Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

ANALYSE COMPLEXE. — Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan. Note de **Etienne Ghys**, présentée par Alain Connes.

Remise le 19 décembre 1983, acceptée après révision le 27 février 1984.

On étudie la dynamique d'un germe de bijection holomorphe au voisinage d'une courbe de Jordan.

COMPLEX ANALYSIS. — Holomorphic Transformations Around a Jordan Curve.

We study the dynamics of germs of holomorphic bijections around a Jordan curve.

1. Dans la suite, U désignera un voisinage ouvert d'une courbe de Jordan c tracée sur la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ et $F : U \to \mathbb{C}$ sera une transformation holomorphe injective. On suppose que c est invariante par F et que la restriction f de F à c préserve l'orientation de c. On s'intéresse à la dynamique de l'homéomorphisme f.

Le résultat suivant répond à une question de [5].

THÉORÈME 1. — *Avec les notations précédentes, deux cas sont possibles : ou bien f possède un point périodique, ou bien toutes les orbites de f sont denses.*

Démonstration. — On considère une représentation conforme φ du disque unité ouvert $\mathbb{D}^2$ sur une composante connexe Ω de $\overline{\mathbb{C}}-c$. D'après un théorème classique, φ s'étend en un homéomorphisme $\overline{\varphi}$ du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}^2$ sur l'adhérence $\overline{\Omega}=\Omega \cup c$ de Ω. Soit $\tilde{F}=\overline{\varphi}^{-1} \circ F \circ \overline{\varphi}$. L'application $\tilde{F}$ est définie sur un voisinage de $\partial\mathbb{D}^2$ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$ car f préserve l'orientation; elle est holomorphe dans l'intérieur, continue sur $\partial\mathbb{D}^2$ et envoie bijectivement $\partial\mathbb{D}^2$ sur lui-même. D'après le principe de réflexion de Schwarz, $\tilde{F}$ se prolonge en une application holomorphe sur un ouvert contenant $\partial\mathbb{D}^2$ et, en particulier, la restriction $\tilde{f}$ de $\tilde{F}$ à $\partial\mathbb{D}^2$ est $\mathbb{R}$-analytique. En considérant $F^{-1} : F(U) \to U$, on voit que $\tilde{f}$ est un difféomorphisme dont l'inverse est $\tilde{f}^{-1}$. On peut donc appliquer le théorème classique de Denjoy; ou bien $\tilde{f}$ possède un point périodique, ou bien les orbites de $\tilde{f}$ sont denses. On obtient alors le théorème 1 en remarquant que $\tilde{f}$ est topologiquement conjugué à f par l'homéomorphisme $\overline{\varphi}_{|\partial\mathbb{D}^2}$. ■

De même que le théorème de Sacksteder [3] généralise celui de Denjoy, on a le :

THÉORÈME 2. — *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des applications holomorphes injectives définies sur des ouverts U_i de $\overline{\mathbb{C}}$. Soit $\mathcal{P}$ le pseudo-groupe engendré par les restrictions des f_i à des ouverts V_i tels que $\overline{V}_i \subset U_i$. On suppose que $\mathcal{P}$ préserve la courbe de Jordan c et qu'il existe dans c un ensemble de Cantor invariant par $\mathcal{P}$ et minimal pour l'action de $\mathcal{P}$. Alors, il existe un élément γ de $\mathcal{P}$ fixant un point x de cet ensemble de Cantor et tel que $|\gamma'(x)|<1$.*

Idée de démonstration. — De même que dans le théorème 1, on conjugue $\mathcal{P}$ par $\overline{\varphi}$. On obtient encore un pseudo-groupe de transformations analytiques, d'après le principe de réflexion de Schwarz. Le théorème de Sacksteder fournit alors un point fixe hyperbolique pour ce nouveau pseudo-groupe. On montre que le point fixe correspondant de $\mathcal{P}$ est lui aussi hyperbolique. ■

2. Rappelons qu'un réel α satisfait une condition diophantienne s'il existe $\beta \geqq 0$, $c>0$ tels que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait $|\alpha-(p/q)| \geqq cq^{-(2+\beta)}$. Il est clair que si α satisfait une telle condition, il en est de même pour $-\alpha$. Le théorème suivant résout une question posée par M. Herman.

THÉORÈME 3. — *Toujours avec les notations précédentes, on suppose que le nombre de rotation* $\pm\alpha$ *de* f *satisfait une condition diophantienne. Alors* c *est en fait une courbe* $\mathbb{R}$*-analytique et le germe de* F *au voisinage de* c *est holomorphiquement conjugué au germe de la rotation* $R_\alpha(z)=e^{2i\pi\alpha}z$ *au voisinage du cercle unité.*

Démonstration. — Le difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique $\tilde{f}$ tel qu'il a été construit dans la démonstration du théorème 1 a un nombre de rotation égal à $\pm\alpha$ puisque f et $\tilde{f}$ sont topologiquement conjugués. D'après [6] (généralisant [2]), $\tilde{f}$ est $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à une rotation. Par prolongement analytique, le germe de $\tilde{F}$ au voisinage de $\partial\mathbb{D}^2$ est holomorphiquement conjugué à celui de R_α au voisinage de $\partial\mathbb{D}^2$. En particulier, il existe au voisinage A de $\partial\mathbb{D}^2$ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$, homéomorphe à $\mathbb{S}^1\times[0,1[$, contenu dans le domaine de définition de $\tilde{F}$ et invariant par $\tilde{F}$. On procède de même en utilisant l'autre composante Ω_1 de $\overline{\mathbb{C}}-c$. On obtient une représentation conforme φ_1, un prolongement $\overline{\varphi}_1$, une application $\tilde{F}_1$, un difféomorphisme $\tilde{f}_1$ et un voisinage A_1 de $\partial\mathbb{D}^2$ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$ invariant par $\tilde{F}_1$. On considère alors $V=\overline{\varphi}(A)\cup\overline{\varphi}_1(A_1)$. Il est facile de vérifier que V est un voisinage ouvert de c, homéomorphe à un anneau, contenu dans le domaine de définition U de F et invariant par F. Soit Ψ une représentation conforme de V sur un anneau standard $\mathscr{A}=\{z, a<|z|<b\}$. Le conjugué de F par Ψ est un difféomorphisme holomorphe de $\mathscr{A}$, c'est-à-dire une rotation dont l'angle est évidemment $2\pi\alpha$. Puisque les seules courbes invariantes par une rotation irrationnelle sont les cercles concentriques $|z|=\text{Cte}$, on en déduit que $\Psi(c)$ est l'un de ces cercles et donc que c est $\mathbb{R}$-analytique. La représentation Ψ est alors une conjugaison holomorphe entre le germe de F au voisinage de c et le germe de R_α au voisinage d'un cercle. ■

Soit $g(z)=e^{2i\pi\alpha}z+\ldots$ $(\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ une transformation holomorphe définie sur un ouvert W contenant 0 et dont le germe en 0 est linéarisable (tel est le cas si α satisfait une condition diophantienne d'après le théorème de Siegel [4]). Il existe alors un unique ouvert S maximal pour les conditions suivantes : S est un voisinage ouvert connexe contenant 0 et contenu dans W, S est invariant par g et la restriction de g à S est conjuguée à une rotation. Cet ouvert S sera appelé le « domaine maximal de linéarisation de g ».

COROLLAIRE 1. — *Avec les notations décrites ci-dessus, on suppose que* α *satisfait une condition diophantienne et que le bord du domaine maximal de linéarisation* S *de* g *est une courbe de Jordan* c *contenue dans le domaine de définition* W *de* g. *Alors, le bord de* S *contient un point critique de* g.

Démonstration. — Dans le cas contraire, g serait injective au voisinage de c et le nombre de rotation de la restriction de g à c serait α. D'après le théorème 3, il existerait un anneau contenant c et invariant par g, ce qui contredirait le fait que S est le domaine maximal de linéarisation. ■

Une situation un peu plus générale peut être décrite de la façon suivante. Soit G une transformation holomorphe injective définie sur un anneau $\mathscr{A}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,a<|z|<b\}$. On suppose que la restriction de G à un fermé connexe K est une bijection de K et que les composantes Ω_{ext} et Ω_{int} de $\overline{\mathbb{C}}-K$ contenant respectivement les cercles $|z|=b$ et $|z|=a$ sont distinctes. Les ouverts Ω_{ext} et Ω_{int} sont alors $\mathbb{C}$-difféomorphes à $\mathbb{D}^2$. On suppose de plus que $G(\Omega_{\text{int}})\subset\Omega_{\text{int}}$ et $G(\Omega_{\text{ext}})\subset\Omega_{\text{ext}}$. On conjugue alors G par une représentation conforme φ_{ext} (resp. φ_{int}) de $\mathbb{D}^2$ sur Ω_{ext} (resp. Ω_{int}). On obtient ainsi une application $\tilde{G}_{\text{ext}}$ (resp. $\tilde{G}_{\text{int}}$) définie sur un ouvert de $\overline{\mathbb{D}}^2$ contenant $\partial\mathbb{D}^2$ dans sa frontière, et injective au voisinage de $\partial\mathbb{D}^2$. De plus, si une suite z_n converge vers un point de $\partial\mathbb{D}^2$, la suite $\tilde{G}_{\text{ext}}(z_n)$ [resp. $\tilde{G}_{\text{int}}(z_n)$] s'accumule sur $\partial\mathbb{D}^2$. Le principe de réflexion de Schwarz s'applique

une fois de plus et $\tilde{G}_{ext}$ (resp. $\tilde{G}_{int}$) se prolonge à $\partial\mathbb{D}^2$ par un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique $\tilde{g}_{ext}$ (resp. $\tilde{g}_{int}$) de $\partial\mathbb{D}^2$. Le nombre de rotation de $\tilde{g}_{ext}$ (resp. $\tilde{g}_{int}$) est appelé « nombre de rotation extérieur (resp. intérieur) de G ».

THÉORÈME 4. — *Si les nombres de rotations extérieur et intérieur satisfont une condition diophantienne, alors il existe un difféomorphisme holomorphe, défini sur un voisinage de* K, *envoyant* K *sur* $\{z\in\mathbb{C}\,|\,a'\leqq|z|\leqq b'\}$ *avec* $0<a'\leqq b'$ *et conjuguant le germe de* G *au voisinage de* K *à celui d'une rotation.*

Démonstration. — On produit une courbe c_{ext} (resp. c_{int}) de $\mathbb{D}^2$ telle que $c_{ext}\cup\partial\mathbb{D}^2$ (resp. $c_{int}\cup\partial\mathbb{D}^2$) est la frontière d'un anneau contenu dans le domaine de définition de $\tilde{G}_{ext}$ (resp. $\tilde{G}_{int}$) et invariant par $\tilde{G}_{ext}$ (resp. $\tilde{G}_{int}$). La réunion des courbes $\varphi_{ext}(c_{ext})$ et $\varphi_{int}(c_{int})$ est alors la frontière d'un sous-anneau de $\mathscr{A}$ invariant par G. On conclut comme dans le théorème 3. ■

Remarque. — M. Herman a récemment amélioré les théorèmes 3, 4 et le corollaire 1.

3. Nous nous proposons de montrer comment il pourrait être possible de construire un contre-exemple au corollaire 1 lorsque α ne satisfait pas une condition diophantienne. Beurling et Ahlfors caractérisent les homéomorphismes du cercle qui se prolongent en des homéomorphismes quasi conformes du disque (*voir* [1]). Par extension, nous appellerons quasi conformes de tels homéomorphismes du cercle. Les homéomorphismes bilipschitziens sont quasi conformes et les homéomorphismes quasi conformes satisfont une condition de Hölder.

THÉORÈME 5. — *Supposons qu'il existe un difféomorphisme f du cercle,* $\mathbb{R}$*-analytique, qui soit conjugué à une rotation irrationnelle par un homéomorphisme quasi conforme mais non* $\mathbb{R}$*-analytique. (Nous ne savons pas si un tel f existe.) Alors, il existe une fonction holomorphe* $g(z)=e^{2i\pi\alpha}z+\ldots$ *définie au voisinage de 0, localement linéarisable et telle que le bord du domaine maximal de linéarisation est une courbe de Jordan contenue dans le domaine de définition de g et ne contenant aucun point critique de g.*

Démonstration. — Soit h un homéomorphisme quasi conforme de $\partial\mathbb{D}^2$, qui n'est pas $\mathbb{R}$-analytique et tel que $f=h^{-1}\circ R_\alpha\circ h$. Soit H un homéomorphisme quasi conforme du disque prolongeant h. Enfin, soit F l'extension holomorphe de f à un voisinage U de $\partial\mathbb{D}^2$, suffisamment petit pour que F soit injective. On définit alors une transformation continue T sur $U\cup D^2$ de la façon suivante : si $|z|\leqq 1$, alors $T(z)=H^{-1}\circ R_\alpha\circ H(z)$ et si $z\in U$ mais $|z|\geqq 1$, alors $T(z)=F(z)$. Considérons la fonction u, définie presque partout sur $U\cup\mathbb{D}^2$, égale à 0 sur $U-\mathbb{D}^2$ et égale à la dilatation complexe $H_{\bar{z}}/H_z$ de H sur $\mathbb{D}^2$ ([1], p. 5 à 10). La fonction u est mesurable, de norme L^∞ strictement inférieure à 1. D'après le théorème de Ahlfors-Bers-Morrey, [1], il existe un homéomorphisme quasi conforme θ de $\mathbb{D}^2\cup U$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$, dont la dilatation complexe est précisément u. Soit $g=\theta\circ T\circ\theta^{-1}$, alors g est un homéomorphisme quasi conforme dont la dilatation complexe est nulle presque partout dans $\theta(U\cup\mathbb{D}^2)$. C'est donc que g est une fonction holomorphe, définie sur $\theta(U\cup\mathbb{D}^2)$. De plus, g induit un difféomorphisme holomorphe linéarisable sur l'ouvert $\theta(\mathbb{D}^2)$. La transformation g est injective au voisinage de la courbe de Jordan $\theta(\partial\mathbb{D}^2)$. Il reste à montrer que $\theta(\mathbb{D}^2)$ est le domaine maximal de linéarisation de g. Dans le cas contraire, il serait facile de construire un anneau dans $U-\mathbb{D}^2$ contenant $\partial\mathbb{D}^2$ dans son bord, et invariant par F. Ceci impliquerait que f est $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à une rotation, ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

La construction suivante pourrait donner une fraction rationnelle g possédant les mêmes propriétés que celles décrites ci-dessus. Cette construction est elle aussi sujette à l'existence de certains difféomorphismes. On considère une fraction rationnelle du type suivant (*voir* [2], chap. III pour ces exemples) :

$$B(z)=e^{2i\pi\gamma}\frac{z-u_1}{1-\bar{u}_1 z}\cdots\frac{z-u_{n+1}}{1-\bar{u}_{n+1} z}\cdot\frac{1-\bar{v}_1 z}{z-v_1}\cdots\frac{1-\bar{v}_n z}{z-v_n},$$

où $\gamma\in\mathbb{R}$, $n\geqq 1$, $|u_i|<1$, $|v_j|<1$ et $u_i\neq v_j$. Ces fractions rationnelles préservent $\partial\mathbb{D}^2$ et elles y induisent un difféomorphisme de $\partial\mathbb{D}^2$ dès que les u_i et v_j sont suffisamment petits.

THÉORÈME 6. — *Supposons qu'il existe une fraction rationnelle* B *du type précédent telle que la restriction de* B *à* $\partial\mathbb{D}^2$ *soit conjuguée à une rotation irrationnelle par un homéomorphisme quasi conforme mais non* $\mathbb{R}$*-analytique. Alors, il existe une fraction rationnelle* g *possédant un point fixe linéarisable dont le bord du domaine maximal de linéarisation ne contient pas de point critique de* g.

Idée de démonstration. — Soit H un homéomorphisme quasi conforme de $\mathbb{D}^2$ étendant un homéomorphisme h de $\partial\mathbb{D}^2$ conjuguant $B_{|\partial\mathbb{D}^2}$ et R_α. On définit une transformation T de $\overline{\mathbb{C}}$ par $T(z)=B(z)$ si $|z|\geqq 1$ et $T(z)=H^{-1}\circ R_\alpha\circ H(z)$ si $|z|\leqq 1$. On construit alors une forme de Beltrami $u(z)$ mesurable, de norme L^∞ strictement inférieure à 1, invariante par T. Le théorème de Ahlfors-Bers-Morrey permet alors de montrer que T est conjuguée à une fraction rationnelle g qui satisfait les conditions requises. ■

Je remercie D. Sullivan pour ses nombreuses suggestions concernant ce travail.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. AHLFORS, *Lectures on Quasi-Conformal Mappings*, Van Nostrand, 1966.
[2] M. HERMAN, *Pub. Math. I.H.E.S.*, 49, 1979, p. 5-233.
[3] R. SACKSTEDER, *Ann. Math.*, 87, 1965, p. 79-102.
[4] C. SIEGEL, *Ann. Math.*, 43, 1942, p. 607-612.
[5] D. SULLIVAN, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1007, p. 725-752.
[6] J.-C. YOCCOZ, Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation satisfait une condition diophantienne, *Ann. scient. Ec. norm. sup.* (à paraître).

Université des Sciences et Techniques de Lille,
U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées,
E.R.A. au C.N.R.S., n° 07-590, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex.