets, il résulte que  $\sigma(i)$  et  $\sigma(i+1)$  sont deux entiers consécutifs. De plus, l'argument relatif à l'indivisibilité d'un stabilisateur d'arête montre en fait que  $\sigma(i+1) = \sigma(i) + 1$ . Ainsi, il existe un entier  $N$  tel que  $\varepsilon_i = \varepsilon'_{i+N}$  et c'est ce qu'il fallait démontrer.

L'exemple que nous venons de construire est un feuilletage de codimension 2 sur une variété de dimension 6. Il est probablement possible de construire un exemple sur une variété de dimension 4, en codimension 1, en se fondant sur la même idée. Par contre, le théorème A montre qu'un tel exemple ne peut exister avec des feuilles de dimension 2.

Nous ignorons s'il existe un *feuilletage* d'une variété *compacte* tel que deux feuilles différentes quelconques sont non homéomorphes.

## 2. Les mesures harmoniques et la proposition fondamentale

Nous commençons par rappeler la définition et les principales propriétés des mesures harmoniques, introduites par L. Garnett.

On se fixe un espace métrisable compact séparable  $M$  muni d'une lamination  $\mathcal{F}$  de dimension  $d$ . Plus précisément, nous supposons  $M$  recouvert par un nombre fini d'ouverts  $U_i$  homéomorphes à un ouvert de  $\mathbf{R}^d \times T_i$  (où  $T_i$  est un certain espace localement compact), de sorte que les "changements de cartes" aient la forme suivante sur leur domaine de définition:

$$(x, y) \in \mathbf{R}^d \times T_i \mapsto (F_y(x), g(y)) \in \mathbf{R}^d \times T_j.$$

Ici,  $g$  est un homéomorphisme et  $F_y$  est un difféomorphisme que nous supposerons de classe  $C^3$ , dépendant continûment de  $y$  dans la topologie  $C^3$ . Nous fixerons par ailleurs une métrique riemannienne le long des feuilles de  $\mathcal{F}$  dont on supposera qu'elle est donnée, dans chaque carte  $U_i$  par une métrique de classe  $C^3$  sur (un ouvert de)  $\mathbf{R}^d$  dépendant continûment du paramètre  $y$  dans la topologie  $C^3$ . Ces hypothèses de régularité sont très faibles.

Des exemples de laminations sont fournis par la restriction d'un feuilletage à un fermé invariant mais beaucoup de laminations ne sont pas naturellement plongées dans une variété. On consultera [1], [16] pour des exemples intéressants.

On peut alors considérer le *laplacien feuilleté*  $\Delta^{\mathcal{F}}$ . Il s'agit d'un opérateur défini sur les fonctions continues sur  $M$ , de classe  $C^2$  le long des feuilles, obtenu en globalisant les laplaciens usuels des feuilles. Précisément, si  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  est de classe  $C^2$  le long des feuilles, on pose:

$$(\Delta^{\mathcal{F}} f)(x) = \Delta_{L_x} f|_{L_x}(x)$$

où  $L_x$  est la feuille qui passe par  $x$  et  $\Delta_{L_x}$  est le laplacien de la variété riemannienne  $L_x$ .

Ce laplacien feuilleté permet de définir un semi-groupe d'opérateurs de diffusion  $D_t^{\mathcal{F}}$  ( $t \geq 0$ ) opérant sur l'espace  $C^0(M)$  des fonctions continues sur  $M$ . Par définition, ces opérateurs vérifient l'équation de la chaleur feuilletée [7]:

$$D_0^{\mathcal{F}} = \text{id}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_t^{\mathcal{F}}(f) = \Delta^{\mathcal{F}}(D_t^{\mathcal{F}}(f)).$$

Ce semi-groupe préserve les fonctions positives et les fonctions constantes. Il induit donc, dualement, un semi-groupe d'opérateurs sur l'espace des mesures sur  $M$ . Une mesure positive  $\mu$  sur  $M$  est dite *harmonique* (par rapport à  $\mathcal{F}$  et à la métrique le long des feuilles) si elle est invariante par ce semi-groupe. Il est établi dans [7] qu'une mesure  $\mu$  est harmonique si et seulement si  $\int \Delta^{\mathcal{F}} f \cdot d\mu = 0$  pour toute fonction  $f$  continue sur  $M$  et de classe  $C^2$  dans les feuilles. Un simple théorème de point fixe montre le fait déjà signalé dans l'introduction: toute lamination d'un espace compact possède au moins une mesure harmonique non triviale.

Rappelons que si  $\mu$  est une mesure finie sur un espace localement compact  $E$  et si  $\pi: E \rightarrow T$  est une application continue, on peut désintégrer  $\mu$ , c'est-à-dire qu'il existe une mesure  $\nu$  sur  $T$  et, pour  $\nu$ -presque tout point  $y$  de  $T$ , une mesure  $\lambda_y$  sur  $\pi^{-1}(y)$ , telles que, pour tout borélien  $B$  de  $E$ :

$$\mu(B) = \int_T \lambda_y(B \cap \pi^{-1}(y)) d\nu(y).$$

Nous noterons  $\mu = \int \lambda_y.d\nu$ . Cette construction peut s'appliquer en particulier dans l'un des ouverts  $U_i$  de  $M$  dans lesquels la lamination est définie par les fibres d'une application  $\pi_i: U_i \rightarrow T_i$ .

**THÉORÈME [7].** *Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $M$ . Alors  $\mu$  est harmonique si et seulement si la condition suivante est réalisée dans chaque ouvert  $U_i$ . Soient  $\nu$  et  $\lambda_y$  les mesures désintégrant  $\mu$  dans  $U_i$ , i.e. telles que  $\mu|_{U_i} = \int \lambda_y.d\nu$ . Alors, pour  $\nu$ -presque tout  $y$ , la mesure  $\lambda_y$  est absolument continue par rapport à l'élément de volume des feuilles et possède une densité qui est une fonction harmonique positive.*

Plaçons nous dans le cas particulier où  $\mathcal{F}$  possède une mesure transverse invariante par holonomie. On peut alors combiner cette mesure avec le volume le long des feuilles pour obtenir une mesure globale  $\mu$  sur  $M$ . Le fait que la mesure transverse soit invariante par holonomie garantit que  $\mu$  est bien définie. Evidemment, si l'on désintègre  $\mu$  dans un ouvert  $U_i$ , les mesures  $\lambda_y$  seront des multiples constants du volume des feuilles. Le théorème précédent montre alors que  $\mu$  est harmonique. Ainsi, les mesures transverses invariantes par holonomie produisent des cas particuliers de mesures harmoniques, qui seront appelées *complètement invariantes*.

Considérons par exemple le cas où  $\mathcal{F}$  est un feuilletage orienté de dimension 1 sur une variété compacte  $M$ . Une métrique le long des feuilles donne un champ de vecteurs unitaires positifs  $\xi$ , engendrant un flot  $\phi^t$ . Soit  $\mu$  une mesure harmonique et  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue, de classe  $C^2$  le long des orbites. Puisque le laplacien feuilleté n'est autre que la dérivée seconde le long du champ  $\xi$ , la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \int f \circ \phi^t d\mu$$

a une dérivée seconde nulle, i.e. est affine. Comme cette fonction est évidemment bornée, elle est constante. En d'autres termes, les mesures harmoniques pour le feuilletage de dimension 1 sont les mesures invariantes par le flot unitaire. En particulier, *pour un feuilletage de dimension 1, toutes les mesures harmoniques sont complètement invariantes*. Nous généraliserons plus loin cette propriété aux laminations de dimension quelconque dont presque toutes les feuilles ont deux bouts.

On peut aussi introduire les mesures harmoniques à l'aide du *mouvement brownien*. Rappelons que si  $L$  est une variété riemannienne et si  $x$  est un point de  $L$ , on peut naturellement construire une mesure de probabilité  $\omega_x$ , dite *mesure de Wiener*, sur l'espace  $\Omega_x(L)$  des chemins issus de  $x$ , i.e. des applications continues  $c: [0, +\infty[ \rightarrow L$  telles que  $c(0) = x$  (voir, par exemple, [11]). Soit  $\Omega^{\mathcal{F}}$  l'espace des applications continues  $c: [0, +\infty[ \rightarrow M$  dont l'image est contenue dans une feuille de  $\mathcal{F}$ . L'application "origine" envoie  $\Omega^{\mathcal{F}}$  sur  $M$  et ses fibres sont précisément les espaces  $\Omega_x(L_x)$  (où  $L_x$  est la feuille passant par  $x$ ), munis des probabilités  $\omega_x$ . Si  $\mu$  est une mesure positive sur  $M$ , on peut "intégrer les  $\omega_x$  contre  $\mu$ " pour obtenir une mesure  $\bar{\mu}$  de même masse totale sur  $\Omega^{\mathcal{F}}$ .

On observe par ailleurs que  $\Omega^{\mathcal{F}}$  est muni d'un semi-groupe  $S_\tau$  ( $\tau \geq 0$ ) d'endomorphismes. Si  $c: [0, +\infty[ \rightarrow M$  est un élément de  $\Omega^{\mathcal{F}}$  et  $\tau \geq 0$ , on pose:

$$S_\tau(c)(t) = c(t + \tau).$$

THÉORÈME [7]. *Une mesure  $\mu$  est harmonique si et seulement si  $\bar{\mu}$  est invariante par le semi-groupe  $S_\tau$  ( $\tau \geq 0$ ) agissant sur  $\Omega^{\mathcal{F}}$ .*

Après ces rappels, nous pouvons énoncer et démontrer la proposition que nous avons en vue et qui sera à la base des preuves des théorèmes A et B.

PROPOSITION FONDAMENTALE. *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination sur un espace compact  $M$ , munie d'une métrique le long des feuilles et soit  $\mu$  une mesure harmonique quelconque. Soit  $B \subset M$  un borélien. Alors, pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  de  $M$ , l'intersection  $L_x \cap B$  de  $B$  et de la feuille  $L_x$  passant par  $x$  est ou bien vide ou bien s'approche de tous les bouts de  $L_x$ . Plus précisément, dans le second cas, si  $V \subset L_x$  est un domaine non compact à frontière  $\partial V (= \bar{V} - \text{int}V)$  compacte, alors  $V$  rencontre  $B$ .*

Nous démontrerons d'abord deux lemmes. Si  $c$  est un chemin de  $\Omega^{\mathcal{F}}$ , nous notons:

$$R_B(c) = \inf\{k \in \mathbf{N} - \{0\} \mid c(k) \in B\}$$

le premier instant entier strictement positif où le chemin entre dans  $B$ . Bien sûr,  $R_B(c)$  peut être infini.

LEMME. *Pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  de  $B$ , la variable aléatoire*

$$R_B: (\Omega_x(L_x), \omega_x) \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$$

*est d'espérance mathématique finie.*

La démonstration est une application directe d'une version du lemme de récurrence de Poincaré. Soit en effet  $S$  une transformation mesurable d'un espace de probabilité  $(X, \mathcal{A}, m)$  préservant  $m$ . Soit  $A \in \mathcal{A}$  et  $R: A \rightarrow \mathbf{N} - \{0\}$

la fonction définie par:

$$R(x) = \inf\{k \in \mathbf{N} - \{0\} | S^k(x) \in A\}.$$

Alors:

$$\int_A R(x) \, dm < \infty.$$

La preuve, immédiate si  $S$  est inversible, est un peu plus délicate si  $S$  n'est pas inversible; voir [10, page 50].

Appliquons ce résultat à la transformation  $S_1$  de  $\Omega^{\mathcal{F}}$ , préservant  $\bar{\mu}$  et au borélien  $A$  constitué des chemins dont l'origine est dans  $B$ . On obtient:

$$\int_A R_B(c) \, d\bar{\mu} < \infty,$$

$$\int_B \left( \int_{\Omega_x(L_x)} R_B(c) \, d\omega_x \right) d\mu < \infty.$$

Le lemme résulte alors du théorème de Fubini.

Avant d'énoncer notre second lemme, considérons une variété riemannienne  $L$  à géométrie bornée, i.e. dont le rayon d'injectivité est borné inférieurement et dont les modules des courbures sectionnelles sont bornés. Evidemment, une feuille de  $\mathcal{F}$  est un exemple d'une telle variété. Soit  $K \subset L$  un compact,  $x$  un point de  $L$  situé hors de  $K$  et  $c$  un chemin de  $\Omega_x(L)$ . On pose:

$$r_K(c) = \inf\{t \in [0, +\infty[ | c(t) \in K\} \in \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

LEMME. *La variable aléatoire*

$$r_K: (\Omega_x(L), \omega_x) \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$$

*est d'espérance mathématique infinie pour tout point  $x$  situé dans une composante connexe non bornée de  $L - K$ .*

Pour démontrer ce lemme, considérons la fonction:

$$x \in L - K \mapsto f(x) = \int_{\Omega_x(L)} r_K(c) \, d\omega_x \in \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Soit  $E$  une petite boule extérieure à  $K$  et soit  $\Sigma$  son bord. On considère la fonction  $r_\Sigma$ , temps de premier passage sur  $\Sigma$ . On a évidemment, pour  $x$  dans  $E$ :

$$(*) \quad f(x) = \int_{\Omega_x(L)} r_\Sigma \, d\omega_x + \int_{\Omega_x(L)} f(c(r_\Sigma(c))) \, d\omega_x = f_1(x) + f_2(x).$$

Il est bien connu que  $f_2$  est une fonction harmonique dans  $E$ , ou bien identiquement infinie dans  $E$ . La fonction  $f_1$  est finie dans  $E$ , de classe  $C^2$ , et satisfait l'équation  $\Delta f_1 = -1$  (où  $\Delta$  est bien sûr le laplacien de  $L$ ). Par

conséquent, dans chaque composante connexe de  $L - K$ , la fonction  $f$  est ou bien identiquement infinie ou bien finie, de classe  $C^2$ , et vérifie  $\Delta f = -1$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  une borne inférieure du rayon d'injectivité de  $L$ . Notons  $\Sigma(x, \varepsilon)$  la sphère de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ . L'hypothèse sur la géométrie bornée de  $L$  entraîne qu'il existe  $\theta > 0$  tel que, pour tout  $x$  de  $L$ :

$$\int_{\Omega_x(L)} r_{\Sigma(x, \varepsilon)} d\omega_x \geq \theta.$$

En utilisant (\*), on déduit que si la distance d'un point  $x$  à  $K$  est supérieure à  $k.\varepsilon$ , alors  $f(x) \geq k.\theta$ . Par conséquent,  $f$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini, i.e. quitte tout compact de  $L$ .

Supposons qu'il existe une composante connexe  $D$  de  $L - K$  sur laquelle  $f$  est finie et montrons que  $D$  est nécessairement bornée. Soit  $K_1$  une sous-variété compacte à bord de  $L$ , de même dimension que  $L$ , contenant  $K$  dans son intérieur. Soit  $\eta$  une borne inférieure de  $f$  sur  $D \cap \partial K_1$ . Il est clair que  $\eta$  est aussi une borne inférieure pour  $f$  sur  $D - K_1$ . Par conséquent, si  $\alpha$  est un réel supérieur à  $\eta$ , l'image inverse  $f^{-1}(\alpha) \cap D$  est compacte. Par ailleurs,  $f^{-1}(]0, \alpha])$  est relativement compact dans  $L$ .

Si  $\alpha$  est une valeur régulière supérieure à  $\eta$  de la restriction de  $f$  à  $D$ , notons  $\Phi_\alpha$  le flux du gradient de  $f$  à travers la sous-variété compacte  $f^{-1}(\alpha) \cap D$ . Nous supposons  $L$  orientable et les orientations sont choisies de sorte que  $\Phi_\alpha \geq 0$  (lorsque  $L$  n'est pas orientable, il est facile d'adapter l'argument qui suit). Nous savons que le laplacien de  $f$  est égal à  $-1$  sur  $D$ . Si  $\alpha < \beta$  sont deux valeurs régulières supérieures à  $\eta$ , le théorème de Stokes appliqué à la variété à bord  $f^{-1}([\alpha, \beta]) \cap D$  donne:

$$-\text{vol } f^{-1}([\alpha, \beta]) \cap D = \Phi_\beta - \Phi_\alpha.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \text{vol } f^{-1}([\alpha, \beta]) \cap D &\leq \Phi_\alpha, \\ \text{vol } f^{-1}([\alpha, +\infty[) \cap D &\leq \Phi_\alpha. \end{aligned}$$

Puisque  $f^{-1}(]0, \alpha]) \cap D$  est relativement compact dans  $L$ , son volume est fini. Il en résulte que le volume de  $D$  est fini. Une composante connexe non bornée de  $L - K$  est nécessairement de volume infini car elle contient évidemment une infinité de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$ . Ainsi, nous avons bien montré que  $D$  est bornée et ceci établit le lemme.

Nous pouvons maintenant montrer la proposition fondamentale. Nous choisissons donc une mesure harmonique  $\mu$  et un borélien  $B \subset M$ . Soit  $x$  un point de  $B$ . On suppose qu'il existe un domaine non compact  $V$  à frontière compacte dans la feuille  $L_x$  passant par  $x$ , qui ne rencontre pas le borélien  $B$ . Posons:

$$\Omega_{x,V} = \{c \in \Omega_x(L) \mid c(1) \in V\} \subset \Omega_x(L).$$

Evidemment, la mesure de Wiener  $\omega_x(\Omega_{x,V})$  est non nulle. Soit  $\nu_x$  la probabilité sur  $L$  image de la mesure de Wiener  $\omega_x$  par l'application  $c \mapsto c(1)$ . On a :

$$\nu_x(V) = \omega_x(\Omega_{x,V}) > 0.$$

Si  $c \in \Omega_{x,V}$ , un simple argument de connexité montre que :

$$R_B(c) = \inf\{k \in \mathbf{N} - \{0\} | c(k) \in B\} \geq 1 + \inf\{t \in [1, +\infty[ | c(t) \in \partial V\}.$$

Par intégration :

$$\int_{\Omega_x(L)} R_B d\omega_x \geq \int_{\Omega_{x,V}} R_B d\omega_x \geq \int_V \left( \int_{\Omega_y(L)} (1 + r_{\partial V}) d\omega_y \right) d\nu_x(y).$$

D'après notre second lemme, pour  $y$  dans l'intérieur de  $V$ , on a :

$$\int_{\Omega_y(L)} r_{\partial V} d\omega_y = +\infty.$$

Donc :

$$\int_{\Omega_x(L)} R_B d\omega_x = +\infty.$$

D'après notre premier lemme, ceci n'est possible que si  $x$  appartient à un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle. Nous avons donc montré que *pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  de  $B$ , l'intersection  $B \cap L_x$  s'approche de tous les bouts de  $L_x$* . La proposition fondamentale va en résulter facilement.

Pour chaque entier positif  $r$ , notons  $B(r)$  l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels que  $x$  est à distance inférieure à  $r$  de  $B$  dans la feuille  $L_x$  passant par  $x$ . Il est clair que si  $B(r) \cap L_x$  s'approche de tous les bouts de  $L_x$ , il en est de même pour  $B \cap L_x$ . En appliquant ce que nous venons de montrer au borélien  $B(r)$ , à la place de  $B$ , on obtient que, pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  de  $B(r)$ , l'intersection  $B \cap L_x$  s'approche de tous les bouts de  $L_x$ . La réunion des  $B(r)$  est bien sûr l'ensemble des  $x$  de  $M$  tels que la feuille  $L_x$  rencontre  $B$ , i.e. le saturé de  $B$ . Ainsi, pour  $\mu$ -presque tout point du saturé de  $B$  par  $\mathcal{F}$ , l'intersection  $B \cap L_x$  s'approche de tous les bouts de  $L_x$ . Ceci termine la démonstration de la proposition fondamentale.

### 3. Démonstration des théorèmes A et B

Soit  $X$  un espace métrique connexe localement compact (qui sera dans la suite une variété ou un graphe localement fini). Un *bout* de  $X$  est une application  $e$  qui associe à chaque compact  $K \subset X$  une composante connexe non compacte de  $X - K$  de telle sorte que si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux compacts avec  $K_1 \subset K_2 \subset X$ , alors  $e(K_1) \supset e(K_2)$ . On notera  $\mathcal{E}(X)$  l'ensemble des bouts de

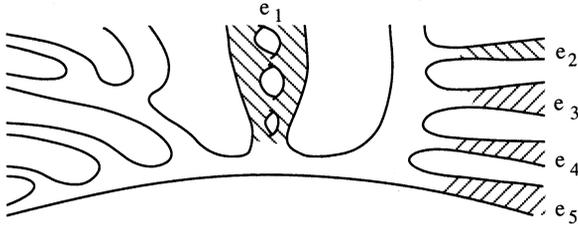


FIGURE 6.

$X$ . Soit  $(K_i)_{i \geq 0}$  une suite croissante de compacts dont la réunion est  $X$ . Si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux bouts de  $X$ , la formule

$$d(e_1, e_2) = \exp(-\sup\{i \mid e_1(K_i) = e_2(K_i)\})$$

définit une (ultra)-métrique sur  $\mathcal{E}(X)$ . La topologie correspondante ne dépend pas du choix de  $(K_i)$  et fait de  $\mathcal{E}(X)$  un espace compact métrisable totalement discontinu.

Pour une description de la théorie des bouts, nous renvoyons à [6] ou [13].

Expliquons d'abord en termes imprécis l'idée générale de la preuve du théorème  $B$ . Soit  $L$  une variété riemannienne à géométrie bornée. Pour chaque bout isolé  $e$  de  $L$ , nous allons essentiellement construire le "domaine de  $e$ ". Pour cela, on considère d'abord les hypersurfaces  $\Sigma$  de  $L$  telles que l'adhérence de  $e(\Sigma)$  n'ait qu'un bout et, parmi celles-ci, on ne considère que celles qui ont un volume minimal. Le domaine du bout  $e$  est alors défini comme la réunion des  $e(\Sigma)$  où  $\Sigma$  décrit ces hypersurfaces extrémales. Sur la figure 6, nous avons représenté les domaines des bouts isolés  $e_1, e_2, \dots$ . Soit  $B(L) \subset L$  le complémentaire de la réunion des domaines de tous les bouts isolés de  $L$ . Bien sûr, si  $L$  n'a qu'un bout  $B(L)$  est vide et si  $L$  a deux bouts, il est possible que  $B(L)$  soit vide. Si, par contre,  $L$  n'a pas de bout isolé, i.e. si  $\mathcal{E}(L)$  est un ensemble de Cantor,  $B(L) = L$ . On s'assure que, dans les autres cas,  $B(L)$  est non vide et ne s'approche évidemment pas des bouts isolés de  $L$ .

Pour une lamination  $\mathcal{F}$  sur un compact  $M$ , on peut faire cette construction dans chaque feuille  $L$  et la réunion  $B$  des  $B(L)$  est un borélien de  $M$ . Si  $\mu$  est une mesure harmonique, la proposition fondamentale affirme que, pour  $\mu$ -presque tout point  $x$ , la feuille  $L_x$  passant par  $x$  est telle que  $B(L_x)$  est vide ou s'approche de tous les bouts de  $L_x$ . Ceci montre bien que  $\mu$ -presque toute feuille a au plus 2 bouts ou un ensemble de Cantor de bouts.

Pour mettre cette idée en œuvre, on rencontre un certain nombre de difficultés techniques, en particulier pour la définition du domaine d'un bout isolé. Une façon de contourner ces difficultés est de discrétiser la situation en utilisant le pseudogroupe d'holonomie.

Il sera nécessaire de définir ce pseudogroupe avec quelques détails. Nous dirons qu'un ouvert  $U_i$  de  $M$  est *distingué* pour  $\mathcal{F}$  s'il existe un ouvert  $U'_i$

contenant son adhérence et un homéomorphisme  $h'_i$  de  $U'_i$  sur un produit  $O'_i \times T'_i$  où  $O'_i$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^d$  et  $T'_i$  un espace localement compact, tels que:

- i)  $h'^{-1}_i(O'_i \times \{*\})$  est contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$ ,
- ii)  $U_i = h'^{-1}_i(O_i \times T_i)$  où  $O_i$  est un ouvert connexe de  $O'_i$  et  $T_i$  est un ouvert de  $T'_i$ .

On note alors  $h_i$  la restriction de  $h'_i$  à  $U_i$ . Une *plaque* de  $U_i$  est un ensemble de la forme  $h_i^{-1}(O_i \times \{*\})$ .

On peut trouver un "bon recouvrement" de  $M$  par une famille finie d'ouverts  $U_i$ , dans le sens suivant (voir [8]):

- i) les  $U_i$  sont des ouverts distingués qui recouvrent  $M$ ,
- ii) les changements de cartes  $h_j \circ h_i^{-1}$  ont la forme suivante sur leur domaine de définition (éventuellement vide):

$$(x, y) \in O_i \times T_i \mapsto (F_y^{ij}(x), g_{ij}(y)) \in O_j \times T_j$$

où  $g_{ij}$  est un homéomorphisme d'un ouvert de  $T_i$  sur un ouvert de  $T_j$  et  $F_y^{ij}$  est un difféomorphisme de classe  $C^3$  dépendant continûment de  $y$  dans la topologie  $C^3$ ,

- iii) une plaque de  $U_i$  qui rencontre une plaque de  $U_j$  la rencontre sur une partie connexe.

Soit  $\mathcal{T}$  la réunion disjointe des  $T_i$ . Le pseudogroupe  $\mathcal{P}$  engendré par les homéomorphismes  $g_{ij}$  sera appelé un *pseudogroupe d'holonomie* de  $\mathcal{F}$  et les  $g_{ij}$  (avec  $i \neq j$ ) seront appelés les *générateurs* de  $\mathcal{P}$ . Notons en passant que si  $x$  est un point de  $\mathcal{T}$  et si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux *générateurs* de  $\mathcal{P}$  définis en  $x$ , alors l'égalité  $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$  entraîne  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Il est par ailleurs commode d'identifier  $T_i$  à une "transversale"  $h_i^{-1}(\{O_i\} \times T_i)$  de sorte que nous considérerons souvent les points de  $\mathcal{T}$  comme des points de  $M$ .

Choisissons une mesure harmonique  $\mu$  pour  $\mathcal{F}$ . La désintégration de  $\mu$  dans chaque  $U_i$  décrite au §2, permet de définir une mesure  $\nu_i$  sur  $T_i$  et donne une mesure globale  $\nu$  sur  $\mathcal{T}$ . Bien sûr,  $\nu$  n'est pas nécessairement invariante par  $\mathcal{P}$  mais la description locale des mesures harmoniques entraîne que  $\nu$  est *quasi-invariante*: un ensemble de  $\nu$ -mesure nulle, contenu dans le domaine de définition d'un élément de  $\mathcal{P}$  a une image par cet élément qui est également de  $\nu$ -mesure nulle.

Si  $x$  est un point de  $\mathcal{T}$ , nous noterons  $\mathcal{P}(x)$  l'orbite de  $x$  par  $\mathcal{P}$ . Si  $y$  est un point de cette orbite  $\mathcal{P}(x)$ , on appellera distance entre  $x$  et  $y$ , et on notera  $d_{\mathcal{P}}(x, y)$ , le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe une suite  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  de générateurs de  $\mathcal{P}$  (de la forme  $g_{ij}$ ) dont le composé  $\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_k$  soit défini en  $x$  et envoie  $x$  sur  $y$ . Il est commode de considérer  $\mathcal{P}(x)$  comme l'ensemble des

sommets d'un graphe  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  dont les arêtes joignent précisément les paires de sommets à distance 1. On munira (la réalisation géométrique de) ce graphe de la métrique naturelle qui prolonge la métrique  $d_{\mathcal{P}}$  déjà définie sur les sommets et pour laquelle les arêtes sont isométriques à  $[0, 1]$ . Ainsi  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  est un graphe connexe localement fini. Il est parfois utile d'équiper chaque arête orientée de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  d'une étiquette qui est le générateur de  $\mathcal{P}$  qui envoie l'origine sur l'extrémité.

Il est bien connu (et facile de montrer) que si  $x$  est un point de  $\mathcal{T}$ , le graphe  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  et la feuille  $L_x$  qui passe par  $x$  sont quasi-isométriques [8]. En particulier, les espaces de bouts de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  et  $L_x$  sont canoniquement homéomorphes. On obtient donc la version discrète suivante de la proposition fondamentale.

*Soit  $\nu$  la (classe de) mesure sur  $\mathcal{T}$  associée à une mesure harmonique. Si  $B \subset \mathcal{T}$  est un borélien, alors pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  de  $\mathcal{T}$ , le borélien  $B$  ne rencontre pas  $\mathcal{P}(x)$  ou bien l'intersection  $\mathcal{P}(x) \cap B$  s'approche de tous les bouts de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$ .*

Nous proposons maintenant de définir le "domaine des bouts isolés" dans le contexte des graphes. Soit  $\Pi$  un graphe connexe localement fini. Fixons un entier  $k$ . Soit  $\Sigma \subset \Pi$  un sous-graphe connexe fini ayant moins de  $k$  sommets. Soit  $\overline{\omega}(\Pi, \Sigma)$  la réunion des composantes connexes de  $\Pi - \Sigma$  dont l'adhérence dans  $\Pi$  a exactement 1 bout. Soit  $\overline{\omega}_k(\Pi, \Sigma)$  l'ensemble des points de  $\overline{\omega}(\Pi, \Sigma)$  situés à une distance supérieure à  $k$  de  $\Sigma$ . On note  $\overline{\omega}_k(\Pi)$  la réunion des  $\overline{\omega}_k(\Pi, \Sigma)$  lorsque  $\Sigma$  décrit tous les sous-graphes connexes ayant moins de  $k$  sommets; c'est le "domaine des bouts isolés de taille inférieure à  $k$ ". Enfin, on note  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  le complémentaire de  $\overline{\omega}_k(\Pi)$  dans  $\Pi$ .

Le lemme suivant garantit que  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  est non trivial dans les cas qui nous intéressent.

LEMME. *Soit  $\Pi$  un graphe connexe localement fini:*

- i) *si l'ensemble des bouts de  $\Pi$  n'est ni vide ni un ensemble de Cantor,  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  est différent de  $\Pi$  et ne s'approche pas de tous les bouts de  $\Pi$  si  $k$  est assez grand;*
- ii) *si l'ensemble des bouts de  $\Pi$  contient au moins trois éléments,  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  est non vide pour  $k$  assez grand.*

La première assertion est facile. Un compact métrisable totalement discontinu qui n'est ni vide ni un ensemble de Cantor possède au moins un point isolé. Ainsi, sous l'hypothèse i), il existe un sous-graphe fini connexe  $\Sigma$  dans  $\Pi$  tel que l'adhérence de l'une des composantes connexes de  $\Pi - \Sigma$  a exactement 1 bout. Il en résulte que  $\overline{\omega}(\Pi, \Sigma)$  est non vide et donc que  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  est différent de  $\Pi$  dès que  $k$  est supérieur au nombre de sommets de  $\Sigma$ . Bien évidemment,  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  ne s'approche pas des bouts isolés.

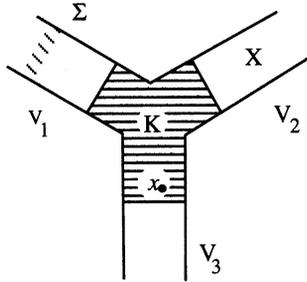


FIGURE 7.

La seconde assertion est plus intéressante. Supposons donc que  $\Pi$  possède au moins trois bouts. Il existe alors un sous-graphe fini connexe  $K$  de  $\Pi$  tel que le complémentaire  $\Pi - K$  ait au moins trois composantes connexes infinies. Nous allons montrer que si  $k$  est strictement supérieur au diamètre de  $K$ , alors  $K$  est contenu dans  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  et ceci établira évidemment le point ii).

Soient  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_N$  ( $N \geq 3$ ) les composantes connexes infinies de  $\Pi - K$  (voir figure 7). Supposons par l'absurde qu'il existe  $\Sigma \subset K$  connexe, possédant moins de  $k$  sommets, tel que  $\bar{\omega}_k(\Pi, \Sigma)$  contienne un point  $x$  de  $K$ . Par définition, il existe une composante connexe  $X$  de  $\Pi - \Sigma$ , dont l'adhérence a 1 bout, telle que  $x$  soit d'une part dans  $X$  et, d'autre part, à distance supérieure à  $k$  de  $\Sigma$ . Puisque  $k$  est supposé strictement supérieur au diamètre de  $K$ , on en déduit que  $K$  est tout entier contenu dans  $X$  et que  $\Sigma$  et  $K$  sont disjoints. Ainsi,  $\Sigma$  est contenu dans l'un des  $V_i$ , par exemple  $V_1$ . Notons que, par connexité de  $K$ , la réunion  $V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_N \cup K$  est un connexe qui ne rencontre pas  $\Sigma$  mais contient le point  $x$  de  $X$ . Par conséquent, cette union est contenue dans  $X$ . Mais ceci est la contradiction cherchée puisque ceci implique que  $X - K$  possède au moins deux composantes connexes infinies ( $V_2$  et  $V_3$ ) et donc que l'adhérence de  $X$  possède au moins deux bouts alors qu'elle n'en possède qu'un. Ceci établit le lemme.

*Retenons que si, pour tout  $k$ , la partie  $\mathbf{B}_k(\Pi)$  est vide ou s'approche de tous les bouts de  $\Pi$ , alors  $\Pi$  a 0, 1 ou 2 bouts ou un ensemble de Cantor de bouts.*

Le lemme suivant sera démontré au §5.

LEMME. *Pour tout entier  $k$ , la réunion  $\mathbf{B}_k$  des  $\mathbf{B}_k(\bar{\mathcal{P}}(x))$  où  $x$  parcourt  $\mathcal{T}$  est un borélien de  $\mathcal{T}$ .*

*Nous pouvons maintenant démontrer le théorème B décrivant l'espace des bouts d'une feuille générique.*

Soit  $\nu$  la (classe de) mesure sur  $\mathcal{T}$  associée au choix d'une mesure harmonique  $\mu$ . Fixons un entier  $k$  et appliquons la "version discrète" de la propo-

sition fondamentale au borélien  $\mathbf{B}_k \subset \mathcal{T}$  défini dans le lemme précédent. On en déduit que pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  de  $\mathcal{T}$ , la partie  $\mathbf{B}_k(\overline{\mathcal{P}}(x)) \subset \overline{\mathcal{P}}(x)$  est vide ou s'approche de tous les bouts de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$ . Pour  $\nu$ -presque tout point  $x$ , cette même propriété est donc vérifiée pour tout  $k$ . Nous savons que ceci ne peut se produire que si l'ensemble des bouts de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  a 0, 1, 2 bouts ou est un ensemble de Cantor. Le théorème B résulte alors de deux observations que nous avons déjà faites. La première est qu'un ensemble de  $\nu$ -mesure nulle, saturé par  $\mathcal{P}$  correspond à un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle, saturé par  $\mathcal{F}$ . La seconde est que l'espace des bouts du graphe  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  est homéomorphe à l'espace des bouts de la feuille  $L_x$  passant par  $x$ .

Pour démontrer le théorème A', nous utiliserons une méthode similaire. Nous supposons maintenant que la lamination  $\mathcal{F}$  est de dimension 2 et orientée. Soit  $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  une suite finie de générateurs du pseudogroupe  $\mathcal{P}$  et notons  $\mathcal{T}_\sigma$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathcal{T}$  tels que la composition  $\gamma_k \circ \dots \circ \gamma_1$  soit définie au voisinage de  $x$  et fixe le point  $x$ .

Remarquons que si  $x$  est dans  $\mathcal{T}_\sigma$ , la suite  $\sigma$  définit une classe d'homotopie libre de lacets dans la feuille  $L_x$  passant par  $x$ . Soit  $\sigma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_{k'})$  une autre suite finie et considérons l'ensemble  $\mathcal{T}_{\sigma, \sigma'}$  des points  $x$  de l'intersection  $\mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\sigma'}$  tels que les classes d'homotopie libre de lacets de  $L_x$  aient un nombre d'intersection  $\pm 1$ ; c'est un borélien de  $\mathcal{T}$ .

Observons que l'ensemble des couples  $(\sigma, \sigma')$  est dénombrable. La proposition fondamentale montre alors que, pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  de  $\mathcal{T}$ , pour tout couple  $(\sigma, \sigma')$  l'orbite  $\mathcal{P}(x)$  ne rencontre pas  $\mathcal{T}_{\sigma, \sigma'}$  ou bien  $\mathcal{P}(x) \cap \mathcal{T}_{\sigma, \sigma'}$  s'approche de tous les bouts de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$ .

Soit  $x$  un point de  $\mathcal{T}$  tel que la feuille  $L_x$  soit de genre non nul. Il existe alors deux lacets dans  $L_x$  d'intersection  $\pm 1$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(\sigma, \sigma')$  tel que  $x$  soit dans  $\mathcal{T}_{\sigma, \sigma'}$ . Ainsi, si  $\mathcal{P}(x)$  ne rencontre aucun  $\mathcal{T}_{\sigma, \sigma'}$ , la feuille  $L_x$  est de genre nul.

Si  $\mathcal{P}(x) \cap \mathcal{T}_{\sigma, \sigma'}$  s'approche de tous les bouts, on trouve des paires de lacets d'intersection  $\pm 1$  qui s'approchent de tous les bouts de  $L_x$ . Dans ce cas, aucun bout n'est planaire.

Nous avons donc montré que la feuille passant par  $\mu$ -presque tout point est ou bien de genre nul (et tous ses bouts sont alors plans) ou bien tous ses bouts sont non plans. Le théorème B associé au théorème de classification des surfaces non compactes (orientables) entraîne le théorème A'.

Il faut encore justifier le fait que le théorème A' entraîne le théorème A. Il s'agit de montrer qu'une mesure harmonique concentrée sur une réunion dénombrable de feuilles ne peut se concentrer que sur des feuilles compactes. Supposons en effet qu'une feuille  $L$  soit de mesure positive. La description locale des mesures harmoniques montre alors qu'une boule compacte  $B$  contenue

dans  $L$  est de mesure positive. La proposition fondamentale, appliquée à  $B$ , entraîne que le compact  $B$  s'approche de tous les bouts de  $L$ . C'est donc que  $L$  n'a pas de bout; c'est une feuille compacte.

Pour terminer ce paragraphe, nous traitons rapidement du cas des *laminations de dimension 2 non nécessairement orientables*. Pour une suite  $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  de générateurs de  $\mathcal{P}$ , notons  $T'_\sigma$  la partie de  $T_\sigma$  formée des points  $x$  tels que le lacet correspondant de  $L_x$  désoriente. Par le même argument que précédemment, on déduit que, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , la feuille  $L_x$  est orientable ou tous ses bouts sont non orientables, i.e. il existe des lacets désorientants qui s'approchent de tous les bouts. La classification des surfaces non compactes non nécessairement orientables est analogue à celle des surfaces orientables. L'invariant principal est le triplet d'espaces compacts  $\mathcal{E} \supset \mathcal{E}_{\text{np}} \supset \mathcal{E}_{\text{nor}}$  où  $\mathcal{E}$  est l'espace des bouts,  $\mathcal{E}_{\text{np}}$  le sous-espace des bouts non planaires et  $\mathcal{E}_{\text{nor}}$  le sous-espace des bouts non orientables (voir [12] pour les détails de cette classification). Dans notre situation, nous savons que pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , on a:

- i)  $\mathcal{E}(L_x)$  a 0, 1 ou 2 éléments ou est un ensemble de Cantor,
- ii)  $\mathcal{E}_{\text{np}}(L_x)$  est vide ou égal à  $\mathcal{E}(L_x)$ ,
- iii)  $\mathcal{E}_{\text{nor}}(L_x)$  est vide ou égal à  $\mathcal{E}_{\text{np}}(L_x)$ .

Par conséquent, si l'on ne suppose plus la lamination de dimension 2 orientable dans les théorèmes A, A', il faut ajouter à la liste des six surfaces a), a'), b), b'), c), c') les trois surfaces non orientables suivantes:

- a'') le "monstre du Loch Ness non orientable",
- b'') l'"échelle de Jacob non orientable",
- c'') l'"arbre de Cantor non orientable",

obtenus respectivement à partir du plan, du cylindre et de l'arbre de Cantor en faisant des sommes connexes avec une infinité de plans projectifs s'approchant de tous les bouts.

#### 4. Les laminations ayant "deux bouts" ou "un ensemble de Cantor de bouts"

Rappelons qu'une mesure harmonique est dite *ergodique* si tout borélien réunion de feuilles est de mesure nulle ou totale. Les mesures ergodiques sont les rayons extrémaux du cône convexe (à base compacte) des mesures harmoniques. Toute mesure harmonique se décompose en composantes ergodiques [7]. Nous restreindrons donc notre étude aux mesures ergodiques.

Pour tout entier  $k$ , la réunion des feuilles d'une lamination qui ont exactement  $k$  bouts est un borélien saturé par le feuilletage (voir §5). Par conséquent, si  $\mu$  est une mesure harmonique ergodique, quatre cas sont possibles suivant que  $\mu$ -presque toute feuille a 0, 1, 2 ou un ensemble de Cantor de bouts.

Le cas où  $\mu$ -presque toute feuille a 0 bout est sans intérêt: c'est le cas où la mesure se concentre sur une feuille compacte.

Nous allons décrire le cas "à deux bouts" puis "à un Cantor de bouts" et nous verrons que ceci ne se produit que dans des circonstances très particulières. D'une certaine façon, on serait tenté de dire que les feuilles génériques d'une lamination "générale" ont un seul bout.

Le lemme suivant sera très utile. Il établit que si la feuille générique a au moins deux bouts, alors on peut trouver une hypersurface compacte dans une feuille qui sépare non trivialement les bouts et qui est sans holonomie "sur une partie de mesure non nulle".

**LEMME (DE L'HYPERSURFACE).** *Soit  $\mathcal{F}$  une lamination sur l'espace compact  $M$  et  $\mu$  une mesure harmonique. On suppose que pour  $\mu$ -presque tout point  $x$ , la feuille  $L_x$  passant par  $x$  a au moins deux bouts. Alors, il existe une variété compacte  $\Sigma$  de dimension 1 de moins que les feuilles, un espace compact  $C$  et un plongement  $u$  de  $\Sigma \times [-1, +1] \times C$  dans  $M$  ayant les propriétés suivantes:*

- i) *la  $\mu$ -mesure de  $u(\Sigma \times [-1, +1] \times C)$  est non nulle,*
- ii) *la restriction de  $u$  à  $\Sigma \times [-1, +1] \times \{y\}$  est un plongement de classe  $C^3$  dans une feuille de  $\mathcal{F}$  qui dépend continûment de  $y$ ,*
- iii) *pour tout  $y$  de  $C$  le complémentaire de l'image  $u(\Sigma \times [-1, +1] \times \{y\})$  dans la feuille correspondante a au moins deux composantes connexes non bornées.*

Avant de démontrer ce lemme, décrivons une construction générale. Nous conservons dans ce paragraphe les notations introduites du §3 relatives au pseudogroupe  $\mathcal{P}$  agissant sur  $\mathcal{T}$ . Soit  $\mathcal{G}$  un graphe fini connexe. On choisit un sommet de base  $*$  dans  $\mathcal{G}$  et sur chaque arête  $(s_1, s_2)$  joignant deux sommets, orientée de  $s_1$  vers  $s_2$ , on porte une étiquette qui est l'un des générateurs du pseudogroupe  $\mathcal{P}$ . L'étiquette de l'arête  $(s_2, s_1)$  est supposée être l'inverse de celle de l'arête  $(s_1, s_2)$  et on demande encore que parmi les arêtes qui émanent d'un sommet, au plus une porte une étiquette donnée. Un exemple de tel graphe est bien sûr obtenu en considérant un point  $x$  de  $\mathcal{T}$  et un sous-graphe fini connexe de  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  contenant le point  $x$ .

Considérons alors la partie  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{T}$  formée des points  $x$  ayant les propriétés suivantes.

Pour tout chemin de  $\mathcal{G}$  issu du point base  $*$ , la suite d'étiquettes correspondante  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  est telle que l'élément  $\gamma_k \circ \dots \circ \gamma_1$  de  $\mathcal{P}$  est défini en  $x$ .

De plus,  $\gamma_k \circ \dots \circ \gamma_1$  fixe le point  $x$  si et seulement si le chemin est un lacet, i.e. se termine en  $*$ .

Si  $x$  est dans  $\mathcal{T}_G$  et si  $g$  est un sommet de  $\mathcal{G}$ , on peut naturellement définir un point  $g.x$  de la façon suivante. On joint  $*$  à  $g$  par un chemin étiqueté  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  et on pose  $g.x = \gamma_k \circ \dots \circ \gamma_1(x)$ . La définition de  $\mathcal{T}_G$  montre que  $g.x$  est bien défini. Si  $x$  est dans  $\mathcal{T}_G$ , nous noterons  $\mathcal{G}.x$  l'ensemble des  $g.x$  où  $g$  parcourt les sommets de  $\mathcal{G}$ .

Soit  $\mathcal{T}_G^\#$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathcal{T}_G$  tels que le complémentaire de  $\mathcal{G}.x$  dans l'orbite  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  ait au moins deux composantes connexes infinies; c'est un borélien.

Par hypothèse, nous supposons que pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  de  $\mathcal{T}$ , l'orbite  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  a au moins deux bouts. Ainsi, pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  de  $\mathcal{T}$ , il existe un graphe fini  $\mathcal{G}$  du type précédent tel que  $x$  soit dans  $\mathcal{T}_G^\#$ . Puisqu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de graphes finis étiquetés, on en déduit qu'il existe  $\mathcal{G}_0$  tel que  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$  soit de  $\nu$ -mesure non nulle.

Soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$  dont tous les voisinages dans  $\mathcal{T}$  rencontrent  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$  sur une partie de  $\nu$ -mesure non nulle. Soit  $V$  la réunion finie des plaques correspondant aux points de  $\mathcal{G}_0.x_0 \subset \mathcal{P}(x_0) \subset \mathcal{T}$ . C'est un ouvert de la feuille  $L_{x_0}$ , connexe, relativement compact et dont le complémentaire possède au moins deux composantes non relativement compactes. Soit  $\Sigma \subset V$  une hypersurface compacte connexe passant par  $x_0$  qui vérifie de même que  $L_{x_0} - \Sigma$  possède (au moins) deux composantes non relativement compactes.

Un lacet dans le graphe  $\mathcal{G}_0$  issu de  $*$  définit une classe d'homotopie de lacet issu de  $x_0$  dans la feuille  $L_{x_0}$ . D'après la définition de  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$ , l'holonomie de ces lacets est triviale sur  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$ . Tout lacet issu de  $x_0$  et contenu dans  $V$  est homotope dans  $L_{x_0}$  à l'un des précédents. Il en résulte que l'holonomie de  $\mathcal{F}$ , évaluée sur le groupe fondamental de  $\Sigma$ , fixe tous les points de  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$  suffisamment proches de  $x_0 \in \mathcal{T}$ . Si  $T$  est un petit voisinage compact de  $x_0$  dans  $\mathcal{T}$  et si  $C \subset T$  est un compact de  $\nu$ -mesure non nulle contenu dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}^\#$ , on peut donc construire un plongement de  $\Sigma \times [-1, +1] \times C$  dans  $M$  de façon à vérifier les conditions du lemme.

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

**LEMME.** *Si  $\mu$  est une mesure harmonique ergodique non complètement invariante, alors la feuille qui passe par  $\mu$ -presque tout point possède une fonction harmonique positive non constante.*

Pour démontrer ce lemme, rappelons d'abord que la désintégration d'une mesure harmonique dans l'un des ouverts  $U_i$  du bon recouvrement donne une fonction harmonique positive sur presque chaque plaque et une mesure  $\nu_i$  sur la transversale  $T_i$ . Sur l'intersection de deux plaques de  $U_i$  et  $U_j$ , ces fonc-

tions harmoniques différent d'une constante multiplicative qui est aussi le jacobien du générateur  $g_{ij}$  de  $\mathcal{P}$ , relativement aux mesures  $\nu_i$  et  $\nu_j$ . Ainsi, pour  $\nu$ -presque tout  $x$  de  $\mathcal{T}$ , on dispose d'un morphisme  $\pi_1(L_x) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  défini sur le groupe fondamental de la feuille  $L_x$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$ . Ce morphisme est d'une part l'obstruction à globaliser les fonctions harmoniques sur les plaques en une fonction harmonique sur la feuille et, d'autre part, le jacobien de l'holonomie de  $L_x$  par rapport à  $\nu$ . Nous allons montrer que ce morphisme est presque sûrement trivial.

Soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{P}$  et considérons le jacobien de  $\gamma$ , noté  $\text{jac}(\gamma)$ , défini pour presque tout point du domaine de définition de  $\gamma$  par  $\gamma_*\nu = \text{jac}(\gamma).\nu$ . L'ensemble des points fixes de  $\gamma$  où  $\text{jac}(\gamma) < 1$  (resp.  $> 1$ ) est bien sûr invariant par  $\gamma$  et  $\gamma$  y contracte (resp. dilate)  $\nu$ ; il en résulte que cet ensemble est de mesure nulle. Par conséquent, pour  $\nu$ -presque tout point fixe  $x$  de  $\gamma$ , le jacobien  $\text{jac}(\gamma)(x)$  est égal à 1. Puisque  $\mathcal{P}$  est dénombrable, on en déduit que pour  $\nu$ -presque tout  $x$  de  $\mathcal{T}$ , si un élément  $\gamma$  de  $\mathcal{P}$  fixe  $x$ , alors  $\text{jac}(\gamma)(x) = 1$ . Ceci signifie précisément que le morphisme  $\pi_1(L_x) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  est trivial pour  $\mu$ -presque tout  $x$  de  $M$ . On peut donc globaliser les fonctions harmoniques positives définies sur presque toute plaque en des fonctions harmoniques positives sur les feuilles. Si les seules fonctions harmoniques positives sur presque chaque feuille sont les constantes, cela signifie que l'on peut désintégrer  $\mu$  localement de sorte que la mesure obtenue sur presque chaque plaque est simplement le volume riemannien. La mesure  $\nu$  sur  $\mathcal{T}$  est alors invariante par  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire que  $\mu$  est complètement invariante. Ceci établit le lemme.

Le résultat suivant généralise l'observation faite plus haut suivant laquelle les mesures harmoniques des feuilletages de dimension 1 sont complètement invariantes.

**THÉORÈME.** *Si  $\mu$  est une mesure harmonique ergodique telle que  $\mu$ -presque toute feuille a deux bouts, alors  $\mu$  est complètement invariante.*

Par ergodicité, pour  $\mu$ -presque tout point  $x$ , la feuille  $L_x$  rencontre le compact  $u(\Sigma \times \{0\} \times C)$  donné par le lemme de l'hypersurface. Chaque composante connexe de l'intersection est une hypersurface de  $L_x$  qui sépare les deux bouts de  $L_x$ , de la forme  $u(\Sigma \times \{0\} \times \{y\})$ . Ces hypersurfaces sont de diamètres et de volumes bornés. D'autre part, la proposition fondamentale garantit que pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , l'intersection  $u(\Sigma \times \{0\} \times C) \cap L_x$  s'approche des deux bouts de  $L_x$ . Dans la variété à deux bouts et à géométrie bornée  $L_x$ , on peut donc trouver une famille d'hypersurfaces séparant les deux bouts, à diamètres et volumes bornés, s'approchant des deux bouts. Ce sont précisément les hypothèses qui permettent à D. Sullivan de montrer dans [15] que  $L_x$  n'a pas de fonction (super)-harmonique positive non constante. Le lemme précédent entraîne alors que  $\mu$  est complètement invariante, c'est-à-dire le théorème.

Nous pouvons maintenant *démontrer le théorème C décrivant les "laminations à deux bouts comme les extensions compactes des laminations de dimension 1"*.

Soit donc une mesure harmonique ergodique  $\mu$  telle que  $\mu$ -presque toute feuille ait deux bouts. Considérons de nouveau les composantes connexes de l'intersection d'une feuille  $L_x$  avec le compact  $u(\Sigma \times \{0\} \times C)$  utilisé dans la démonstration précédente. Ce sont des hypersurfaces compactes connexes de diamètres bornés qui séparent les bouts de  $L$ . Par ergodicité et en utilisant la proposition fondamentale, il existe un borélien saturé  $M' \subset M$  de  $\mu$ -mesure totale tel que si  $x$  est dans  $M'$ , la feuille  $L_x$  a exactement deux bouts et rencontre  $u(\Sigma \times \{0\} \times C)$  sur une famille d'hypersurfaces qui s'approchent des deux bouts de  $L_x$ . On peut alors les représenter par une suite  $\Sigma_{x,i}$ , indexée par  $i \in \mathbf{Z}$ , de telle sorte que la composante bornée  $D_{x,i}$  de  $L_x - \Sigma_{x,i} \cup \Sigma_{x,i+1}$  ne rencontre pas  $u(\Sigma \times \{0\} \times C)$ . Cette indexation est unique à une translation et à un changement de signe près de l'indice  $i$ . Soit  $f_{x,i}$  la fonction harmonique définie sur l'adhérence de  $D_{x,i}$ , valant  $i$  sur  $\Sigma_{x,i}$  et  $i+1$  sur  $\Sigma_{x,i+1}$ . Soit  $f_x$  la fonction continue définie sur  $L_x$  dont la restriction à  $D_{x,i}$  est  $f_{x,i}$ . Cette fonction  $f_x$  est bien définie à translation et à changement de signe près. La partition de  $L_x$  par les fibres de  $f_x$  est bien définie, indépendante du choix de l'indexation des  $\Sigma_{x,i}$ . Chacune de ces fibres est un compact de  $L_x$  qui sépare les deux bouts de  $L_x$ . Soit  $X$  le quotient de  $M'$  par la relation d'équivalence qui, dans chaque feuille  $L_x$ , identifie les points d'une même fibre de  $f_x$ . Cet espace  $X$  est un espace borélien standard et on a une projection naturelle  $\pi: M \rightarrow X$ , définie  $\mu$ -presque partout. Les projections des feuilles de  $\mathcal{F}$  par  $\pi$  sont naturellement des droites et nous allons montrer comment équiper  $X$  d'une structure de feuilletage mesuré de dimension 1, au sens défini dans l'introduction.

Soit  $m$  l'image de  $\mu$  par  $\pi$ . Soit  $\overline{M}'$  le "revêtement mesurable" à deux feuilletés défini de la façon suivante. Un point de  $\overline{M}'$  est la donnée d'un point  $x$  de  $M'$  et de l'un des deux bouts de la feuille  $L_x$ . Il est facile d'exhiber une structure d'espace borélien standard sur  $\overline{M}'$  et de construire une mesure  $\bar{\mu}$  sur  $\overline{M}'$ , invariante par l'involution sans point fixe naturelle  $\sigma$  sur  $\overline{M}'$  et qui se projette sur  $2\mu$  dans  $\overline{M}'/\sigma \simeq M'$ . Bien sûr,  $\overline{M}'$  est équipé d'une relation d'équivalence  $\overline{\mathcal{F}}$  dont les classes  $L_x^e$  s'obtiennent en choisissant une feuille  $L_x$  et un bout  $e$  de cette feuille. On peut alors choisir l'indexation des  $\Sigma_{x,i}$  de telle sorte que  $\Sigma_{x,i}$  tend vers  $e$  lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$ . L'application  $f_x: L_x \rightarrow \mathbf{R}$  est alors bien définie à une translation près et non plus au signe près; on la note  $f_x^e$ .

Soit  $\overline{X}$  le quotient de  $\overline{M}'$  où, pour tout  $x$  de  $M'$  et tout bout  $e$  de  $L_x$ , on identifie tous les couples  $(x_1, e)$  et  $(x_2, e)$  de  $\overline{M}'$  avec  $x_1$  et  $x_2$  dans  $L_x$  et  $f_x^e(x_1) = f_x^e(x_2)$ . Soit  $\overline{\pi}: \overline{M}' \rightarrow \overline{X}$  l'application quotient. Un point  $\overline{x}$  de  $\overline{X}$  est donc la donnée d'une paire constituée d'un bout  $e$  de  $L_x$  et d'une fibre  $(f_x^e)^{-1}(\alpha)$ . Si  $t \geq 0$  (resp.  $t < 0$ ), nous définissons  $\phi^t(\overline{X})$  comme la paire  $(e, (f_x^e)^{-1}(\beta))$  où  $\beta$  est choisi de telle sorte que  $\beta \geq \alpha$  (resp.  $\beta < \alpha$ ) et que

le volume de  $(f_x^e)^{-1}([\alpha, \beta])$  (resp.  $(f_x^e)^{-1}([\beta, \alpha])$ ) dans  $L$  soit égal à  $|t|$ . Ceci définit un flot  $\overline{\phi}^t$  sur  $\overline{X}$  dont les orbites sont bien sûr les images par  $\overline{\pi}$  des classes d'équivalence de  $\overline{\mathcal{F}}$ . C'est un flot borélien sur l'espace standard  $\overline{X}$  que l'on peut équiper de la mesure  $\overline{m}$  image de  $\overline{\mu}$  par  $\overline{\pi}$ .

Nous savons que  $\mu$  est une mesure complètement invariante. Cela signifie que, localement,  $\mu$  est obtenue en intégrant le volume des feuilles contre une mesure transverse invariante pour  $\mathcal{F}$ . Puisque le paramétrage du flot  $\overline{\phi}^t$  a été précisément défini en termes du volume des feuilles, la mesure  $\overline{m}$  est invariante par  $\overline{\phi}^t$ .

L'involution naturelle  $\sigma$  sur  $\overline{X}$  conjugue le flot  $\overline{\phi}^t$  et son inverse et préserve  $\overline{m}$ . La projection de  $\overline{m}$  sur  $\overline{X}/\sigma \simeq X$  est bien sûr  $2m$ . Ainsi  $X$  est naturellement un feuilletage mesuré de dimension 1.

La projection  $\pi: M \rightarrow X$ , définie presque partout, envoie les feuilles de  $\mathcal{F}$  sur celles de  $X$ . La restriction de  $\pi$  à presque chaque feuille  $L_x$  est une application continue sur une droite, à fibres compactes, qui identifie les bouts de  $L_x$  et ceux de cette droite.

Ceci établit le théorème C.

Nous abordons maintenant la *preuve du théorème D* qui décrit les "laminations à un Cantor de bouts comme étant définies par HNN-extensions". Comme promis dans l'introduction, nous définissons d'abord la notion d'équivalence de Kakutani entre deux pseudogroupes mesurables. Nous suivrons la définition donnée dans [9], auquel nous renvoyons pour plus de détails.

Soit  $\mathcal{P}$  un pseudogroupe mesurable agissant sur l'espace borélien standard  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  et engendré par des bijections mesurables  $\gamma_i: A_i \rightarrow \gamma_i(A_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). On suppose que  $\nu(A_i) \neq 0$  et que  $\gamma_i$  respecte les boréliens de mesure nulle. On note toujours  $\mathcal{P}(x)$  l'orbite d'un point  $x$  et  $d_{\mathcal{P}}$  la distance de mesure nulle. On note toujours  $\mathcal{P}(x)$  l'orbite d'un point  $x$  et  $d_{\mathcal{P}}$  la distance sur  $\mathcal{P}(x)$  (à valeurs entières) associée au système générateur  $\{\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_k^{\pm 1}\}$ . On considèrera encore le graphe  $\overline{\mathcal{P}}(x)$  dont les sommets sont les éléments de  $\mathcal{P}(x)$  et où une arête lie deux sommets à distance 1. Une arête orientée porte naturellement une (ou plusieurs) étiquette(s) qui est l'un des générateurs.

Soit  $\mathcal{P}'$  un autre pseudogroupe mesurable pour lequel nous choisissons des notations analogues. Pour simplifier, nous supposons que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont ergodiques. On dit que  $\mathcal{P}'$  est un *facteur* de  $\mathcal{P}$  s'il existe une application borélienne  $P: X \rightarrow X'$  telle que:

- i) l'image inverse d'un borélien de  $\nu'$ -mesure nulle est de  $\nu$ -mesure nulle,
- ii) pour  $\nu$ -presque tout  $x$  de  $X$ , l'application  $P$  envoie  $\mathcal{P}(x)$  sur  $\mathcal{P}'(P(x))$ ,
- iii) il existe des constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 \geq 0$  telles que, pour  $\nu$ -presque tout  $x$ , pour tout  $x_1, x_2 \in \mathcal{P}(x)$ , on a:

$$\frac{1}{C_1} d_{\mathcal{P}}(x_1, x_2) - C_2 \leq d_{\mathcal{P}'}(P(x_1), P(x_2)) \leq C_1 d_{\mathcal{P}}(x_1, x_2) + C_2.$$

On dit que deux pseudogroupes mesurables ergodiques sont *équivalents au sens de Kakutani* s'ils ont un facteur commun.

Ainsi, le type de quasi-isométrie des orbites et les espaces de bouts (des graphes associés) sont préservés par équivalence de Kakutani. Il est facile de s'assurer que deux bons recouvrements d'une même lamination munie d'une mesure harmonique mènent à deux pseudogroupes mesurables équivalents au sens de Kakutani.

Nous commençons par la partie la moins intéressante du théorème D. Rappelons d'abord que nous avons promis une définition de la notion de HNN-extension non triviale dans l'introduction. Soit  $\mathcal{P}$  un pseudogroupe mesurable agissant sur  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  et soit  $\phi: A \rightarrow \phi(A)$  un isomorphisme borélien avec  $\nu(A) \neq 0$ , respectant les ensembles de mesure nulle. On suppose que  $A$  et  $\phi(A)$  sont disjoints et que, d'autre part, pour  $\nu$ -presque tout  $x$  de  $X$ , l'orbite  $\mathcal{P}(x)$  rencontre  $A \cup \phi(A)$  en au moins deux points. On considère alors le pseudogroupe  $\mathcal{P}'$  engendré par  $\mathcal{P}$  et  $\phi$ . Les arêtes du graphe  $\overline{\mathcal{P}'}(x)$  sont étiquetées par l'un des générateurs de  $\mathcal{P}$  ou  $\phi^{\pm 1}$ . On supposera que, pour  $\nu$ -presque tout  $x$ , ce graphe  $\overline{\mathcal{P}'}(x)$  est disconnecté si l'on ôte l'une quelconque de ses arêtes étiquetée  $\phi^{\pm 1}$ . On dira alors que  $\mathcal{P}'$  est une HNN-extension non triviale.

**PROPOSITION.** *Si un pseudogroupe mesurable ergodique est une HNN-extension non triviale, alors presque toute orbite a au moins deux bouts.*

Supposons donc que  $\mathcal{P}'$  est ergodique. Les sommets d'une composante connexe du complémentaire de la réunion des arêtes  $\phi^{\pm 1}$  forment une orbite de  $\mathcal{P}$ . Dans  $\overline{\mathcal{P}'}(x)$ , contractons chacune de ces composantes connexes sur un point: on obtient un arbre  $\text{Ar}(x)$ . Le nombre d'arêtes issues d'un sommet de  $\text{Ar}(x)$  correspond au nombre de points d'une orbite de  $\mathcal{P}$  situés dans  $A \cup \phi(A)$ . Presque toute orbite de  $\mathcal{P}$  rencontre au moins deux fois  $A \cup \phi(A)$ . Autrement dit, pour  $\nu$ -presque tout  $x$ , la valence de tous les sommets de  $\text{Ar}(x)$  est au moins 2. L'arbre  $\text{Ar}(x)$  n'est pas nécessairement localement fini mais il est clair que l'on peut définir un bout de  $\text{Ar}(x)$  comme un chemin infini partant d'un point base sans aller retour. Si la valence de chaque sommet de  $\text{Ar}(x)$  est au moins deux,  $\text{Ar}(x)$  possède au moins deux bouts. La proposition en résulte car le nombre de bouts de  $\text{Ar}(x)$  est bien sûr un minorant du nombre de bouts de  $\overline{\mathcal{P}'}(x)$ .

Il n'est d'ailleurs pas difficile d'analyser les cas où les orbites n'ont que deux bouts. Cela se produit précisément lorsque presque toute orbite de  $\mathcal{P}$  est finie et ne rencontre chacun des ensembles  $A$  et  $\phi(A)$  qu'en un seul point. Le cas le plus simple est lorsque  $X$  est la réunion disjointe de  $A$  et  $\phi(A)$  et où le pseudogroupe  $\mathcal{P}$  est engendré par un autre isomorphisme  $\psi$  entre  $A$  et  $\psi(A)$ . Les orbites de  $\mathcal{P}$  ont deux éléments et les orbites de  $\mathcal{P}'$  intersectent  $A$  sur les orbites de la bijection  $\psi^{-1}\phi$  de  $A$ ; elles ont deux bouts.

Remarquons encore que si le pseudogroupe  $\mathcal{P}'$  n'est pas obtenu à partir d'une mesure harmonique d'une lamination, il est possible que presque toute orbite ait une infinité de bouts sans pour autant qu'il s'agisse d'un ensemble de Cantor. Nous avons déjà construit un exemple au §2.

Nous démontrons maintenant l'autre partie du théorème D:

*Si  $\mu$  est une mesure harmonique ergodique telle que  $\mu$ -presque toute feuille a au moins deux bouts, alors le pseudogroupe d'holonomie est équivalent au sens de Kakutani à une HNN-extension non triviale.*

Remarquons d'abord que nous savons déjà, grâce au théorème B, que l'hypothèse implique que presque toutes les feuilles ont deux bouts ou presque toutes les feuilles ont un ensemble de Cantor de bouts. Cependant, il est plus commode de traiter les deux cas simultanément.

Soit  $u: \Sigma \times [-1, +1] \times C \rightarrow M$  le plongement donné par le lemme de l'hypersurface. Soient  $O_1, O_2, \dots, O_k$  des ouverts simplement connexes de  $\Sigma$ , recouvrant  $\Sigma$  et s'intersectant deux à deux sur des ouverts connexes (ou vides). On peut alors construire  $p$  ouverts distingués  $V_1, \dots, V_k$  dans  $M$  ayant les propriétés suivantes:

- i) Il existe un espace localement compact  $S_i$  et un homéomorphisme  $h_i$  de  $O_i \times ]-1, +1[ \times S_i$  sur  $V_i$  qui envoie  $O_i \times ]-1, +1[ \times \{*\}$  dans une feuille de la lamination  $\mathcal{F}$ ;
- ii) Quitte à remplacer  $C$  par un fermé plus petit, mais de mesure non nulle, il existe des homéomorphismes  $\theta_i$  de  $C$  sur leur image  $C_i$  dans  $S_i$  tels que la restriction de  $h_i$  à  $O_i \times ]-1, +1[ \times C_i$  soit obtenue en restreignant  $u$  à  $O_i \times ]-1, +1[ \times C$  et en identifiant  $C$  et  $C_i$  par  $\theta_i$ .

On découpe chaque  $V_i$  en deux ouverts  $V_i^+$  et  $V_i^-$  en posant  $V_i^+ = h_i(O_i \times ]-\frac{1}{2}, 1[ \times S_i)$  et  $V_i^- = h_i(O_i \times ]-1, \frac{1}{2}[ \times S_i)$ . Les espaces des plaques de  $V_i^\pm$  sont notés  $S_i^\pm$ ; ils sont naturellement identifiés à  $S_i$  et nous notons  $\text{id}_i^\pm: S_i^\pm \rightarrow S_i^\mp$  ces "applications identiques". De même, on note  $C_i^\pm$  la partie de  $S_i^\pm$  correspondant à  $C_i$ .

Complétons les ouverts  $V_1^\pm, \dots, V_p^\pm$  par d'autres ouverts distingués  $V_{p+1}, \dots, V_q$  de  $M$  de telle sorte que  $V_{p+1}, \dots, V_q$  ne rencontrent pas  $u(\Sigma \times \{0\} \times C)$ . On fait cette construction de façon à ce que les ouverts  $V_1^\pm, \dots, V_p^\pm, V_{p+1}, \dots, V_q$  forment un bon recouvrement de  $M$ . Soient  $S_{p+1}, \dots, S_q$  les espaces des plaques de  $V_{p+1}, \dots, V_q$ . Considérons le pseudogroupe d'holonomie  $Q$  ainsi obtenu. Il opère sur l'espace  $\mathcal{S}$ , réunion disjointe des  $S_1^\pm, \dots, S_p^\pm, S_{p+1}, \dots, S_q$ . Parmi les générateurs de  $Q$ , il y a les  $\text{id}_i^\pm: S_i^\pm \rightarrow S_i^\mp$ .

Nous allons construire un pseudogroupe mesurable  $\mathcal{R}'$ , équivalent au sens de Kakutani à  $Q$  et qui est une HNN-extension non triviale.

L'espace sur lequel  $\mathcal{R}'$  agit est la réunion disjointe de  $\mathcal{S}$  et de deux copies  $C^+$  et  $C^-$  de  $C$  (munies des classes de mesures évidentes). Les générateurs de  $\mathcal{R}'$  sont:

- 1) les générateurs de  $Q$ , autres que  $\text{id}_i^\pm$ ,
- 2) les restrictions des  $\text{id}_i^\pm$  au complémentaire de  $C_i^\pm$  dans  $S_i^\pm$ ,
- 3) les identifications naturelles entre les  $C_i^+$  et  $C^+$  ainsi que les identifications naturelles entre les  $C_i^-$  et  $C^-$  (via les  $\theta_i$ ),
- 4) l'“identité” entre  $C^+$  et  $C^-$ , que l'on note  $\phi$ .

Ce pseudogroupe  $\mathcal{R}'$  est équivalent au sens de Kakutani à  $Q$ . Soit  $\mathcal{R}$  le sous-pseudogroupe de  $\mathcal{R}'$  engendré par les générateurs 1), 2) et 3). Nous affirmons que  $\mathcal{R}'$  est une HNN-extension non triviale de  $\mathcal{R}$  par  $\phi$ .

Si l'on envisage les orbites de  $\mathcal{R}'$  comme des graphes  $\overline{\mathcal{R}}'(x)$  étiquetés par des générateurs, il faut montrer que toute arête étiquetée  $\phi^{\pm 1}$  disconnecte  $\overline{\mathcal{R}}'(x)$ . Topologiquement, ceci correspond au fait que  $V_{p+1}, \dots, V_q$  ne rencontrent pas  $u(\Sigma \times \{0\} \times C)$  et que pour tout  $x$  de  $C$ , nous savons que  $u(\Sigma \times \{0\} \times \{x\})$  disconnecte la feuille  $L_x$  en deux composantes connexes non bornées.

Il s'agit d'autre part de vérifier que l'orbite de presque tout point par  $\mathcal{R}$  rencontre  $C^+ \cup C^-$  en au moins deux points. Par ergodicité de  $\mathcal{R}'$ , nous savons que l'orbite de presque tout point de  $X$  par  $\mathcal{R}$  rencontre au moins une fois  $C^+ \cup C^-$ . Dans  $\overline{\mathcal{R}}'(x)$ , contractons chacune des composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes  $\phi^{\pm 1}$  sur un point: on obtient un arbre dont nous devons montrer que tous les sommets sont de valence au moins 2. Dans le cas contraire, il y aurait dans  $\overline{\mathcal{R}}'(x)$  une partie connexe, non bornée et à bord borné, qui ne contiendrait aucune arête  $\phi^{\pm 1}$ , c'est-à-dire qui ne rencontrerait qu'une seule fois  $C^+ \cup C^-$ . D'après la proposition fondamentale, ceci n'est possible que pour un ensemble de mesure nulle.

Ceci termine la preuve du théorème D.

## 5. Un pseudogroupe universel et quelques questions de mesurabilité

Les démonstrations qui précèdent utilisent souvent le fait que certains ensembles sont boréliens. Ceci n'est pas très difficile à justifier car les ensembles en question sont définis de manière très explicite. Il ne nous semble pas utile de donner tous les détails mais nous allons montrer quelles sont les méthodes (très simples) qui sont employées. Ce paragraphe servira aussi de prétexte pour présenter la construction d'un pseudogroupe “universel” qui nous semble intéressant même s'il n'est pas strictement nécessaire dans les preuves.

Fixons un entier  $r$  et considérons le groupe libre  $F$  engendré par  $r$  lettres  $g_1, \dots, g_r$ . Considérons d'autre part un pseudogroupe  $\mathcal{P}$  opérant sur un espace topologique  $\mathcal{T}$  et engendré par  $r$  homéomorphismes  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  entre des ouverts de  $\mathcal{T}$ . Soit  $x$  un point de  $\mathcal{T}$  et  $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$  ( $\varepsilon_j = \pm 1$  et  $1 \leq i_j \leq r$ ) un élément de  $F$  écrit sous forme réduite. Si le point  $x$  appartient au domaine de définition de  $\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \gamma_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$ , nous dirons que  $g$  est défini en  $x$  et nous noterons  $g.x$  son image. La partie  $\Delta$  de  $F$  formée des éléments définis en  $x$  a bien sûr la propriété de simplification suivante:

- 1) Si  $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell} \in \Delta$  alors  $g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell} \in \Delta$ . Soit  $\Phi \subset \Delta$  la partie formée des éléments  $g$  de  $\Delta$  qui fixent  $x$ , i.e. tels que  $g.x = x$ . On a:
- 2)  $\Phi$  est un sous-groupe de  $L$  et si  $g \in \Delta$  et  $h \in \Phi$ , alors  $gh \in \Delta$ .

L'orbite de  $x$  s'identifie alors à l'"espace homogène"  $\Delta/\Phi$ .

Nous faisons maintenant la construction inverse. Soit  $\Omega$  l'ensemble des couples de parties  $\Delta \supset \Phi$  de  $L$  qui vérifient les conditions 1) et 2). Soient  $(\Delta_1, \Phi_1)$  et  $(\Delta_2, \Phi_2)$  deux éléments de  $\Omega$ . Considérons la borne supérieure  $N$  (éventuellement  $+\infty$ ) de l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  d'une part,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  d'autre part, intersectent de la même façon la boule de centre l'élément neutre et de rayon  $n$  dans  $F$  (pour la métrique des mots de  $F$ ). La formule  $d((\Delta_1, \Phi_1), (\Delta_2, \Phi_2)) = \exp(-N)$  définit alors une (ultra)-métrique sur  $\Omega$ . Un procédé diagonal classique permet de montrer que  $\Omega$  est compact pour cette métrique.

Pour  $i = 1, \dots, r$ , l'ensemble  $W_i \subset \Omega$  formé des paires  $(\Delta, \Phi)$  telles que  $g_i \in \Delta$  est un ouvert. L'application

$$\hat{\gamma}_i: (\Delta, \Phi) \in \Omega \mapsto (g_i^{-1}\Delta, g_i^{-1}\Phi g_i) \in \Omega$$

est bien définie. C'est un homéomorphisme sur son image. Nous avons donc construit un pseudogroupe  $\mathcal{U}$  agissant sur le compact  $\Omega$  et engendré par les  $r$  homéomorphismes  $\hat{\gamma}_i$  de  $W_i$  sur  $\hat{\gamma}_i(W_i)$ .

Ce pseudogroupe est universel dans le sens évident suivant. Pour tout pseudogroupe  $\mathcal{P}$  à  $r$  générateurs  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  agissant sur l'espace  $\mathcal{T}$ , on définit l'"application classifiante"  $v: \mathcal{T} \rightarrow \Omega$  en associant au point  $x$  la paire  $(\Delta, \Phi)$  où  $\Delta$  est l'ensemble des éléments définis en  $x$  et  $\Phi$  l'ensemble de ceux qui fixent  $x$ . Il est clair que  $\gamma_i$  est défini en  $x$  si et seulement si  $\hat{\gamma}_i$  est défini en  $v(x)$  et qu'on a alors  $v(\gamma_i(x)) = \hat{\gamma}_i(v(x))$ . Ainsi  $v$  envoie bijectivement une orbite de  $\mathcal{P}$  sur une orbite de  $\mathcal{U}$ .

Remarquons que si  $g \in F$ , l'ensemble des points de  $\mathcal{T}$  où  $g$  est défini est un ouvert et l'ensemble des points fixes par  $g$  est un fermé dans cet ouvert. Par conséquent l'image inverse d'une boule par  $v$  est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé. L'application classifiante  $v$  est donc borélienne. Pour démontrer

que les ensembles construits dans les paragraphes précédents sont boréliens, il suffit donc de le démontrer pour le pseudogroupe universel. Nous nous contenterons de le faire pour l'un des ensembles que nous avons construits.

Comme précédemment, nous munissons une orbite  $\mathcal{U}(x)$  de la métrique  $d_{\mathcal{U}}$  à valeurs entières, associée du système générateur  $(\hat{\gamma}_1^{\pm 1}, \dots, \hat{\gamma}_r^{\pm 1})$ . Nous considérons  $\mathcal{U}(x)$  comme l'ensemble des sommets du graphe  $\overline{\mathcal{U}}(x)$  où deux sommets sont reliés par une arête s'ils sont à distance unité. De même, nous considérons le groupe libre  $F$  comme l'ensemble des sommets de son graphe de Cayley associé au système générateur  $(g_1, \dots, g_r)$ . Si  $\Gamma$  est une partie finie de  $F$ , on dit que  $\Gamma$  est définie au point  $x$  de  $\Omega$  si c'est le cas de tous les éléments de  $\Gamma$ . On note alors  $\Gamma.x$  l'ensemble des  $g.x$  avec  $g \in \Gamma$ .

Rappelons que nous avons construit au §2 un ensemble  $\mathbf{B}_k$ , complémentaire de la "réunion des domaines des bouts isolés de taille  $k$ ". C'est cet ensemble qui était à la base de la démonstration du théorème B. Nous allons esquisser la preuve que  $\mathbf{B}_k$  est un borélien. Commençons par quelques propriétés générales.

*Pour tout entier  $\ell$ , le  $\ell$ -graphe  $\mathcal{U}^{(\ell)} \subset \Omega^\ell$ , i.e. l'ensemble des  $\ell$ -uplets situés dans une même orbite de  $\mathcal{U}$ , est un borélien. L'image directe d'un borélien contenu dans  $\mathcal{U}^{(\ell)}$ , par la première projection sur  $\Omega$ , est un borélien.*

En effet, fixons  $\ell - 1$  éléments  $h_2, \dots, h_\ell$  de  $F$  et considérons l'ouvert  $W(h_2, \dots, h_\ell)$  des points  $x$  de  $\Omega$  où  $h_2, \dots, h_\ell$  sont définis. Alors  $\mathcal{U}^{(\ell)}$  est la réunion dénombrable, indexée par  $(h_2, \dots, h_\ell)$ , des images des applications continues injectives  $x \in W(h_2, \dots, h_\ell) \mapsto (x, h_2(x), \dots, h_\ell(x)) \in \Omega^\ell$ . En restriction à chacune de ces images, la première projection est un homéomorphisme. L'assertion en résulte.

*La fonction distance  $d_{\mathcal{U}}: \mathcal{U}^{(2)} \rightarrow \mathbf{N}$  est borélienne. L'ensemble des  $x$  de  $\Omega$  tels que  $\overline{\mathcal{U}}(x)$  n'a qu'un bout est un borélien.*

Il suffit de remarquer que  $\overline{\mathcal{U}}(x)$  n'a qu'un bout si et seulement si  $\mathcal{U}(x)$  est infini et si pour tout  $\ell_1$ , il existe  $\ell_2$  tel que deux sommets  $y, z$  de  $\mathcal{U}(x)$  qui sont à distance supérieure à  $\ell_2$  de  $x$  peuvent être joints par un chemin dont tous les sommets sont à distance supérieure à  $\ell_1$  de  $x$ . Ceci décrit l'ensemble en question par intersections et unions dénombrables de boréliens.

Soit  $\Sigma \subset F$  une partie finie connexe (c'est-à-dire qui est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe connexe du graphe de Cayley de  $F$ ).

*L'ensemble des triplets  $(x, y, z) \in \mathcal{U}^{(3)}$  tels que, d'une part  $\Sigma$  est défini en  $x$  et, d'autre part, que  $y$  et  $z$  sont dans la même composante connexe de  $\overline{\mathcal{U}}(x) - \Sigma.x$  est un borélien.*

En combinant les preuves des trois dernières assertions, on obtient:

*L'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathcal{U}^{(2)}$  tels que, d'une part  $\Sigma$  est défini en  $x$ , d'autre part la distance de  $y$  à  $\Sigma.x$  est supérieure à  $k$  et, enfin, la composante connexe de  $\overline{\mathcal{U}}(x) - \Sigma.x$  qui contient  $y$  n'a qu'un bout, est un borélien.*

Considérons la réunion de tous les boréliens ainsi obtenus dans  $\mathcal{U}^{(2)}$  lorsque  $\Sigma$  décrit toutes les parties de  $F$  connexes à moins de  $k$  éléments. C'est un borélien dont la seconde projection dans  $\Omega$  est, par définition, la réunion des domaines des bouts isolés de taille  $k$ . Nous avons bien montré que l'ensemble  $\mathbf{B}_k$  qui était au cœur de la démonstration du théorème B est un borélien.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON, FRANCE

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CANDEL, Uniformization of surface laminations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **26**(1993), 489–516.
- [2] J. CANTWELL and L. CONLON, Leaf prescriptions for closed 3-manifolds, *Trans. AMS* **236**(1978), 239–261.
- [3] ———, Endsets of leaves, *Topology* **21**(1982), 333–352.
- [4] ———, Every surface is a leaf, *Topology* **26**(1987), 265–285.
- [5] D. CASS, Minimal leaves in foliations, *Trans. AMS* **287**(1985), 201–213.
- [6] D. B. A. EPSTEIN, Ends, in *Topology of 3-Manifolds and Related Topics* (1961), 110–117, Prentice Hall.
- [7] L. GARNETT, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, *J. Funct. Anal.* **51**(1983), 285–311.
- [8] G. HECTOR and V. HIRSCH, *Introduction to the Geometry of Foliations*, Parts A, B. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany, 198F.
- [9] S. HURDER and A. KATOK, Ergodic theory and Weil measures for foliations, *Ann. of Math.* **126**(1987), 221–275.
- [10] K. JACOBS, *Lecture Notes on Ergodic Theory*, Aarhus Lecture Notes Series no. 1, part I (1962–63).
- [11] P. MALLIAVIN, *Géométrie Différentielle Stochastique*, Presses de l'Université de Montréal (1978).
- [12] I. RICHARDS, On the classification of noncompact surfaces, *Trans. AMS* **106**(1963), 259–269.
- [13] G. P. SCOTT and C. T. C. WALL, *Topological methods in group theory*, LMS Lecture Notes 36, Cambridge University Press (1979) 137–203.
- [14] J-P. SERRE, *Arbres, Amalgames,  $SL_2$* , Astérisque **46**(1977).
- [15] D. SULLIVAN, Growth of positive harmonic functions and Kleinian group limit sets of zero planar measure and Hausdorff dimension zero, *Springer LNM* **384**(1980), 127–144.
- [16] ———, Bounds, quadratic differentials and renormalization conjectures, *Mathematics of the Twenty-First Century*, vol. 2, AMS Centennial Publications, Providence, RI (1991).
- [17] W. THURSTON, The theory of foliations of codimension greater than one, *Comment. Math. Helv.* **49**(1974), 214–231.

(Received September 27, 1993)