Sur l'uniformisation des laminations paraboliques

par **Étienne GHYS**

1 Introduction

Dans cet article, nous nous proposons de discuter de la possibilité éventuelle de généraliser les théorèmes fondamentaux d'uniformisation des surfaces de Riemann aux feuilletages et laminations. Nous commençons par rappeler quelques énoncés extrêmement classiques.

Soit g une métrique riemannienne sur une surface orientée connexe S. Au voisinage de chaque point p de S, on peut introduire un système de *coordonnées isothermes*, c'est-à-dire un difféomorphisme *conforme* ϕ d'un voisinage de p sur un ouvert du plan euclidien. Bien entendu, deux tels difféomorphismes ϕ diffèrent par un difféomorphisme conforme d'un ouvert du plan euclidien, c'est-à-dire par un difféomorphisme holomorphe d'un ouvert de $\mathbf{C}$ (si l'on impose à ϕ de respecter l'orientation). Autrement dit, toute métrique riemannienne sur une surface orientée détermine naturellement une structure de *surface de Riemann*.

On sait par ailleurs que toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}}$, au plan complexe $\mathbf{C}$ ou au disque unité ouvert $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}$. Ces trois surfaces de Riemann sont naturellement munies de métriques riemanniennes complètes à courbure constante $+1$, 0 et -1 respectivement.

L'association de ces deux résultats montre que la métrique $\widetilde{g}$ relevée de g au revêtement universel $\widetilde{S}$ de S est *globalement* conforme à une métrique complète à courbure $+1$,0 ou -1. Le groupe fondamental Γ de S opère donc conformément sur $\widehat{\mathbf{C}}, \mathbf{C}$ ou $\mathbf{D}$. Les trois cas, qualifiés respectivement de *elliptique*, *parabolique* et *hyperbolique*, se traitent alors séparément :

Toute bijection holomorphe de $\widehat{\mathbf{C}}$ possède un point fixe de sorte que ce cas ne se présente que lorsque S est simplement connexe.

Les bijections holomorphes de $\mathbf{C}$ sont affines mais seules les translations opèrent sans point fixe. Par conséquent, dans ce cas, Γ doit opérer par translations et, en particulier, par isométries de la métrique euclidienne qui définit donc sur S une métrique plate complète et conforme à g.

Toute bijection holomorphe de $\mathbf{D}$ est une isométrie de la métrique de Poincaré par le lemme de Schwarz. Par conséquent, Γ agit par isométries de la métrique de Poincaré et celle-ci descend donc sur S en une métrique complète conforme à g.

Nous avons donc l'énoncé suivant :

Théorème 1.1 (Gauss-Riemann-Koebe-Poincaré) *Considérons une métrique riemannienne g (de classe C^∞) sur une surface orientée connexe S. Il existe une fonction $u : S \to \mathbf{R}$ (de classe C^∞) telle que la métrique $g' = \exp(u)g$ soit complète à courbure +1, 0 ou –1. Cette fonction u est unique sauf dans le cas parabolique où elle n'est unique qu'à une constante additive près.*

Dans cet article, nous considérons une *lamination* $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont de dimension 2 sur un espace compact M. Rappelons que ces laminations généralisent les feuilletages dans le sens où l'on n'impose aucune structure de variété sur l'espace ambiant. Par définition, M est recouvert par des ouverts U_i (que nous appellerons les *ouverts distingués*) et on dispose d'homéomorphismes h_i de U_i sur $D \times T_i$ où D est un disque dans $\mathbf{R}^2$ et T_i un certain espace topologique. On suppose aussi que les *changements de cartes* $h_{ij} = h_j \circ h_i^{-1}$, sur leur domaine de définition, sont de la forme :

$$h_{ij}(x,t) = (f_{ij}(x,t), \gamma_{ij}(t)).$$

On appelle *plaque* un ensemble de la forme $h_i^{-1}(D \times \{t\})$. Les *feuilles* de $\mathcal{F}$ sont les plus petits ensembles connexes tels que si une plaque les rencontre, elle y est entièrement contenue.

Nous supposerons toujours que la lamination est *lisse*, c'est-à-dire que les $f_{ij}(x,t)$ sont de classe C^∞ en la variable x et que toutes ses dérivées partielles sont continues en t. On suppose aussi que la lamination est orientée, c'est-à-dire que, à t fixé, l'homéomorphisme $f_{ij}(x,t)$ préserve l'orientation.

On dira qu'une fonction $u : M \to \mathbf{R}$ est *lisse* si elle est continue, si les $u \circ h_i^{-1}$ sont de classe C^∞ en la variable x et si ses dérivées partielles sont continues en t.

Il y a de nombreux exemples de laminations. Outre les feuilletages des variétés compactes, on peut considérer la restriction d'un feuilletage à un ensemble compact invariant mais il existe des exemples importants qui ne sont pas plongés naturellement dans une variété (voir par exemple [14]).

Soit g une métrique riemannienne lisse définie le long des feuilles de $\mathcal{F}$. Cela signifie qu'on se donne dans chaque $h_i(U_i)$ une famille de métriques riemanniennes de classe C^∞ sur les plaques $D \times \{t\}$ dépendant continûment du paramètre t, dans la topologie C^∞. On demande bien sûr que ces métriques sont compatibles avec les changements de cartes h_{ij}.

Chaque feuille L de $\mathcal{F}$ est donc munie d'une métrique riemannienne (complète) et on peut donc lui appliquer le théorème 1.1. Nous nous proposons d'étudier le comportement global des diverses fonctions u ainsi définies sur les feuilles.

Remarquons que si g_1 et g_2 sont deux métriques sur M, alors la compacité de M montre que les deux métriques induites sur chaque feuille sont dans un rapport borné, *i.e.* sont Lipschitz équivalentes et, en particulier, sont quasiconformément équivalentes (voir par exemple [2]). Il en résulte qu'elles ont le même type conforme. Ainsi, *le caractère elliptique, parabolique ou hyperbolique d'une feuille ne dépend pas d'un choix de métrique sur M.*

Pour fixer les idées, il est peut-être utile de donner quelques exemples.

D'après le théorème de stabilité de Reeb (légèrement généralisé au cas des laminations), la réunion des feuilles difféomorphes à la sphère S^2 est un ouvert. Un voisinage d'une feuille sphérique est homéomorphe à un produit $S^2 \times T$ par un homéomorphisme envoyant les feuilles sur les sphères $S^2 \times \{t\}$. Une métrique g sur la lamination donne alors lieu à une famille continue g_t de métriques sur S^2 paramétrée par T. Dans ce cas, on a pour chaque t une fonction u_t bien définie telle que $\exp(u_t)g$ soit à courbure $+1$. Il se trouve que la fonction u_t dépend continûment de t, comme il résulte par exemple de [2]. Autrement dit, *les feuilles elliptiques ne posent aucun problème.* En ôtant les feuilles elliptiques à une lamination, on obtient un nouveau compact muni d'une lamination induite. *Nous supposerons donc par la suite qu'aucune des feuilles de $\mathcal{F}$ n'est sphérique.*

Les feuilles d'un feuilletage défini par une action localement libre de $\mathbf{R}^2$ sont bien sûr équipées d'une métrique plate qui dépend continûment du point. On obtient ainsi beaucoup d'exemples de feuilletages paraboliques. On peut aussi vérifier que le feuilletage de Reeb sur la sphère S^3 a toutes ses feuilles paraboliques.

Soit S une surface compacte orientée munie d'une métrique riemannienne à courbure -1 et considérons un homomorphisme de son groupe fondamental dans le groupe des homéomorphismes d'un espace compact T. Par suspension, on construit une lamination $\mathcal{L}$ sur un fibré de fibre T au dessus de S. Chaque feuille est un revêtement de S et on peut donc équiper cette lamination d'une métrique à courbure -1. On obtient ainsi des laminations à feuilles hyperboliques.

Les exemples précédents sont particuliers dans le sens où toutes les feuilles sont du même type. On peut bien sûr obtenir des exemples mixtes en considérant une réunion disjointe mais on peut obtenir des exemples moins triviaux de la manière suivante. Partant d'un feuilletage sont toutes les feuilles sont hyperboliques sur une variété compacte de dimension 3, on introduit une composante de Reeb par le procédé de tourbillonnement bien connu. Les feuilles de la composante de Reeb sont alors paraboliques alors que les feuilles extérieures à cette composante restent hyperboliques, comme on s'en convainc facilement. On peut aussi "faire spiraler" un feuilletage de codimension 1 sur des ensembles plus compliqués mais nous ne connaissons pas d'exemple où le mélange hyperbolique/parabolique soit véritablement plus complexe ; la réunion des feuilles paraboliques est toujours un G_δ au sens de Baire (voir [8]) mais *nous ignorons si elle peut ne pas être fermée.*

Pour contourner cette difficulté, nous *supposerons en fait que toutes les feuilles sont de même type.* Le cas hyperbolique a été résolu par A. Candel dans [5].

Théorème 1.2 (A. Candel) *Soit $(M, \mathcal{F})$ une lamination compacte dont toutes les feuilles sont hyperboliques et soit g une métrique lisse de long des feuilles. Alors, il existe une fonction* **lisse** $u : M \to \mathbf{R}$ *telle que* $\exp(u)g$ *soit à courbure –1.*

Dans cet article, nous abordons l'étude du cas parabolique. Notre premier résultat garantit l'existence d'une solution approchée.

Théorème 1.3 *Soit $(M, \mathcal{F})$ une lamination compacte dont toutes les feuilles sont paraboliques et g une métrique lisse le long des feuilles. Alors, il existe une suite de fonctions lisses $u_n : M \to \mathbf{R}$ telle que la* **forme** *de courbure de* $\exp(u_n)g$ *tende uniformément vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Insistons sur le fait qu'il n'y aurait aucun intérêt à faire tendre la *fonction* courbure vers 0. En multipliant une métrique g par une constante tendant vers l'infini, la courbure tend évidemment vers 0... Cependant, l'élément d'aire est multiplié par le carré de cette constante de sorte que la forme de courbure est préservée ! C'est pour cette raison que le théorème 1.3 considère la forme de courbure.

Il est facile de construire des laminations dont toutes les feuilles sont paraboliques et pour lesquelles il n'existe pas de métrique riemannienne lisse qui soit plate dans les feuilles. L'exemple le plus simple est le feuilletage de Reeb habituel sur la sphère S^3. S'il existait une métrique sur la sphère telle que toutes les feuilles sont plates, les feuilles non compactes seraient isométriques à un plan euclidien. La croissance des aires des boules dans les feuilles non compactes serait donc quadratique ce qui contredit le fait que cette croissance est évidemment linéaire. Cet exemple n'est cependant pas satisfaisant pour deux raisons. La première est que les feuilles ne sont pas denses et il est plus raisonnable de s'intéresser aux laminations minimales, *i.e.* dont toutes les feuilles sont denses. D'autre part, on remarque dans l'exemple du feuilletage de Reeb qu'il existe une métrique riemannienne *mesurable*, lisse dans les feuilles et plate. Cette métrique est en fait continue dans le complémentaire de la feuille compacte et tend vers l'infini lorsqu'on tend vers cette feuille compacte. Nous nous limiterons par la suite aux laminations minimales et nous chercherons des métriques mesurables.

Notre second théorème est un renforcement d'un résultat que nous avions obtenu dans [9].

Théorème 1.4 *Il existe un feuilletage analytique réel $\mathcal{F}$, de dimension 2, sur une variété riemannienne analytique réelle compacte (M, g), tel que :*

- *toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont denses, à croissance polynomiale,*
- *toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont paraboliques,*
- *il n'existe aucune fonction $u : M \to \mathbf{R}$ qui soit* **mesurable** *et différentiable dans les feuilles et telle que* $\exp(u)g$ *soit complète et plate dans les feuilles.*

Dans [9], nous n'avions obtenu que l'inexistence de fonction continue u telle que $\exp(u)g$ soit plate.

Notre troisième résultat est positif. Soit (S, g) une surface parabolique. L'application conforme ρ entre le revêtement universel de S et $\mathbf{C}$ est unique à application affine près de sorte que S est naturellement munie d'une structure affine complexe. Par exemple, si x, y, z sont trois points distincts proches de S, on peut choisir trois relevés proches $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ dans le revêtement universel et le rapport $(\rho(\tilde{x})-\rho(\tilde{y}))/(\rho(\tilde{x})-\rho(\tilde{z})) \in \mathbf{C}$ est indépendant du choix des relevés et du choix de ρ ; nous noterons ce rapport $(x-y)/(x-z)$.

Théorème 1.5 *Soit $(M, \mathcal{F})$ une lamination compacte de dimension 2 dont toutes les feuilles sont paraboliques. Alors, la structure affine des feuilles est continue dans le sens suivant. Soit (x_i, y_i, z_i) $(i \geq 0)$ une suite de triplets de points distincts contenus dans un même ouvert distingué et telle que, pour chaque i, les points x_i, y_i, z_i sont dans la même plaque. On suppose que x_i, y_i, z_i convergent respectivement vers des points distincts $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$ de ce même ouvert distingué. Alors $(x_i-y_i)/(x_i-z_i)$ converge vers $(x_\infty - y_\infty)/(x_\infty - z_\infty)$ lorsque i tend vers l'infini.*

L'exemple le plus simple de feuilletage parabolique est bien sûr un feuilletage $\mathcal{F}$ linéaire de codimension 1 sur le tore $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ de dimension 3. Soit g une métrique lisse le long des feuilles de $\mathcal{F}$. *Nous ignorons s'il est toujours possible de trouver une fonction continue (ou même mesurable) $u : \mathbf{T}^3 \to \mathbf{R}$ telle que $\exp(u)g$ soit complète et plate le long des feuilles.* Le seul résultat que nous ayons dans cette direction est le suivant qui utilise une condition diophantienne que nous décrirons précisément dans le paragraphe 5 :

Théorème 1.6 *Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage linéaire de $\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ d'équation $dz = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ et g une métrique de classe C^∞. Si le sous-groupe de $\mathbf{R}$ engendré par α_1 et α_2 contient un nombre rationnel non nul ou un nombre satisfaisant une condition diophantienne, alors il existe une fonction $u : \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que $\exp(u)g$ soit plate dans les feuilles.*

Enfin, pour terminer cette introduction, signalons un problème qui mériterait probablement une étude détaillée. Soit $(M, \mathcal{F})$ une lamination compacte dont toutes les feuilles sont denses et paraboliques (nous avons vu que ceci ne dépend pas du choix d'une métrique). *Existe-t-il une métrique lisse (ou même mesurable) qui est plate dans les feuilles* ? Cette question est différente de celle étudiée dans cet article car nous n'imposons pas *a priori* la structure conforme sur les feuilles.

Les quatre paragraphes qui suivent démontrent successivement les théorèmes 1.3, 1.4, 1.5, et 1.6. Ils peuvent être lus de manière indépendante.

2 Uniformisation approchée

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.3. Nous fixons donc une lamination compacte $(M, \mathcal{F})$ dont toutes les feuilles sont paraboliques ainsi qu'une métrique lisse g. Rappelons d'abord la définition des *mesures harmoniques*, introduite par L. Garnett dans [7]. On note $\Delta^{\mathcal{F}}$ le *Laplacien feuilleté*, c'est-à-dire l'opérateur qui agit sur l'espace des fonctions lisses $u : M \to \mathbf{R}$ par :

$$\Delta^{\mathcal{F}}(u)(x) = \Delta_{L_x}(u_{|L_x})(x)$$

où L_x est la feuilles qui passe par x et Δ_{L_x} est le Laplacien de la surface L_x équipée de la métrique induite par g. On dit qu'une mesure de probabilité μ sur M est une mesure harmonique si, pour toute fonction lisse u, on a :

$$\int_M u \, d\mu = 0.$$

Il existe toujours de telles mesures et leur caractérisation locale est la suivante. Soit μ une mesure a priori quelconque sur M. Considérons un ouvert distingué U_i et la mesure μ_i sur $D \times T_i$ (image directe de la restriction à U_i de μ par la carte $h_i : U_i \to D \times T_i$). Alors on peut *désintégrer* μ_i c'est-à-dire qu'on peut trouver une mesure ν_i sur T_i et pour ν_i presque tout point t de T_i une mesure ξ_i^t de telle sorte que, pour tout borélien B contenu dans $\mathbf{D} \times T_i$, on ait :

$$\mu_i(B) = \int_{T_i} \int_{\mathbf{D} \times \{t\}} \xi_i^t(B \cap (D \times \{t\})) d\, \nu_i(t).$$

Il se trouve qu'une mesure de probabilité μ est harmonique si et seulement si pour tout i, et pour ν_i presque tout t de T_i, les mesures ξ_i^t sont absolument continues par rapport à l'élément d'aire de la plaque correspondante et possèdent des densités qui sont des fonctions harmoniques sur ces plaques [7]. Les fonctions harmoniques ainsi obtenues sur les plaques ne sont pas nécessairement compatibles sur les intersections des ouverts distingués. Cependant, il est facile de vérifier que sur l'intersection de deux plaques, elles diffèrent d'une *constante* multiplicative. Cela signifie que si μ est une mesure harmonique, on peut construire pour μ presque tout point x de M une fonction harmonique positive sur le revêtement universel de la feuille L_x. Puisque nous supposons que toutes les feuilles sont paraboliques, ces revêtements universels sont conformément équivalents à $\mathbf{C}$ et ces fonctions harmoniques sont donc des constantes. Autrement dit, quitte à multiplier chaque mesure ν_i par une constante, les mesures μ_i s'obtiennent en intégrant l'élément d'aire des plaques contre une mesure transverse ν_i. Il est clair que les mesures ν_i définissent ainsi une mesure transverse invariante, dans le sens de [12]. Résumons notre discussion sous la forme d'un lemme que nous avions déjà remarqué dans [8] :

Lemme 2.1 *Si toutes les feuilles d'une lamination compacte $(M, \mathcal{F})$ sont paraboliques, alors toute mesure harmonique est obtenue en intégrant localement l'élément d'aire contre une mesure transverse invariante.* □

Un théorème de l'indice feuilleté de A. Connes permet de calculer l'intégrale de la courbure d'un feuilletage de dimension 2 par rapport à une mesure transverse invariante. Dans le cas qui nous intéresse, puisqu'il n'y a pas de forme harmonique de carré intégrable non triviale sur les feuilles, on obtient :

Théorème 2.2 (A. Connes [6]) *Soit g une métrique lisse sur une lamination compacte $(M, \mathcal{F})$ de dimension 2 dont toutes les feuilles sont paraboliques. Soit k la courbure des feuilles. Alors, l'intégrale de k par rapport à une mesure obtenue en combinant l'aire des feuilles et une mesure transverse invariante quelconque est nulle.*

Rappelons une formule classique indiquant la manière dont se transforme la courbure en dimension 2 par transformation conforme. Soit g une métrique riemannienne sur une surface, da son élément d'aire et k sa courbure. Si u est une fonction lisse, on considère la métrique $g' = \exp(u)g$, dont l'élément d'aire est $da' = \exp(u)\, da$. La courbure k' est donnée par :

$$k'\, da' = (k - \Delta(u))\, da,$$

où, bien sûr, Δ désigne le Laplacien de g.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.3. Nous fixons donc une lamination compacte $(M, \mathcal{F})$ dont toutes les feuilles sont paraboliques ainsi qu'une métrique lisse g. Soit $k : M \to \mathbf{R}$ la fonction courbure. La formule précédente montre que, pour établir le théorème, il s'agit de trouver une suite de fonctions lisses u_n telle que $\Delta^{\mathcal{F}}(u_n)$ tende uniformément vers k.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace de Banach des fonctions continues sur M et $\mathcal{H}$ le sous-espace des fonctions qui sont de la forme $\Delta^{\mathcal{F}}(u)$ avec u lisse. Par définition les mesures harmoniques sont les éléments du dual topologique de $\mathcal{E}$ qui s'annulent sur $\mathcal{H}$. Le théorème de Hahn-Banach permet donc de conclure qu'un élément est dans l'adhérence de $\mathcal{H}$ si et seulement si il s'annule sur toutes les mesures harmoniques. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\int k\, d\mu$ est nul pour toute mesure harmonique. D'après le lemme 2.1, toutes les mesures harmoniques proviennent d'une mesure transverse invariante et le théorème 2.2 permet donc de conclure.

3 Un feuilletage parabolique non uniformisable

Comme indiqué dans l'introduction, l'exemple que nous allons décrire est le même que celui donné dans [9] mais nous allons établir ici un résultat de non-uniformisation bien plus fort.

On considère tout d'abord les trois sous-groupes à 1 paramètre complexe de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ définis de la manière suivante :

$$d^t = \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \qquad h_+^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h_-^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces groupes à 1-paramètre vérifient :

$$d^t\, h^s_\pm\, d^{-t} = h^{\exp(\pm 2t)s}.$$

Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ dont les feuilles sont les classes à gauche de $\{h^s_+\}$. Ses feuilles donc paramétrées par $\mathbf{C}$ et sont donc équipées d'une métrique plate naturelle. La relation ci-dessus montre que la translation à gauche par d^t préserve globalement les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et opère comme une similitude.

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ tel que le quotient $M = \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})/\Gamma$ soit compact. Il existe bien sûr de nombreux exemples de tels groupes, associés aux variétés hyperboliques réelles de dimension 3. Puisque les translations à droite commutent avec les translations à gauche, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ passe au quotient en un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les orbites de l'action naturelle holomorphe d'un groupe à 1 paramètre complexe que nous notons encore h^s_+ de sorte que toutes les feuilles sont équipées d'une métrique plate. Le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est donc *pas* le contre-exemple cherché !

Nous modifions cet exemple de la manière suivante. On sait qu'il existe des variétés hyperboliques réelles de dimension 3 dont le premier nombre de Betti est non nul. Il existe donc des exemples de groupes Γ possédant un homomorphisme non trivial $c : \Gamma \to \mathbf{Z}$. Soit ϵ un réel positif. On considère l'action à droite de Γ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ définie par :

$$(x,\gamma) \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C}) \times \Gamma \mapsto d^{\epsilon.c(\gamma))}\, x\, \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C}).$$

Il se trouve que si ϵ est assez petit, cette action est libre, propre et co-compacte (voir [9, 10]). On note $M_{\epsilon.c}$ la variété compacte quotient. On remarque que cette nouvelle action préserve encore globalement le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ et définit donc un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{\epsilon.c}$ sur la variété $M_{\epsilon.c}$. Cependant la métrique plate des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ n'est plus préservée et les feuilles de $\mathcal{F}_{\epsilon.c}$ ne sont pas a priori munies d'une métrique plate. Par contre, l'action est conforme dans les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ de sorte que les feuilles de $\mathcal{F}_{\epsilon.c}$ sont naturellement munies d'une structure conforme, qui dépend analytiquement du point dans $M_{\epsilon.c}$. En d'autres termes, il existe une métrique riemannienne analytique réelle g définie le fibré tangent aux feuilles sur $M_{\epsilon.c}$ qui, lorsqu'on la relève à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, et qu'on la restreint à une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$, est conforme à la métrique plate naturelle de cette feuille. Nous allons montrer que c'est effectivement un feuilletage non uniformisable dans le sens où *il n'existe aucune fonction mesurable $u : M \to \mathbf{R}$, différentiable le long des feuilles, telle que la métrique $g' = \exp(u)g$ soit complète et plate dans les feuilles.* Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de cette assertion. Supposons donc par l'absurde qu'il existe une telle fonction u.

Soit $\widetilde{g}'$ le relevé de g' à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$. Sur chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ nous disposons de deux métriques complètes plates dans la même classe conforme : la métrique naturelle donnée par le paramètre s du groupe h^s_+ d'une part, et la métrique induite par $\widetilde{g}'$, d'autre part. Le rapport de ces deux métriques est donc une constante sur chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Ce rapport permet de définir une fonction mesurable ϕ sur l'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Évidemment, cet espace des feuilles est l'espace homogène

$\{h_+^s\}\backslash \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ qui s'identifie à $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$ muni de l'action linéaire de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. Nous disposons donc d'une fonction mesurable :

$$\phi : \mathbf{C}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}_+^*.$$

Exprimons maintenant la condition d'équivariance de ϕ sous l'action de Γ. Par hypothèse, la métrique $\widetilde{g}'$ est invariante sous l'action de Γ alors que la métrique naturelle provenant du paramètre s est multipliée par le facteur $\exp(2\epsilon.c(\gamma))$. En tenant compte de la manière dont Γ agit sur l'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$, on obtient la condition cherchée. Pour tout γ de Γ et tout x de $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$, on a :

$$\phi(\exp(\epsilon.c(\gamma)) \,.\, \gamma(x)) = \exp(2\epsilon.c(\gamma)) \,.\, \phi(x).$$

Nous allons montrer qu'une telle relation est impossible. Nous utiliserons deux faits.

Proposition 3.1 *Soit* $\Gamma_1 \subset \Gamma$ *le noyau du morphisme* c. *Le groupe à 1 paramètre* d^t *opérant à gauche sur* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$ *agit de manière ergodique par rapport à la mesure de Haar (de masse totale infinie). Autrement dit, toute fonction mesurable sur le quotient* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$ *constante sur les orbites de* d^t *est constante presque partout.*

Démonstration Ce n'est qu'une reformulation d'un résultat de Y. Guivarc'h [11]. Rappelons que le flot géodésique d'une variété compacte à courbure négative constante est ergodique par rapport à la mesure de Liouville. Le résultat en question est que le flot géodésique d'un revêtement cyclique (*i.e.* de groupe de Galois $\mathbf{Z}$) d'une variété compacte à courbure -1 est encore ergodique. Interprétons $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ comme le groupe des isométries directes de l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^3$ de dimension 3. Le groupe Γ, s'il est supposé par exemple sans torsion (mais ceci importe peu), est donc (à indice 2 près) le groupe fondamental d'une variété compacte de dimension 3 à courbure -1. De même, Γ_1 est le groupe fondamental d'un revêtement cyclique de cette variété compacte. On remarque par ailleurs que $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ opère librement sur les repères orthonormés directs de $\mathbf{H}^3$ de sorte que l'espace homogène $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$ est le fibré des repères orthonormés de ce revêtement cyclique. Quant à l'espace homogène $\mathrm{U}(2)\backslash \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$, c'est le fibré unitaire tangent de ce revêtement cyclique dont le flot géodésique n'est autre que le flot induit par l'action de d^t (on remarquera que cette action ne dépend que de la partie rélle de t car d^t est dans $\mathrm{U}(2)$ pour t imaginaire pur). Ainsi, le résultat de Guivarc'h donne immédiatement la proposition. □

Proposition 3.2 *Toute fonction mesurable sur* $M_{\epsilon.c}$ *constante sur les feuilles de* $\mathcal{F}_{\epsilon.c}$ *est constante presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue).*

Démonstration C'est un résultat connu de la théorie ergodique du flot horocyclique selon lequel le feuilletage horocyclique d'un flot d'Anosov qui préserve le volume est ergodique par rapport à ce volume, si ce n'est pas une suspension. C'est le théorème 13 de [3]. □

Nous terminons la démonstration du théorème 1.4. Soit ω un nombre complexe non nul. Posons :

$$F_\omega : x \in \mathbf{C}^2 - \{(0,0)\} \longmapsto \phi(\omega.x)/\phi(x) \in \mathbf{R}_+^*.$$

D'après la propriété d'équivariance de ϕ, on obtient que, pour tout γ de Γ et tout x de $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$:

$$F_\omega(\exp(\epsilon.c(\gamma)) \,.\, \gamma(x)) = F_\omega(x).$$

Cela signifie que la fonction sur $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ obtenue en composant la projection de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$ et la fonction F_ω est invariante par l'action de Γ et définit donc une fonction mesurable sur $M_{\epsilon.c}$ constante sur les feuilles de $\mathcal{F}_{\epsilon.c}$. D'après le lemme 3.2, c'est une constante K_ω presque partout. Évidemment, on a pour ω_1, ω_2 dans $\mathbf{C}^*$:

$$K_{\omega_1.\omega_2} = K_{\omega_1}.K_{\omega_2}$$

et il existe donc un réel α tel que, pour tout ω, on ait :

$$K_\omega = |\omega|^\alpha.$$

La fonction sur $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ obtenue en composant la projection de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$ et la fonction ϕ, est invariante par l'action du sous-groupe Γ_1 et définit donc une fonction Φ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$ constante sur les orbites des translations à gauche par h_+^s et qui vérifie pour tout t de $\mathbf{C}$ et x de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$:

$$\Phi(d^t x) = |t|^\alpha \Phi(x).$$

Nous distinguons deux cas.

Supposons d'abord que α soit nul. Alors Φ est invariante par le groupe à 1 paramètre d^t. Le lemme 3.1 permet donc de déduire que la fonction Φ est constante presque partout. Ceci est bien sûr en contradiction avec la formule décrivant le comportement de ϕ sous l'action de Γ (si ϵ est non nul).

Supposons maintenant que α soit non nul. Puisque c est nul sur Γ_1, il est clair que Φ passe au quotient en une fonction encore notée Φ définie sur le quotient M' de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma_1$ par l'action à gauche des d_+^t avec t imaginaire pur (c'est-à-dire de $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$). Sur ce quotient, on dispose d'un flot induit h^t où t est maintenant un nombre réel. Il résulte de 3.1 que ce nouveau flot est ergodique. Puisque α est non nul, la fonction Φ est strictement monotone sur toute orbite de h^s. Plus précisément, si $A < B$ sont deux réels, l'ensemble des points où Φ prend des valeurs comprises entre A et B est un ensemble mesurable errant pour le flot, c'est-à-dire que toute orbite le traverse pendant un intervalle compact de temps. Ceci est évidemment impossible pour un flot ergodique (si la mesure invariante n'est pas concentrée sur une orbite). Cette contradiction termine la démonstration du théorème 1.4.

4 Continuité de la structure affine

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.5 selon lequel la structure affine des feuilles d'une lamination parabolique est continue. Nous fixons donc une lamination $(M, \mathcal{F})$ dont toutes les feuilles sont paraboliques, munie d'une métrique lisse g.

Soit $*$ un point base dans M. Nous notons L_* la feuille qui passe par $*$. Puisque le revêtement universel de L_* est conformément équivalent à la droite complexe, on dispose d'un revêtement conforme $\psi : \mathbf{C} \to L_*$ tel que $\psi(0) = *$. Soit D_n le disque de centre 0 dans $\mathbf{C}$ et de rayon n (entier positif). Puisque D_n est simplement connexe, le disque immergé $\psi(D_n)$ peut se relever dans les feuilles voisines. Cela signifie qu'il existe des homéomorphismes locaux :

$$\Psi_n : D_n \times T_n \longrightarrow M$$

où les T_n forment une famille décroissante de voisinages ouverts d'un point base t_∞ dans un espace T, telles que :

- la restriction de Ψ_n à $D_n \times \{t_\infty\}$ coïncide avec la restriction de ψ à D_n.
- l'image de Ψ_n est un voisinage ouvert de $*$.
- Ψ_n immerge chaque $D_n \times \{t\}$ dans une feuille de $\mathcal{F}$.

Soit ϵ_n une suite de réels positifs tendant vers 0 en décroissant. Quitte à restreindre T_n, on peut toujours supposer que :

• la restriction de Ψ_n à chaque $D_n \times \{t\}$ est une immersion $(1+\epsilon_n)$-quasiconforme dans une feuille de $\mathcal{F}$ (voir [2]).

Nous choisirons cette suite ϵ_n plus loin.

Pour démontrer le théorème, nous commencerons par montrer qu'une application presque conforme du disque est presque affine :

Lemme 4.1 *Soient D^a, D^b, D^c trois (petits) disques fermés disjoints, contenus dans un disque fermé $D \subset \mathbf{C}$ de centre 0. Pour tout réel η strictement positif, il existe ϵ strictement positif tel que si $f : D \to D$ est un homéomorphisme $(1+\epsilon)$-quasiconforme qui fixe l'origine, et si a, b, c sont des points de D^a, D^b, D^c respectivement, alors :*

$$\left| \frac{a-b}{a-c} - \frac{f(a)-f(b)}{f(a)-f(c)} \right| < \eta.$$

Démonstration Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite $f_j (j \geq 0)$ d'homéomorphismes $(1 + 1/j)$-quasiconformes du disque, fixant l'origine, et des points a_j, b_j, c_j dans D^a, D^b, D^c, tels que :

$$\left| \frac{a_j-b_j}{a_j-c_j} - \frac{f_j(a_j)-f_j(b_j)}{f_j(a_j)-f_j(c_j)} \right| > \eta.$$

L'espace des homéomorphismes K-quasiconformes d'un disque qui fixent l'origine est compact [2]. Par conséquent, on peut trouver une sous-suite de f_j qui converge vers un homéomorphisme f_∞ qui est nécessairement 1-quasiconforme (*i.e* holomorphe) et donc une rotation puisque l'origine est fixe. On choisit la sous-suite telle que (a_j, b_j, c_j) convergent vers des points $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$. On a donc :

$$\frac{a_\infty - b_\infty}{a_\infty - c_\infty} = \frac{f_\infty(a_\infty) - f_\infty(b_\infty)}{f_\infty(a_\infty) - f_\infty(c_\infty)}.$$

Cette contradiction termine la démonstration du lemme. □

Nous nous plaçons maintenant dans les hypothèses du théorème 1.5 c'est-à-dire que nous considérons trois suites de points x_i, y_i, z_i (pour $i \geq 0$) dans M telles que :

- tous ces points sont situés dans le même ouvert distingué,
- pour chaque i, les points x_i, y_i, z_i sont dans une même plaque,
- les trois suites x_i, y_i, z_i convergent vers trois points distincts $x_\infty, y_\infty, z_\infty$ situés dans le même ouvert distingué.

Pour chaque i (fini ou ∞), soit $\rho_i : \widetilde{L}_{x_i} \to \mathbf{C}$ un difféomorphisme conforme entre le revêtement universel de la feuille L_{x_i} passant par x_i et $\mathbf{C}$. Puisque les trois points x_i, y_i, z_i sont dans une même plaque, un choix d'un relevé de x_i dans $\widetilde{L}_{x_i}$ détermine un relevé des points y_i, z_i. Nous notons $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i, \widetilde{z}_i)$ trois relevés obtenus ainsi dans $\widetilde{L}_{x_i}$. Notre problème est de montrer que la suite :

$$\frac{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{y}_i)}{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{z}_i)}$$

tend vers :

$$\frac{\rho_\infty(\widetilde{x}_\infty) - \rho_\infty(\widetilde{y}_\infty)}{\rho_\infty(\widetilde{x}_\infty) - \rho_\infty(\widetilde{z}_\infty)}.$$

Construisons une suite d'applications $\Psi_n : D_n \times T_n \to M$ comme précédemment en partant du point base $* = x_\infty$ et pour un certain choix de la suite ϵ_n. On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que les points $x_\infty, y_\infty, z_\infty$ sont suffisamment proches pour être dans $\psi(\mathbf{D})$ (rappelons que $\mathbf{D} = D_1$ est le disque unité). On peut aussi supposer que Ψ_n, restreint à $\mathbf{D} \times T_n$, est un homéomorphisme sur son image. Alors, pour tout n, il existe $i(n)$ tel que pour $i \geq i(n)$, il existe trois points $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{y}_i^n, \mathbf{z}_i^n$ de $\mathbf{D} \subset D_n$ et t_i^n dans T_n tels que :

$$\Psi_n(\mathbf{x}_i^n, t_i^n) = x_i \qquad \Psi_n(\mathbf{y}_i^n, t_i^n) = y_i \qquad \Psi_n(\mathbf{z}_i^n, t_i^n) = z_i.$$

Les suites $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{y}_i^n, \mathbf{z}_i^n$ convergent respectivement vers trois points $\mathbf{x}_\infty, \mathbf{y}_\infty, \mathbf{z}_\infty$ tels que :

$$\Psi_n(\mathbf{x}_\infty, t_\infty) = x_\infty \qquad \Psi_n(\mathbf{y}_\infty, t_\infty) = y_\infty \qquad \Psi_n(\mathbf{z}_\infty, t_\infty) = z_\infty.$$

On remarquera que $\mathbf{x}_\infty, \mathbf{y}_\infty, \mathbf{z}_\infty$ ne dépendent pas de n car ce sont les points de $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ qui se projettent par ψ sur $x_\infty, y_\infty, z_\infty$ (en fait, avec nos conventions, $\mathbf{x}_\infty = 0$

mais cela importe peu). On remarquera aussi que puisque $\psi \circ \rho_\infty : \widetilde{L}_* \to L_*$ est le revêtement universel de L_* :

$$\frac{\rho_\infty(\widetilde{x}_\infty) - \rho_\infty(\widetilde{y}_\infty)}{\rho_\infty(\widetilde{x}_\infty) - \rho_\infty(\widetilde{z}_\infty)} = \frac{\mathbf{x}_\infty - \mathbf{y}_\infty}{\mathbf{x}_\infty - \mathbf{z}_\infty}.$$

Par ailleurs, t_∞ est le point base de T.

Lemme 4.2 *Si on choisit la suite ϵ_n assez petite alors, pour n assez grand, on a, pour i assez grand :*

$$\left| \frac{\mathbf{x}_i^n - \mathbf{y}_i^n}{\mathbf{x}_i^n - \mathbf{z}_i^n} - \frac{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{y}_i)}{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{z}_i)} \right| < 1/n.$$

Démonstration Considérons le disque $D_n \times \{t_i^n\}$ (pour $i \geq i(n)$). Il s'immerge par Ψ_n de manière $(1+\epsilon_n)$-quasiconforme dans la feuille L_{x_i}. Cette immersion se relève en un plongement $(1+\epsilon_n)$-quasiconforme dans $\widetilde{L}_{x_i}$ qui est conformément équivalent, via ρ_i, à $\mathbf{C}$. On obtient ainsi un plongement τ_i^n de D_n dans $\mathbf{C}$ qui envoie évidemment $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{y}_i^n, \mathbf{z}_i^n$ sur $\rho_i(\widetilde{x}_i), \rho_i(\widetilde{y}_i), \rho_i(\widetilde{z}_i)$ respectivement.

Soit h_i^n un biholomorphisme entre D_n et $\tau_i^n(D_n)$ et $f_i^n = (h_i^n)^{-1} \circ \tau_i^n$ de sorte que f_i^n est un homéomorphisme $(1+\epsilon_n)$-quasiconforme de D_n et que $\tau_i^n = h_i^n \circ f_i^n$. On choisit h_i^n pour que f_i^n fixe l'origine.

Puisque les points $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{y}_i^n, \mathbf{z}_i^n$ sont dans des disques disjoints centrés sur $\mathbf{x}_\infty, \mathbf{y}_\infty, \mathbf{z}_\infty$ pour i assez grand, on peut appliquer le lemme 4.1 à f_i^n pour conclure que, si l'on choisit ϵ_n assez petit et n assez grand, on a pour i assez grand :

$$\left| \frac{\mathbf{x}_i^n - \mathbf{y}_i^n}{\mathbf{x}_i^n - \mathbf{z}_i^n} - \frac{f_i^n(\mathbf{x}_i^n) - f_i^n(\mathbf{y}_i^n)}{f_i(\mathbf{x}_i^n) - f_i(\mathbf{z}_i^n)} \right| < 1/2n. \tag{1}$$

On applique alors le théorème de distorsion de Koebe aux applications holomorphes univalentes h_i^n définies sur le disque D_n (voir [13]). Rappelons que ce théorème entraîne en particulier que si h est une fonction holomorphe univalente $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ et si $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sont trois points de $\mathbf{D}$ de modules plus petits que $r < 1$, alors :

$$\left| \frac{h(\zeta_1) - h(\zeta_2)}{h(\zeta_1) - h(\zeta_3)} - \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_3} \right| < A(r) \tag{2}$$

où $A(r)$ est une fonction universelle qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Appliquons cette inégalité aux trois points $f_i^n(\mathbf{x}_i^n), f_i^n(\mathbf{y}_i^n), f_i^n(\mathbf{z}_i^n)$ du disque D_n et aux applications holomorphes univalentes h_i^n définies sur D_n.

Estimons les modules de $f_i^n(\mathbf{x}_i^n), f_i^n(\mathbf{y}_i^n), f_i^n(\mathbf{z}_i^n)$. Rappelons que le théorème de Mori montre que si f est un homéomorphisme K-quasiconforme de $\mathbf{D}$ qui fixe 0, on a $|f(\zeta)| \leq 16|\zeta|^{1/K}$ (voir [2]). Comme les points $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{y}_i^n, \mathbf{z}_i^n$ sont dans le cercle unité, il en résulte immédiatement que les modules de $f_i^n(\mathbf{x}_i^n), f_i^n(\mathbf{y}_i^n), f_i^n(\mathbf{z}_i^n)$ sont inférieurs ou égaux à $16n(\frac{1}{n})^{1/(1+\epsilon_n)}$. Les modules des points $\frac{1}{n}h_i^n(\mathbf{x}_i^n)$, $\frac{1}{n}h_i^n(\mathbf{y}_i^n)$, $\frac{1}{n}h_i^n(\mathbf{z}_i^n)$ du disque unité $\mathbf{D} = \frac{1}{n}D_n$ tendent donc vers 0 si n tend vers l'infini.

Normalisons le domaine de définition de h_i^n par une homothétie de rapport n pour se ramener au cas des fonctions univalentes sur le disque unité. Puisque nous avons vu que $\tau_i^n(\mathbf{x}_i^n) = h_i^n \circ f_i^n(\mathbf{x}_i^n) = \rho_i(\widetilde{x}_i)$, les inégalités de Koebe (2) montrent donc que si n est assez grand, on a pour i assez grand :

$$\left| \frac{f_i^n(\mathbf{x}_i^n) - f_i^n(\mathbf{y}_i^n)}{f_i^n(\mathbf{x}_i^n) - f_i^n(\mathbf{z}_i^n)} - \frac{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{y}_i)}{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{z}_i)} \right| < 1/2n. \tag{3}$$

Les formules (1) et (3) terminent la démonstration du lemme. □

La démonstration du théorème est maintenant évidente : il suffit de faire tendre i vers l'infini puis n vers l'infini dans pour obtenir que :

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{y}_i)}{\rho_i(\widetilde{x}_i) - \rho_i(\widetilde{z}_i)} = \frac{\mathbf{x}_\infty - \mathbf{y}_\infty}{\mathbf{x}_\infty - \mathbf{z}_\infty} = \frac{\rho_\infty(\widetilde{x}_\infty) - \rho_\infty(\widetilde{y}_\infty)}{\rho_\infty(\widetilde{x}_\infty) - \rho_\infty(\widetilde{z}_\infty)}.$$

5 Le cas des feuilletages linéaires des tores

Nous démontrons ici le théorème 1.6. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage linéaire du tore $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ d'équation $dz = \alpha_1\, dx + \alpha_2\, dy$ (où (x, y, z) désignent les coordonnées de $\mathbf{R}^3$) et soit g une métrique de classe C^∞ sur $\mathbf{T}^3$. On peut envisager $\mathcal{F}$ comme le quotient de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, feuilleté par plans $\mathbf{R}^2 \times \{*\}$, par le groupe engendré par les deux difféomorphismes commutant :

$$T_1 : (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (x + 1, y, z + \alpha_1) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z},$$

$$T_2 : (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (x, y + 1, z + \alpha_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Pour chaque $z \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, le plan $\mathbf{R}^2 \times \{z\}$ est muni de la métrique $\widetilde{g}_z$ obtenue par relèvement de g. Il existe un unique difféomorphisme conforme ψ_z de $(\mathbf{R}^2 \times \{z\}, \widetilde{g}_z)$ sur le plan complexe $\mathbf{C}$ qui envoie les points $(0, 0, z)$ et $(0, 1, z)$ sur 0 et 1 respectivement. Puisque nous supposons que la métrique g est de classe C^∞, la métrique $\widetilde{g}_z$ dépend de z de manière C^∞. La version à paramètres du théorème d'uniformisation donnée dans [1, 2] montre que la bijection :

$$F : (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (\psi_z(x, y), z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞

Puisque T_1 et T_2 opèrent par isométries de $\widetilde{g}$, leurs conjugués par F doivent opérer conformément sur les $\mathbf{C} \times \{*\}$. Autrement dit, $T_1' = F \circ T_1 \circ F^{-1}$ s'écrit :

$$T_1'(\zeta, z) = (a_1'(z)\zeta + b_1'(z), z + \alpha_1).$$

où les fonctions $a_1', b_1' : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}^*$ sont de classe C^∞.

Étudions d'abord le cas où α_1 est nul.

Alors, puisque T_1' opère librement sur $\mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on constate que $a_1'(z)$ doit être identiquement égal à 1 de sorte que T_1' opère sur chaque $\mathbf{C} \times \{z\}$ comme une translation non triviale d'amplitude $b_1'(z)$. Conjuguons T_1' par :

$$G : (\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (b_1'^{-1}(z)\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

On obtient :

$$T_1'' = G \circ T_1' \circ G^{-1} : (\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (\zeta + 1, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Cherchons maintenant $T_2'' = (G \circ F) \circ T_2 \circ (G \circ F)^{-1}$ sous la forme :

$$T_2''(\zeta, z) = (a_2''(z)\zeta + b_2''(z), z + \alpha_2).$$

La condition de commutation entre T_1'' et T_2'' s'écrit :

$$a_2''(z) = 1$$

c'est-à-dire que T_2'' opère aussi par translations. Cela signifie que la métrique obtenue en transportant la métrique euclidienne de $\mathbf{C} \times \{*\}$ par $(G \circ F)^{-1}$ est invariante par T_1 et T_2 simultanément et passe donc au quotient sur le tore $\mathbf{T}^3$. La métrique ainsi obtenue sur $\mathbf{T}^3$ est lisse, plate dans les feuilles, et conforme à g. Le théorème 1.6 est donc établi dans le cas particulier où $\alpha_1 = 0$.

Plus généralement, supposons que le sous-groupe de $\mathbf{R}$ engendré par α_1, α_2 et 1 soit de rang inférieur ou égal à 2. Alors les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ sont toutes des cylindres ou toutes des tores. En transformant le feuilletage par un difféomorphisme linéaire de $\mathbf{T}^3$ convenable, on se ramène au cas que nous venons d'étudier où $\alpha_1 = 0$ et le théorème 1.6 est donc aussi établi dans ce cas.

Nous abordons maintenant le cas plus intéressant où α_1 satisfait une condition diophantienne du type suivant ; on suppose qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\epsilon > 0$ telles que, pour tous les entiers (p, q) avec $q > 0$, on ait :

$$\left|\alpha_1 - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\epsilon}}.$$

Le proposition suivante est bien connue ; elle est le résultat le plus élémentaire de la théorie des petits dénominateurs (voir par exemple [4]). Elle se démontre simplement en évaluant les coefficients de Fourier et en majorant grâce à l'estimation diophantienne.

Proposition 5.1 *Si α_1 satisfait une condition diophantienne du type précédent, pour toute fonction $v : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ il existe une constante $\overline{v}$ et une fonction $w : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que :*

$$v(z) = w(z + \alpha_1) - w(z) + \overline{v}.$$

Reprenons l'étude de :

$$T_1'(\zeta, z) = (a_1'(z)\zeta + b_1'(z), z + \alpha_1).$$

Appliquons la proposition 5.1 à la fonction $v(z) = \ln |a_1(z)|$. Il existe donc une fonction $w : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ et une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation homologique :

$$|\exp(w(z + \alpha_1) \exp(-z)| = k|a_1(z)|.$$

Alors, on peut considérer le difféomorphisme :

$$G : (\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (\exp(-v(z))\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

En posant alors $T_1'' = (G \circ F) \circ T_1 \circ (G \circ F)^{-1}$, on obtient :

$$T_1'' : (\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (a_1''(z)\zeta + b_1''(z), z + \alpha_1) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

avec :

$$|a_1''(z)| = k.$$

Nous affirmons que $k = 1$. Ceci pourrait se déduire du théorème 1.3 mais c'est élémentaire dans ce cas. En effet, notons b_1'' une borne supérieure du module de $b_1''(z)$. Alors, on vérifie par récurrence que la n-ème puissance de T_1'' vérifie pour $n > 0$:

$$T_1''^n(0, 0) = (\zeta_n, z + n\alpha_1)$$

avec :

$$|\zeta_n| \leq b_1''(1 + k + \cdots + k^{n-1})$$

Supposons que $k < 1$ par exemple. Alors la formule précédente montre que les points $T_1''^n(0, 0)$ restent dans un compact de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Ceci est impossible car le groupe abélien engendré par T_1 et T_2 agit proprement sur $\mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. On montre de même que k ne peut pas non plus être strictement supérieur à 1 en considérant les itérés négatifs de T_1''. Nous avons donc bien montré que $k = 1$.

Autrement dit T_1'' opère par isométries dans les $\mathbf{C} \times \{*\}$. Posons alors $T_2'' = (G \circ F) \circ T_2 \circ (G \circ F)^{-1}$. Nous affirmons que T_2'' opère nécessairement lui aussi par isométries. En effet, écrivons T_2'' sous la forme :

$$T_2'' : (\zeta, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longmapsto (a_2''(z)\zeta + b_2''(z), z + \alpha_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Écrivons la relation de commutation entre T_1'' et T_2''. On obtient :

$$a_1''(z)a_2''(z + \alpha_1) = a_2''(z)a_1''(z + \alpha_2)$$

$$a_1''(z + \alpha_2)b_2''(z) + b_1''(z + \alpha_2) = a_2''(z + \alpha_1)b_1''(z) + b_2''(z + \alpha_1).$$

L'irrationalité de α_1 et le fait que le module de $a_1''(z)$ soit égal à 1 montrent donc que $a_2''(z)$ est de module constant. Exactement comme nous avons montré plus haut que $k = 1$, on montre ici que le module de $a_2''(z)$ est en fait 1.

En résumé, nous avons montré que si l'on conjugue simultanément T_1 et T_2 par $G\circ F$, on obtient des difféomorphismes qui opèrent isométriquement dans les $\mathbf{C}\times\{*\}$. Autrement dit, la métrique euclidienne des droites complexes $\mathbf{C}\times\{*\}$ est invariante par T_1'' et T_2''. Cette métrique euclidienne, transportée par $G\circ F$, passe donc au quotient dans le tore $\mathbf{T}^3$. Nous avons bien obtenu une métrique lisse, plate dans les feuilles et conforme à g, comme affirmé.

Lorsque le groupe engendré par α_1, α_2 et 1 contient un nombre satisfaisant une condition diophantienne, on se ramène par changement de base dans le réseau $\mathbf{Z}^3$ au cas où α_1 satisfait une condition diophantienne. Puisque nous venons d'étudier ce cas, ceci termine la preuve du théorème 1.6.

Bibliographie

[1] Abikhof, W.: *Real analytic theory of Teichmüller space*, Lecture Notes in Mathematics **820**, Springer Verlag, (1980).

[2] Ahlfors, L.: *Lectures on quasiconformal mappings*, Wadsworth (1987).

[3] Anosov, D.V.: *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, AMS (1969), Proceeds. Steklov Inst. **90**.

[4] Arnold, V.: *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, MIR (1980).

[5] Candel, A.: Uniformization of surface laminations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup*, **26** (1988) 489-516,.

[6] Connes, A.: A survey of foliations and operator algebras, *Proceed. of Symp. in Pure Math.* vol **38** (1982).

[7] Garnett, L.: Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, *J. Func. Anal.* **51** (1983) 285-311.

[8] Ghys, E.: Gauss Bonnet theorem for 2-dimensional foliations, *J. Func. Anal.* **77** (1988) 51-59.

[9] Ghys, E.: Holomorphic Anosov Systems, *Inventiones Math.* **119** (1995) 585-614.

[10] Ghys, E.: Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, à paraître dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

[11] Guivarc'h, Y.: Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes dynamiques fibrés, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **9** (1989) 433-453.

[12] Plante, J.: Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* **102** (1975) 327-361.

[13] Pommerenke: *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).

[14] Sullivan, D.: Bounds, quadratic differentials and renormalization conjectures, *Mathematics of the twenty-first century*, vol **2**, AMS Centennial Publications, Providence, RI (1991).

Juin 1995

Unité de Mathématiques
Pures et Appliquées
de l'ENS Lyon
U.M.R. 128 du CNRS

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 FRANCE

ghys@umpa.ens-lyon.fr