

# *Géodésiques dans les surfaces browniennes*

Jérémie BETTINELLI

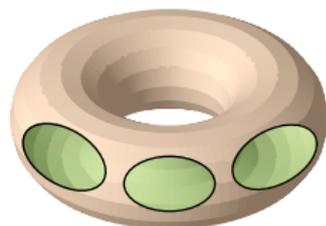
*14 mars 2014*



## Surfaces à bord

### Définition

On note  $\Sigma_{g,p}^{\partial}$  la surface à bord obtenue en retirant  $p$  disques ouverts de la somme connexe de  $g$  tores.



### Théoreme (de classification des surfaces)

*Toute surface à bord compacte, connexe et orientable est homéomorphe à un unique  $\Sigma_{g,p}^{\partial}$ .*

## Cartes à bord

### Définition

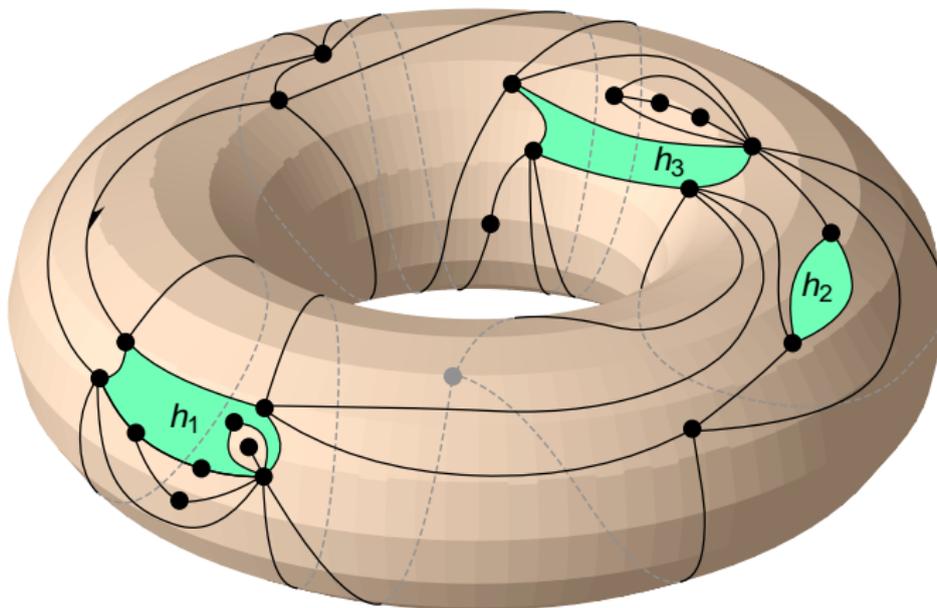
Une **quadrangulation à  $p$  trous** est une carte enracinée **bipartie** ayant  $p$  faces distinguées  $h_1, \dots, h_p$  et dont toutes les autres faces sont de degré 4.

On fixe le genre  $g$  et on se donne un  $p$ -uplet  $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ . On note  $\mathcal{Q}_{n,\sigma}$  l'ensemble des quadrangulations à  $p$  trous de genre  $g$  ayant  $n$  faces internes et étant telles que  $h_i$  soit de degré  $2\sigma^i$ , pour  $1 \leq i \leq p$ .

### Remarque

A priori, une quadrangulation à  $p$  trous de genre  $g$  est plongée sur  $\Sigma_{g,0}^\partial$  et non sur  $\Sigma_{g,p}^\partial$ .

# Exemple : element de $\mathcal{Q}_{19,(4,1,2)}$ en genre 1



## Existence de limites d'échelle

- ◆ On note  $V(m)$  l'ensemble des sommets d'une carte  $m$  et  $d_m$  sa distance de graphe.
- ◆ On se place en genre  $g$  fixé.

**Théoreme (Le Gall '07  $[(g, p) = (0, 0)]$ , B. '14  $[(g, p) \neq (0, 0)]$ )**

*Soient  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma_\infty^1, \dots, \sigma_\infty^p > 0$  et  $\sigma_n = (\sigma_n^1, \dots, \sigma_n^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$  une suite telle que  $\sigma_n^i / \sqrt{2n} \rightarrow \sigma_\infty^i$  pour  $1 \leq i \leq p$ , et  $q_n$  uniforme sur  $\mathcal{Q}_{n, \sigma_n}$ .*

*De toute suite croissante d'entiers, on peut extraire une sous-suite  $(n_k)_{k \geq 0}$  pour laquelle il existe un espace métrique aléatoire  $(q_\infty^\sigma, d_\infty^\sigma)$  tel que, pour la topologie de Gromov–Hausdorff,*

$$\left( V(q_{n_k}), \left( \frac{9}{8n_k} \right)^{1/4} d_{q_{n_k}} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(d)} (q_\infty^\sigma, d_\infty^\sigma).$$

## Existence de limites d'échelle

- ◆ On note  $V(m)$  l'ensemble des sommets d'une carte  $m$  et  $d_m$  sa distance de graphe.
- ◆ On se place en genre  $g$  fixé.

### Conjecture

Soient  $0 \leq p' \leq p$ ,  $\sigma_\infty^1, \dots, \sigma_\infty^{p'} > 0$  et  $\sigma_\infty^{p'+1} = 0, \dots, \sigma_\infty^p = 0$ . Soient de plus  $\sigma_n = (\sigma_n^1, \dots, \sigma_n^p) \in (\mathbb{N}^*)^p$  une suite telle que  $\sigma_n^i / \sqrt{2n} \rightarrow \sigma_\infty^i$  pour  $1 \leq i \leq p$  et  $q_n$  uniforme sur  $\mathcal{Q}_{n, \sigma_n}$ .

On a la convergence suivante, au sens de la topologie de  $G-H$  :

$$\left( V(q_n), \left( \frac{9}{8n} \right)^{1/4} d_{q_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (q_\infty^{\sigma'}, d_\infty^{\sigma'}),$$

où  $(q_\infty^{\sigma'}, d_\infty^{\sigma'})$  ne dépend que de  $\sigma_\infty^1, \dots, \sigma_\infty^{p'}$ .

# Topologie et dimension des surfaces browniennes

## Définition

On appelle **surface brownienne** n'importe quel espace métrique obtenu par le théorème précédent.

## Théoreme

*Toute surface brownienne est p.s. homéomorphe à la surface à bord  $\Sigma_{g,p}^{\partial}$ , où  $g$  et  $p$  sont les entiers du transparent précédent.*

## Théoreme

*Toute surface brownienne a p.s. pour dimension de Hausdorff 4. De plus, chaque composante connexe du bord est p.s. de dimension de Hausdorff 2.*

## Construction : schémas

### Définition

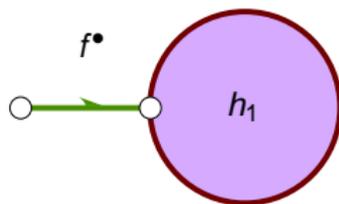
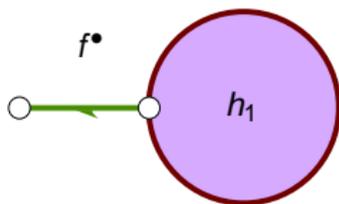
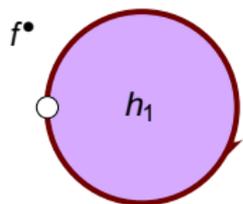
Un **schéma à  $p$  trous** est une carte de genre  $g$  à  $p + 1$  faces notées  $h_1, \dots, h_p, f^\bullet$ , dont la racine n'est incidente à aucun  $h_j$ , et qui satisfait les conditions suivantes :

- ✦ pour tout  $i$ ,  $h_i$  a une frontière simple et n'est adjacent à aucun  $h_j$  ;
- ✦ il ne peut y avoir qu'un sommet de degré  $\leq 2$ . S'il est de degré 1, c'est une extrémité de la racine, s'il est de degré 2, c'est l'origine de la racine.

### Définition

Un schéma est **dominant** s'il a un sommet de degré 1 et tous ses autres sommets ont degré 3.

# Exemples



Les schémas à 1 trou en genre 0. Les deux de droite sont dominants.

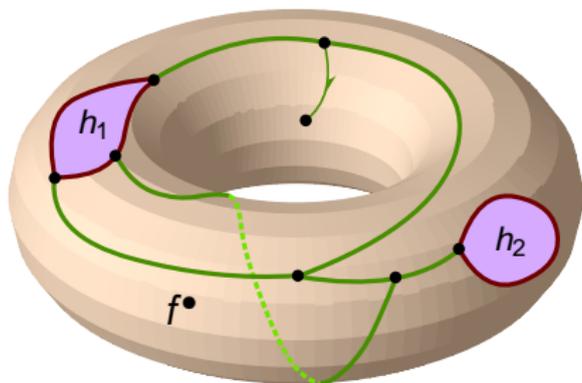


Schéma dominant  
à 2 trou en genre 1.

## Construction $((g, p) \neq (0, 0))$

De façon informelle, toute surface brownienne peut être construite comme suit.

- ◆ On tire suivant une certaine loi (explicite) un schéma dominant et des réels :
  - une **position**  $I^v$  pour chaque sommet  $v$ ,
  - une **longueur**  $\xi^e$  pour chaque arête  $e$ ,
  - une **masse**  $m^e$  pour chaque demi-arête  $e$  non incidente à un trou.
- ◆ Pour chaque arête  $e$ , on tire un pont brownien de longueur  $\xi^e$  allant de  $I^{e-}$  à  $I^{e+}$  **multiplié par  $\sqrt{3}$  si  $e$  est incidente à un trou.**
- ◆ Pour chaque demi-arête  $e$  non incidente à un trou, on tire une forêt brownienne de longueur  $\xi^{\{e, \bar{e}\}}$  et masse  $m^e$ .
- ◆ On « colle » le tout selon la structure du schéma : on obtient une « carte continue »  $\mathcal{M}$  munie d'étiquettes continues  $\mathfrak{L}$ .
- ◆ On quotienté avec des identifications « à la Schaeffer ».

# Espaces géodésiques

## Définition

Dans un espace métrique compact  $(\mathcal{X}, \delta)$ , une **géodésique** de  $x \in \mathcal{X}$  à  $y \in \mathcal{X}$  est un chemin continu  $\varphi : [0, \delta(x, y)] \rightarrow \mathcal{X}$  tel que  $\varphi(0) = x$ ,  $\varphi(\delta(x, y)) = y$  et  $\delta(\varphi(s), \varphi(t)) = |t - s|$  pour tout  $s, t \in [0, \delta(x, y)]$ .

## Définition

Un **espace géodésique** est un espace métrique compact dans lequel toute paire de points est connectée par (au moins) une géodésique.

## Proposition

*Toute surface brownienne est p.s. un espace géodésique.*

## Concaténations de géodésiques non homotopes à 0

On fixe une surface brownienne  $(q_\infty^\sigma, d_\infty^\sigma)$ . Comme pour la carte brownienne, on a un point distingué «  $\rho^\bullet = \operatorname{argmin} \mathcal{L}$  ».

On note  $\mathcal{N}(\rho^\bullet, q_\infty^\sigma)$  l'ensemble des points  $x \in q_\infty^\sigma$  pour lesquels il existe au moins une paire  $\{\wp, \wp'\}$  de géodésiques de  $\rho^\bullet$  à  $x$  telle que  $\wp \bullet \bar{\wp}'$  n'est pas homotope à 0.

### Théoreme

*Sauf pour les cas de la sphère et du disque  $((g, p) = (0, 0)$  et  $(g, p) = (0, 1)$ ),  $\mathcal{N}(\rho^\bullet, q_\infty^\sigma)$  est p.s. de dimension de Hausdorff 2.*

### Proposition

*$\mathcal{N}(\rho^\bullet, q_\infty^\sigma)$  correspond à l'union des arêtes du schéma non incidentes aux trous et différentes de la racine.*

# Nombre de géodésiques

## Définition

L'ordre d'un point  $a \in \mathcal{M}$  est le nombre maximal de composantes connexes de  $\mathcal{M} \setminus \{a\}$  restreint aux voisinages de  $a$ .

On note  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{q}_\infty^\sigma$  la projection canonique.

## Théoreme

*P.s., pour tout  $a \in \mathcal{M}$ , le nombre de géodésiques de  $\rho^\bullet$  à  $\pi(a)$  est égal à l'ordre de  $a$  moins  $\mathbb{1}_{\{\pi(a) \in \partial \mathfrak{q}_\infty^\sigma\}}$ .*

*En particulier, ce nombre est typiquement 1, au plus 2 pour les points de la frontière et au plus 3 pour les points intérieurs.*

# Caractérisations géométriques

## Théoreme

*L'ensemble des points atteignables par 3 géodésiques telles que, pour toute paire  $\{\varphi, \varphi'\}$  de géodésiques,  $\varphi \bullet \bar{\varphi}'$  n'est pas homotope à 0 est fini. Son cardinal  $H$  est :*

- ◆ égal à 0 si  $g = 0$  et  $p \in \{0, 1\}$  ;*
- ◆ égal à  $4g - 2$  si  $g \geq 1$  et  $p = 0$  ;*
- ◆ une v.a. dont la loi ne dépend que de  $g, p$  et  $\sigma$  et dont le support est  $\{0, 1, \dots, 4g + p - 2\}$  sinon.*

## Proposition

*Les points précédents correspondent aux sommets du schéma qui sont incidents ni à la racine, ni aux trous.*

## Confluence des géodésiques

### Théoreme

*On suppose  $p \neq 0$ . L'ensemble  $\partial \mathfrak{q}_\infty^\sigma \cap \mathcal{N}(\rho^\bullet, \mathfrak{q}_\infty^\sigma)$  est fini : son cardinal est  $4g + 2p - 2 - H$ .*

### Proposition

*L'ensemble précédent correspond aux sommets du schéma qui sont incidents aux trous sans être incident à la racine.*

# Confluence des géodésiques

## Théoreme

*On suppose  $p \neq 0$ . L'ensemble  $\partial q_\infty^\sigma \cap \mathcal{N}(\rho^\bullet, q_\infty^\sigma)$  est fini : son cardinal est  $4g + 2p - 2 - H$ .*

## Proposition

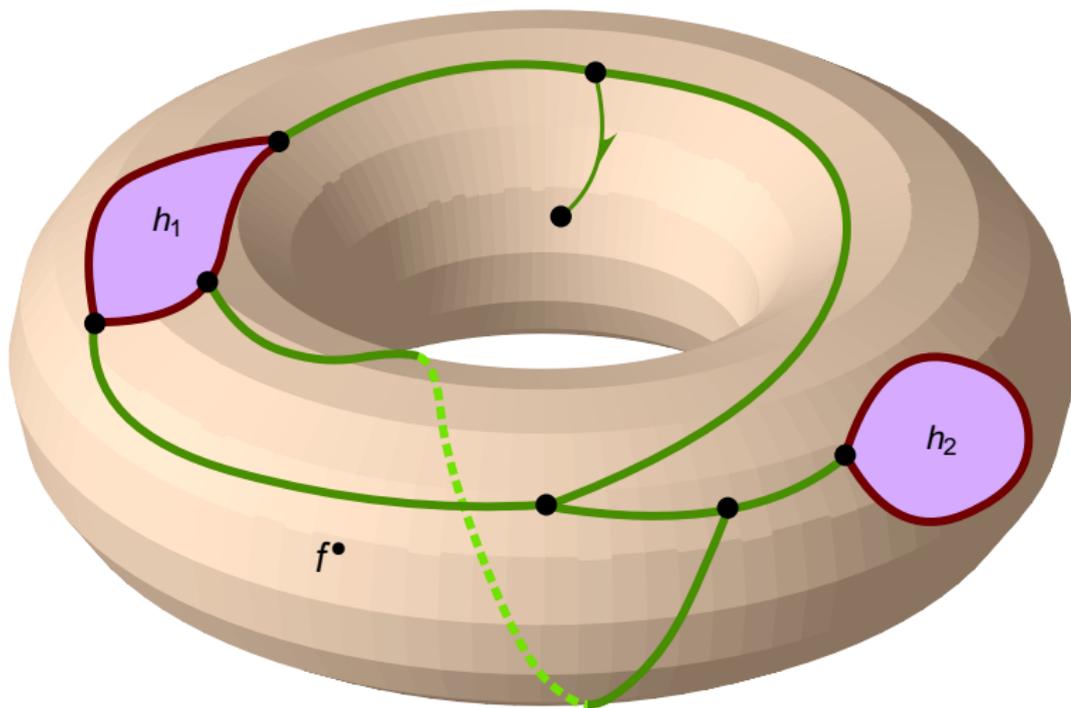
*L'ensemble précédent correspond aux sommets du schéma qui sont incidents aux trous sans être incident à la racine.*

On étend la proposition Le Gall '10 sur la confluence des géodésiques dans la carte brownienne à toute surface brownienne.

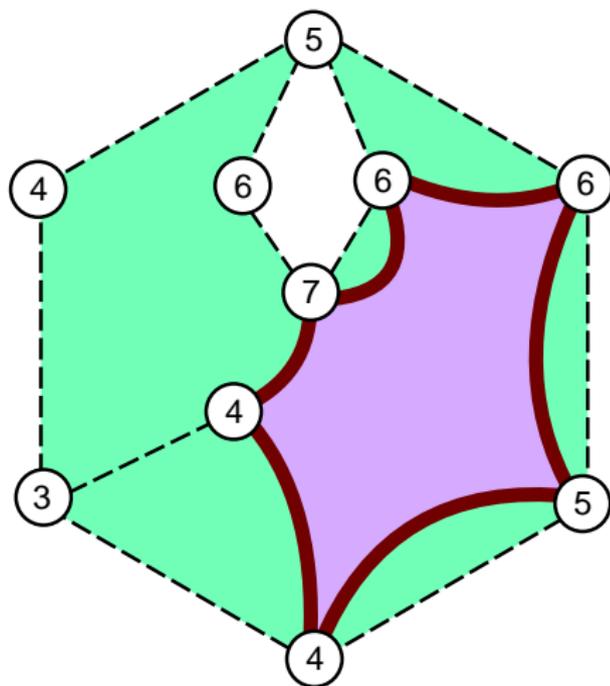
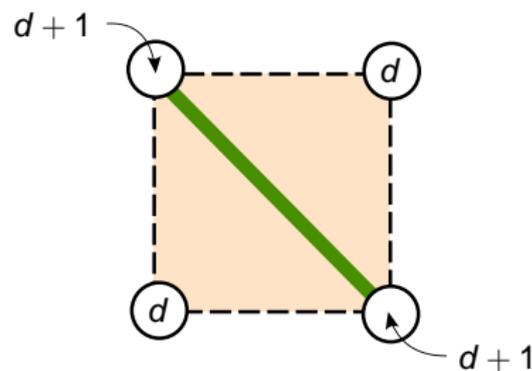
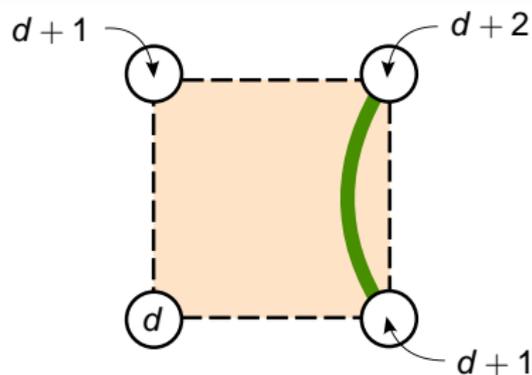
## Proposition

*P.s., pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta \in ]0, \varepsilon[$  telle que toutes les géodésiques de  $\rho^\bullet$  aux points en dehors de la boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $\rho^\bullet$  partagent une partie initiale commune de longueur  $\eta$ .*

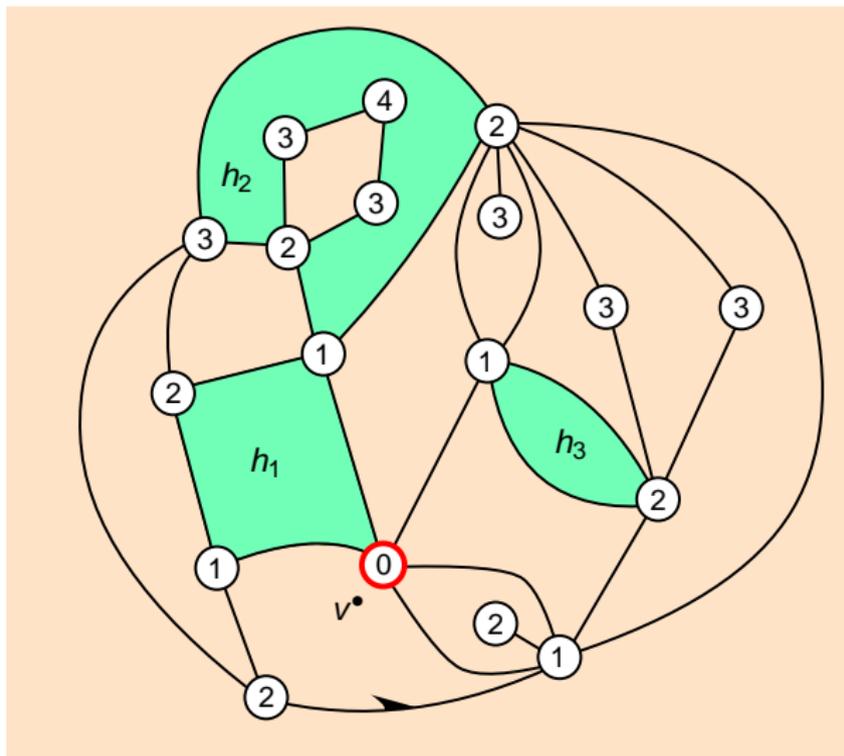
# Récapitulatif



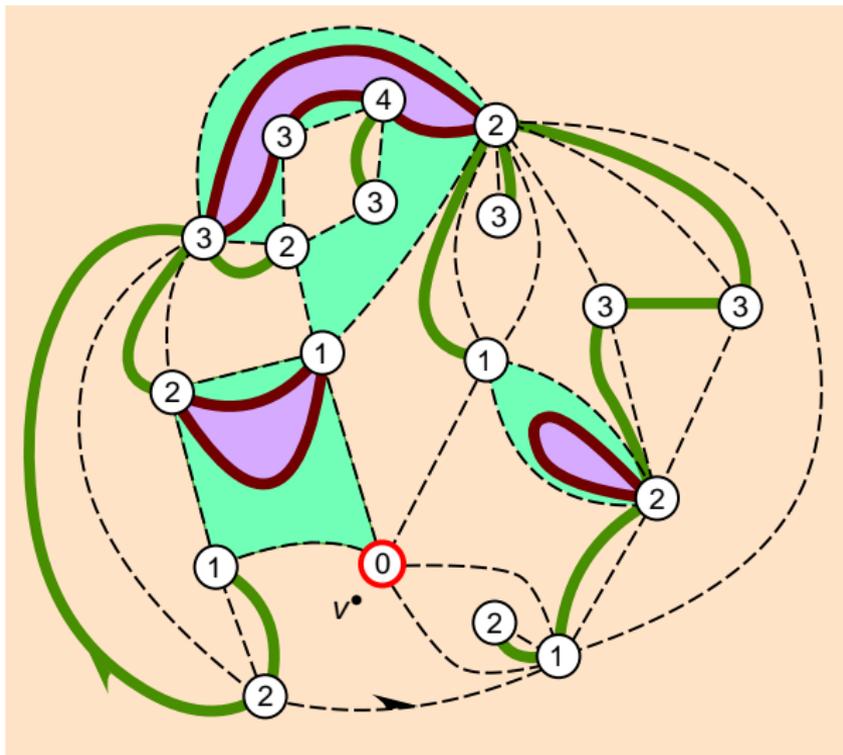
# Bouttier–Di Francesco–Guitter à peine modifié



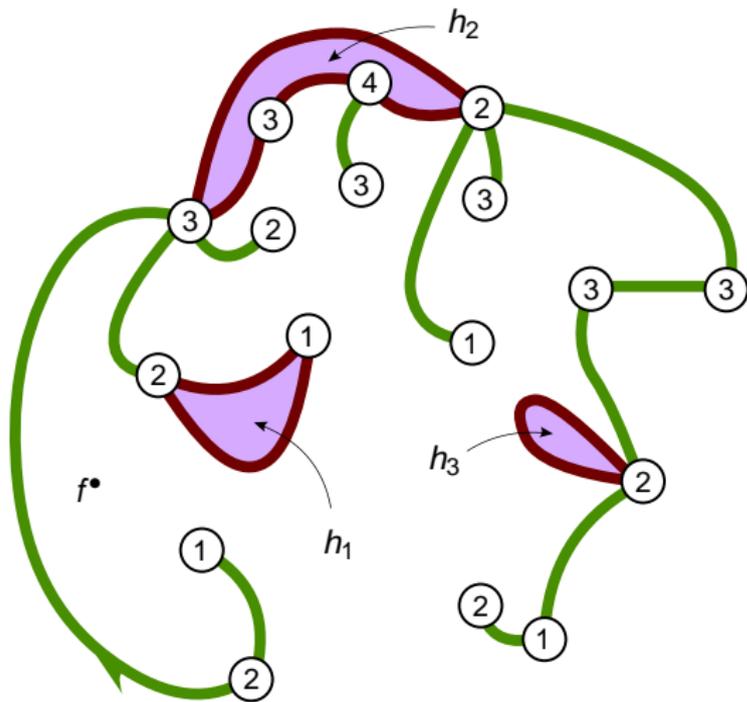
# Exemple



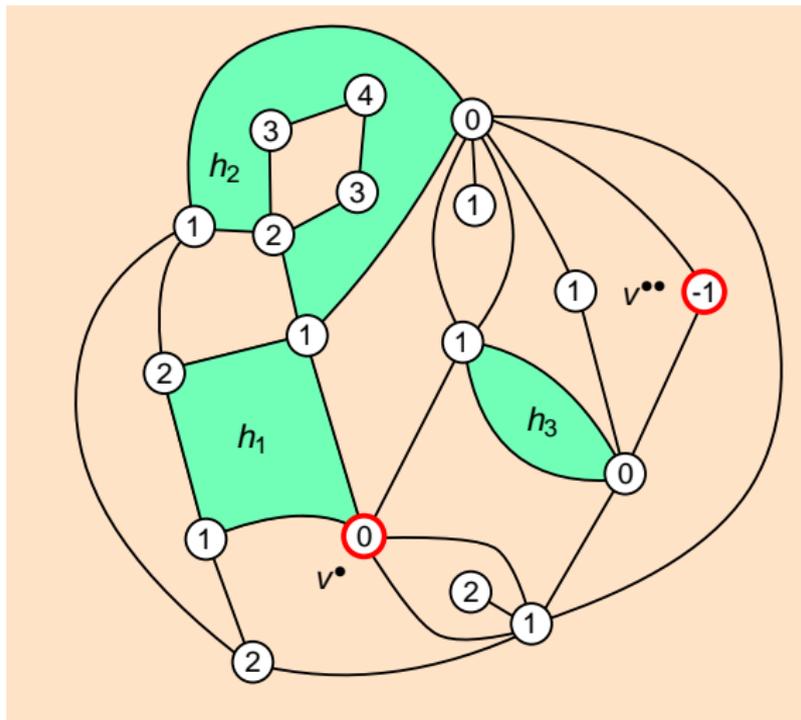
# Exemple



# Exemple



# Bijection à 2 points (Miermont)



On se donne :

- ✧  $v^*, v^{**}$  à dist.  $d \geq 2$
- ✧  $\lambda \in \{1, 2, \dots, d-1\}$

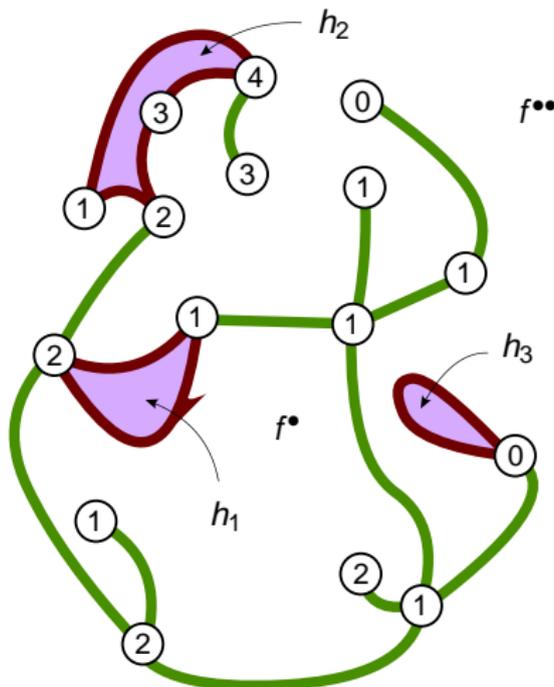
Étiquette de  $v$  : min entre

- ✧  $d_q(v^*, v)$
- ✧  $d_q(v^{**}, v) + 2\lambda - d$

Ici,  $d = 3$  et  $\lambda = 1$ .



# Bijection à 2 points (Miermont)



On se donne :

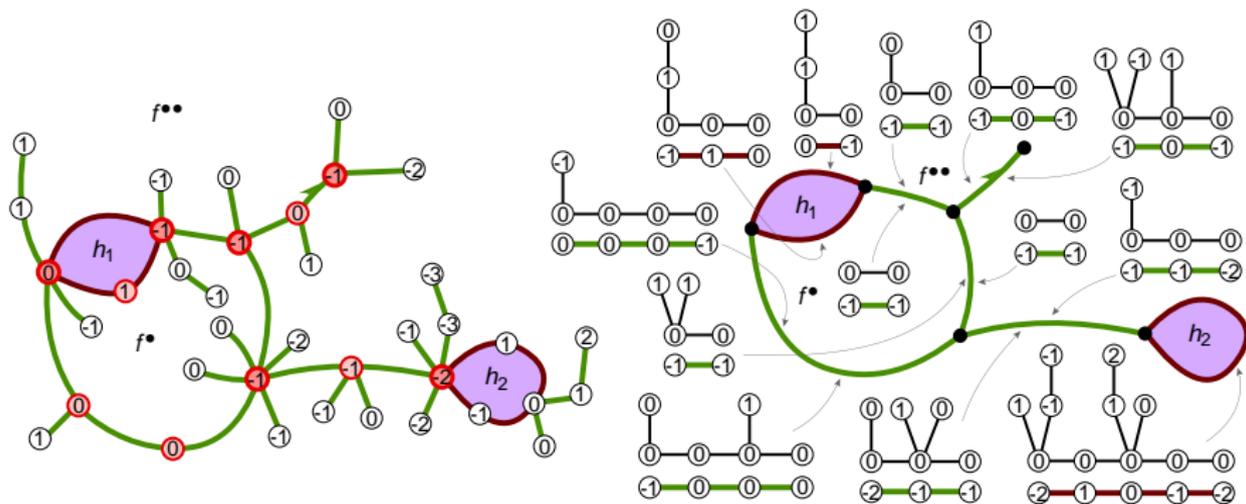
- ◆  $v^\bullet, v^{\bullet\bullet}$  à dist.  $d \geq 2$
- ◆  $\lambda \in \{1, 2, \dots, d-1\}$

Étiquette de  $v$  : min entre

- ◆  $d_q(v^\bullet, v)$
- ◆  $d_q(v^{\bullet\bullet}, v) + 2\lambda - d$

Ici,  $d = 3$  et  $\lambda = 1$ .

# Décomposition en schéma, ponts et forêts



## Limite d'échelle

La limite d'échelle de la carte étiquetée donne naissance à une carte à trous continue  $\mathcal{M}$  munie d'une fonction d'étiquetage  $\mathcal{L}$ .

L'espace  $\mathcal{M}$  peut également s'obtenir comme quotient de  $[0, 1]$  (ce qui correspond à paramétrer son contour).

Les (la) surfaces browniennes correspondantes s'obtiennent par quotient de  $\mathcal{M}$ , ou de  $[0, 1]$ .

Pour  $s \in [0, 1]$ , on notera  $\mathcal{M}(s)$  et  $q_\infty^\sigma(s)$  les points correspondant dans les quotients.

### Lemme

*P.s., la fonction  $\mathcal{L} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  atteint son minimum en un unique point.*

On note  $s^\bullet$  ce point et  $\rho^\bullet := q_\infty^\sigma(s^\bullet)$ .

## Unicité des géodésiques typiques

À partir de maintenant, on fixe une surface brownienne  $(q_\infty^\sigma, d_\infty^\sigma)$ .

**Proposition** (adapté de Miermont '09)

*Soit  $S$  uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendant de  $(q_\infty^\sigma, d_\infty^\sigma)$ . Alors, p.s., il n'existe qu'une seule géodésique de  $\rho^\bullet$  à  $X := q_\infty^\sigma(S)$ .*

**Idée.** On considère une v.a.  $U$  uniforme sur  $[0, 1]$  et on montre que

$$\{y \in q_\infty^\sigma : d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, y) = U d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, X) \text{ et } d_\infty^\sigma(y, X) = (1 - U) d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, X)\}.$$

est p.s. un singleton.

Les points de cet ensemble correspondent à des minima globaux des étiquettes sur l'interface entre les deux faces de la carte à trous obtenue par limite d'échelle de la carte à trous de la bijection à 2 points. Comme ces étiquettes sont essentiellement browniennes, il ne peut y avoir qu'un minimum global.

## Géodésiques simples

En version discrète, la géodésique simple partant d'un coin s'obtient en suivant les arêtes successives de la bijection de Schaeffer. L'analogue continu est le suivant :

### Définition

La **géodésique simple** d'indice  $s \in [0, 1]$  est le chemin  $\Phi_s$  défini par

$$\Phi_s(w) := q_\infty^\sigma \left( \inf \left\{ r : \inf_{[s \rightarrow r]} \mathcal{L} = \mathcal{L}(s^\bullet) + w \right\} \right), \quad 0 \leq w \leq d_\infty^\sigma(s^\bullet, s),$$

où

$$[s \rightarrow t] := \begin{cases} [s, t] & \text{si } s \leq t, \\ [s, 1] \cup [0, t] & \text{si } t < s. \end{cases}$$

### Remarque

$$d_\infty^\sigma(s^\bullet, s) = \mathcal{L}(s) - \mathcal{L}(s^\bullet).$$

# Géodésiques simples

## Proposition (Le Gall '10)

*Les géodésiques simples sont des géodésiques.*

## Conséquence

Soit  $(s_i)_{i \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d. uniformes sur  $[0, 1]$ .

On note  $a_i := \mathcal{M}(s_i)$  et  $x_i := q_\infty^\sigma(s_i)$ .

Alors, p.s., pour tout  $i$ ,  $\Phi_{s_i}$  est la seule géodésique de  $\rho^\bullet$  à  $x_i$ .

De plus, p.s.,  $\{s_i : i \geq 0\}$  est dense dans  $[0, 1]$ . Quitte à exclure un évènement de probabilité 0, on suppose que les propriétés précédentes sont vraies.

# Toutes les géodésiques sont simples

Le but de cette section est de montrer la proposition suivante.

## Proposition

*Toutes les géodésiques issues de  $\rho^\bullet$  sont simples.*

On va se limiter aux feuilles, le cas général étant guère plus compliqué. Plus précisément, on veut le résultat suivant.

## But

Soit  $s$  tel que  $a := \mathcal{M}(s)$  soit d'ordre 1. On veut montrer que  $\Phi_s$  est la seule géodésique de  $\rho^\bullet$  à  $x := q_\infty^\sigma(s)$ .

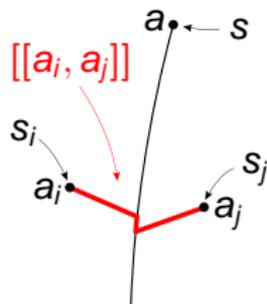
## Les géodésiques ne passent pas par « en bas »

$\mathcal{M}$  contient des arbres analogues aux arbres des forêts de la décomposition discrète. Pour deux points  $b$  et  $c$  d'un tel arbre, on note  $[[b, c]]$  l'unique image des chemins injectifs de  $b$  à  $c$  dans l'arbre.

### Lemme (1)

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$  soit inclus dans l'intervalle codant le sous-arbre contenant  $a$  (c'est-à-dire que  $\mathcal{M}([s - \varepsilon, s + \varepsilon])$  n'intersecte le schéma qu'en au plus un point). Il existe  $i$  et  $j$  tels que  $s - \varepsilon < s_i < s < s_j < s + \varepsilon$  et, pour tout  $b \in [[a_i, a_j]]$ ,

$$d_{\infty}^{\sigma}(\rho^{\bullet}, a) < d_{\infty}^{\sigma}(\rho^{\bullet}, b) + d_{\infty}^{\sigma}(b, a).$$



# Les géodésiques ne passent pas par « en bas »

**Idée.** Par contradiction.

Pour  $\xi$  fixé assez petit, on note  $c_\xi$  le point de l'arbre à distance  $\xi$  de  $a$ .

Pour  $\eta$  assez petit, on peut trouver

$l_\xi \leq s_i < l_\xi + \eta$  et  $r_\xi - \eta < s_j \leq r_\xi$ ,

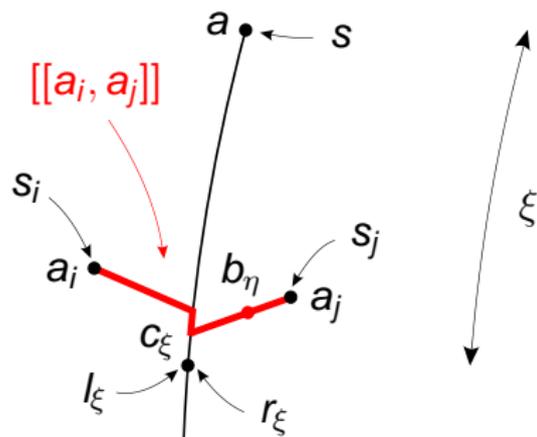
et donc un  $b_\eta \in [[a_i, a_j]]$  tel que

$$d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, a) = d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, b_\eta) + d_\infty^\sigma(b_\eta, a).$$

Quand  $\eta \rightarrow 0$ , quitte à extraire,  $b_\eta \rightarrow c_\xi$  et on obtient

$$d_\infty^\sigma(c_\xi, a) = d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, a) - d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, c_\xi) = \mathfrak{L}(a) - \mathfrak{L}(c_\xi).$$

Par la « borne du cactus »,  $\mathfrak{L}(c_\xi) = \min_{[[c_\xi, a]]} \mathfrak{L}$  et on conclut que  $\xi \mapsto \mathfrak{L}(c_\xi)$  est décroissante.



## Par où sortir ?

### Lemme (2)

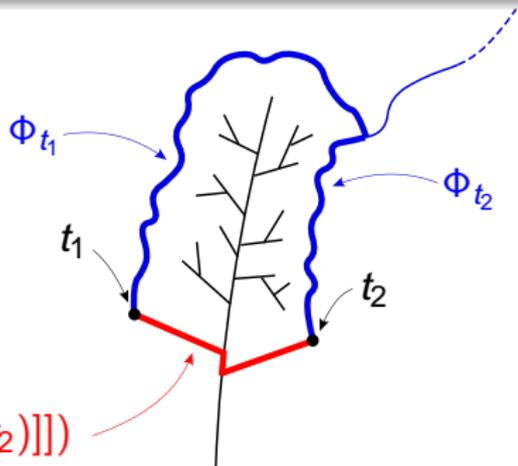
Soit  $\tau$  un arbre de  $\mathcal{M}$  et  $t_1 \leq t_2$  tels que  $\mathcal{M}([t_1, t_2]) \subseteq \tau$ . Soit  $w' := \inf\{w : \Phi_{t_1}(w) \neq \Phi_{t_2}(w)\}$  l'instant où  $\Phi_{t_1}$  et  $\Phi_{t_2}$  se séparent. La frontière de  $q_\infty^\sigma([t_1, t_2])$  est

$$\pi([\mathcal{M}(t_1), \mathcal{M}(t_2)]) \cup \Phi_{t_1}([w', d_\infty^\sigma(s^\bullet, t_1)]) \cup \Phi_{t_2}([w', d_\infty^\sigma(s^\bullet, t_2)]).$$

Autrement dit, la frontière de  $q_\infty^\sigma([t_1, t_2])$  est composée de 3 parties :

- ◆  $\pi([\mathcal{M}(t_1), \mathcal{M}(t_2)])$  et
- ◆ les images de  $\Phi_{t_1}$  et  $\Phi_{t_2}$  après leur séparation.

$$\pi([\mathcal{M}(t_1), \mathcal{M}(t_2)])$$

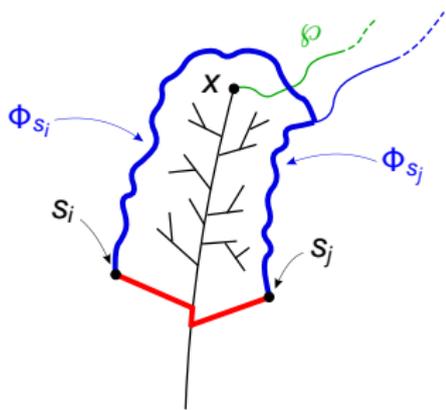


## $\Phi_s$ est la seule géodésique de $\rho^\bullet$ à $x$

**Preuve.** Soit  $\wp : [0, d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, x)] \rightarrow q_\infty^\sigma$  une géodésique de  $\rho^\bullet$  à  $x$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit. On prend  $s_i$  et  $s_j$  satisfaisant les conditions du lemme (1) et on note  $r := \sup\{w : \wp(w) \notin q_\infty^\sigma([s_i, s_j])\}$ .

Ainsi  $\wp(r)$  appartient à la frontière de  $q_\infty^\sigma([s_i, s_j])$ . Or  $\wp(r) \notin \pi([a_i, a_j])$  donc, par le lemme (2),  $\wp$  rencontre  $\Phi_{s_i}$  ou  $\Phi_{s_j}$ .

Comme  $\Phi_{s_i}$  et  $\Phi_{s_j}$  sont les seules géodésiques de  $\rho^\bullet$  à  $x_i$  et  $x_j$ , on déduit que  $\wp$  coïncide avec  $\Phi_{s_i}$  et  $\Phi_{s_j}$  sur l'intervalle où elles sont égales.



## $\Phi_S$ est la seule géodésique de $\rho^\bullet$ à $x$

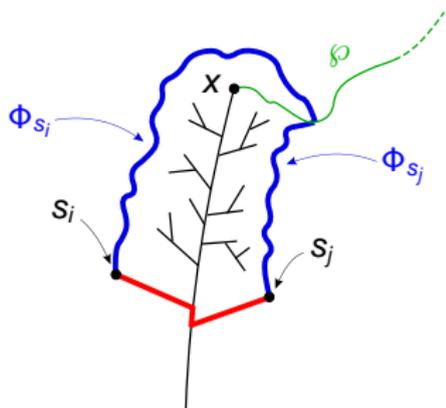
**Preuve.** Soit  $\wp : [0, d_\infty^\sigma(\rho^\bullet, x)] \rightarrow \mathfrak{q}_\infty^\sigma$  une géodésique de  $\rho^\bullet$  à  $x$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit. On prend  $s_i$  et  $s_j$  satisfaisant les conditions du lemme (1) et on note  $r := \sup\{w : \wp(w) \notin \mathfrak{q}_\infty^\sigma([s_i, s_j])\}$ .

Ainsi  $\wp(r)$  appartient à la frontière de  $\mathfrak{q}_\infty^\sigma([s_i, s_j])$ . Or  $\wp(r) \notin \pi([a_i, a_j])$  donc, par le lemme (2),  $\wp$  rencontre  $\Phi_{s_i}$  ou  $\Phi_{s_j}$ .

Comme  $\Phi_{s_i}$  et  $\Phi_{s_j}$  sont les seules géodésiques de  $\rho^\bullet$  à  $x_i$  et  $x_j$ , on déduit que  $\wp$  coïncide avec  $\Phi_{s_i}$  et  $\Phi_{s_j}$  sur l'intervalle où elles sont égales.

En particulier, cela est aussi vrai pour  $\Phi_S$  et donc  $\wp$  coïncide avec  $\Phi_S$  jusqu'au point de séparation de  $\Phi_{s_i}$  et  $\Phi_{s_j}$ .

On conclut en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



## Un dernier lemme géométrique

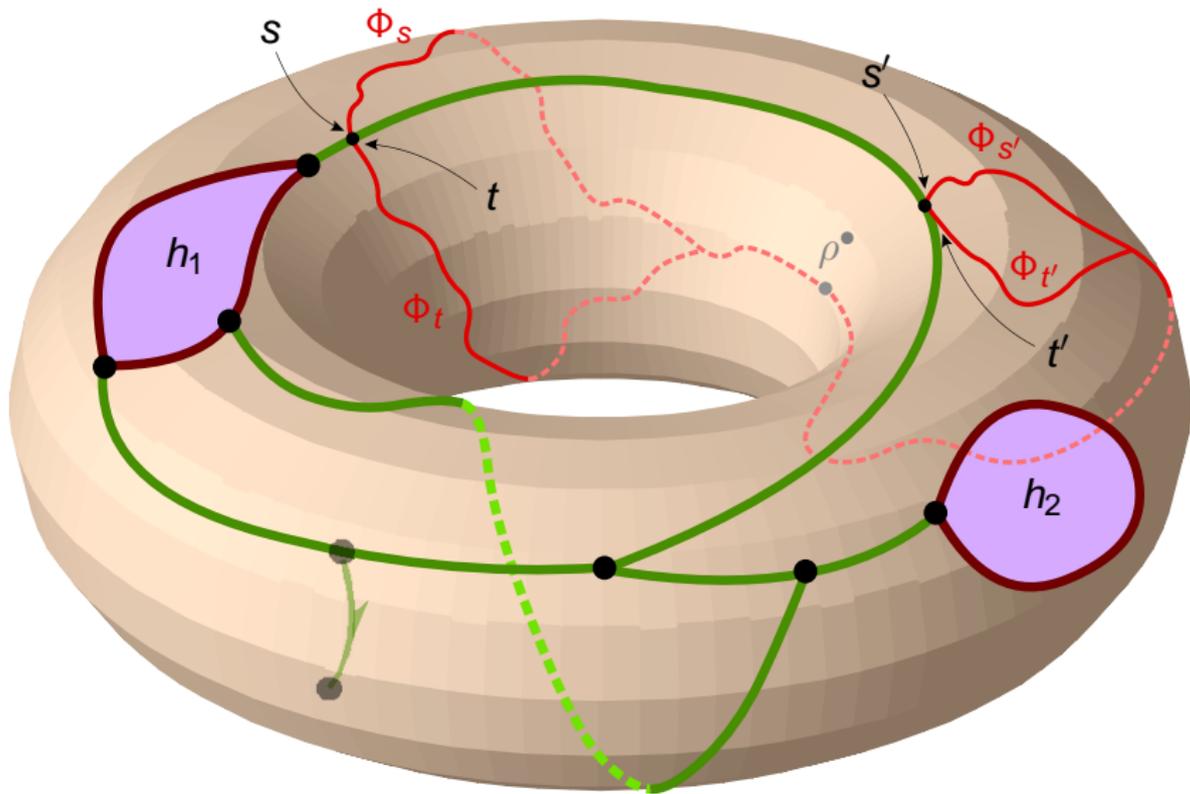
La racine du schéma ne jouant aucun rôle géométrique (elle sert essentiellement à retrouver la racine de la carte), on considère ici le schéma auquel on supprime l'arête racine.

Dans le contour de  $\mathcal{M}$ , on visite les forêts une à une. On note  $\tilde{e}_s$  la demi-arête du schéma sans racine portant la forêt visitée au temps  $s$ .

### Lemme

*Soit  $s, t$  tels que  $\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(t)$ . Alors  $\Phi_s \bullet \bar{\Phi}_t$  est homotope à 0 si et seulement si  $\tilde{e}_s = \tilde{e}_t$ .*

# Illustration



# Merci de votre attention



Have an  
Irrational Day  
3.14