

Sur la fonction à deux points des cartes et hypercartes planaires générales

Jérémie Bouttier

Travail en commun avec Éric Fusy et Emmanuel Guitter
arXiv:1312.0502

Institut de Physique Théorique, CEA Saclay
Département de mathématiques et applications, ENS Paris

Journée Cartes, ENS Lyon, 14 mars 2014

Plan

1 Introduction

2 Bijections

3 Applications

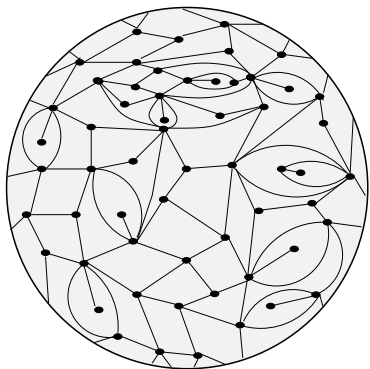
Outline

1 Introduction

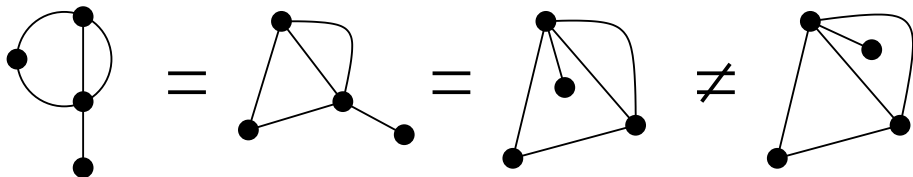
2 Bijections

3 Applications

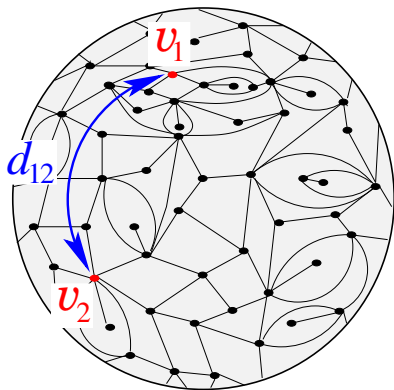
Introduction



Une **carte plane** est un (multi)graphe connecté plongé dans la sphère, considéré à déformation près. Une carte est constituée de **sommets**, **arêtes** et **faces**.

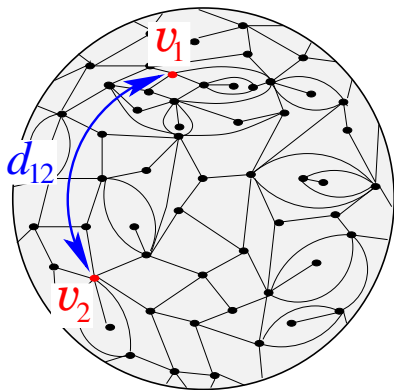


Introduction



Étant donné une classe de cartes, la **fonction à deux points** est la série génératrice des cartes appartenant à cette classe et ayant deux points marqués à distance prescrite.

Introduction



Étant donné une classe de cartes, la **fonction à deux points** est la série génératrice des cartes appartenant à cette classe et ayant deux points marqués à distance prescrite.

Quantité combinatoire **simple**, donnant des informations non triviales sur les propriétés métriques d'une carte tirée aléatoirement dans la classe choisie.

Introduction

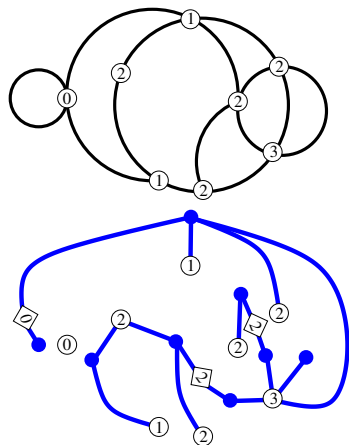
Quelques approches :

- “peeling” à la Watabiki : méthode approchée pour les triangulations

Introduction

Quelques approches :

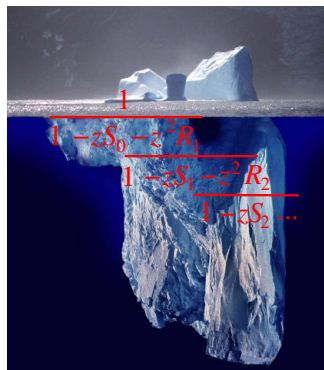
- “peeling” à la Watabiki : méthode approchée pour les triangulations
- bijections avec arbres étiquetés (Schaeffer, BDG...) + intégrabilité discrète : méthode exacte pour les quadrangulations, etc.



Introduction

Quelques approches :

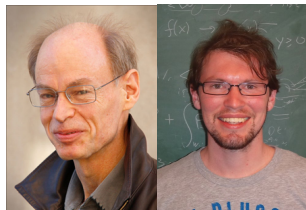
- “peeling” à la Watabiki : méthode approchée pour les triangulations
- bijections avec arbres étiquetés (Schaeffer, BDG...) + intégrabilité discrète : méthode exacte pour les quadrangulations, etc.
- fractions (multi)continues : méthode générale pour les cartes avec contrôle sur les degrés des faces



Introduction

Quelques approches :

- “peeling” à la Watabiki : méthode approchée pour les triangulations
- bijections avec arbres étiquetés (Schaeffer, BDG...) + intégrabilité discrète : méthode exacte pour les quadrangulations, etc.
- fractions (multi)continues : méthode générale pour les cartes avec contrôle sur les degrés des faces
- **bijection d'Ambjørn-Budd et généralisations**



Introduction

Ambjørn-Budd ont donné une nouvelle bijection entre cartes planaires à n arêtes et quadrangulations à n faces, différente de la bijection “triviale”.

Introduction

Ambjørn-Budd ont donné une nouvelle bijection entre cartes planaires à n arêtes et quadrangulations à n faces, différente de la bijection “triviale”.

L'idée consiste à appliquer “à l'envers” la bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés.

Introduction

Ambjørn-Budd ont donné une nouvelle bijection entre cartes planaires à n arêtes et quadrangulations à n faces, différente de la bijection “triviale”.

L'idée consiste à appliquer “à l'envers” la bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés.

Grâce à une propriété de préservation des distances, cela permet de calculer la fonction à deux points des cartes planaires comptées par les arêtes, et plus (Bettinelli-Jacob-Miermont, arXiv:1312.5842).

Introduction

Ambjørn-Budd ont donné une nouvelle bijection entre cartes planaires à n arêtes et quadrangulations à n faces, différente de la bijection “triviale”.

L'idée consiste à appliquer “à l'envers” la bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés.

Grâce à une propriété de préservation des distances, cela permet de calculer la fonction à deux points des cartes planaires comptées par les arêtes, et plus (Bettinelli-Jacob-Miermont, arXiv:1312.5842).

Pourquoi cela n'a pas été fait avant : la bijection BDG donne des arbres trop compliqués, l'approche par fractions continues est limitée par le fait que les faces peuvent avoir des degrés arbitrairement grands (on perd l'identification avec les caractères symplectiques).

Introduction

Ambjørn-Budd ont donné une nouvelle bijection entre cartes planaires à n arêtes et quadrangulations à n faces, différente de la bijection “triviale”.

L'idée consiste à appliquer “à l'envers” la bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés.

Grâce à une propriété de préservation des distances, cela permet de calculer la fonction à deux points des cartes planaires comptées par les arêtes, et plus (Bettinelli-Jacob-Miermont, arXiv:1312.5842).

Pourquoi cela n'a pas été fait avant : la bijection BDG donne des arbres trop compliqués, l'approche par fractions continues est limitée par le fait que les faces peuvent avoir des degrés arbitrairement grands (on perd l'identification avec les caractères symplectiques).

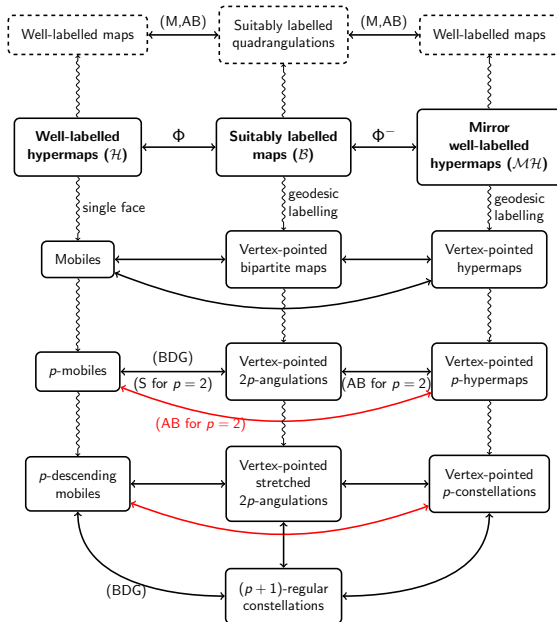
Ici, nous allons généraliser la bijection d'Ambjørn-Budd afin de calculer les fonctions à deux points d'autres classes de cartes.

Outline

1 Introduction

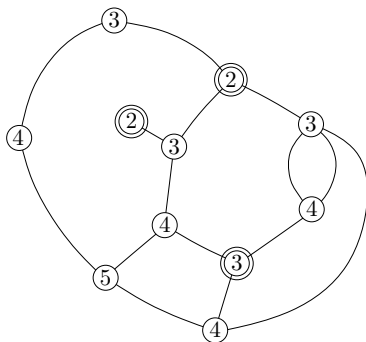
2 Bijections

3 Applications



Cartes convenablement étiquetées

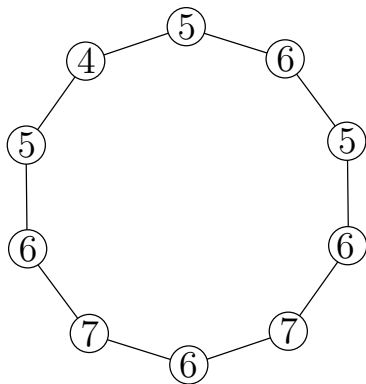
On note \mathcal{B} l'ensemble des **cartes convenablement étiquetées**, c'est-à-dire des cartes planaires dont les sommets sont étiquetés par des entiers variant de ± 1 le long de chaque arête (une telle carte est nécessairement bipartie).



Sur cet exemple les **minima locaux** sont doublement entourés. On peut considérer également les maxima locaux.

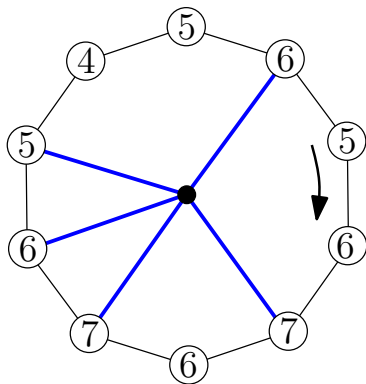
La bijection Φ

Étant donné une carte dans \mathcal{B} , on considère chaque face séparément.



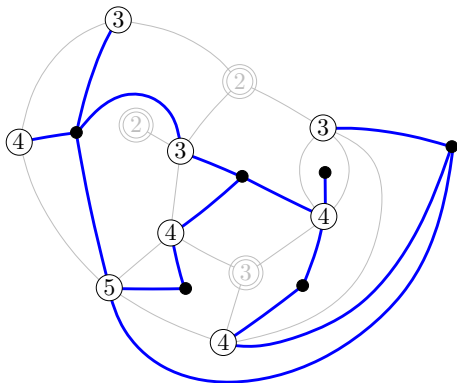
La bijection Φ

Étant donné une carte dans \mathcal{B} , on considère chaque face séparément.

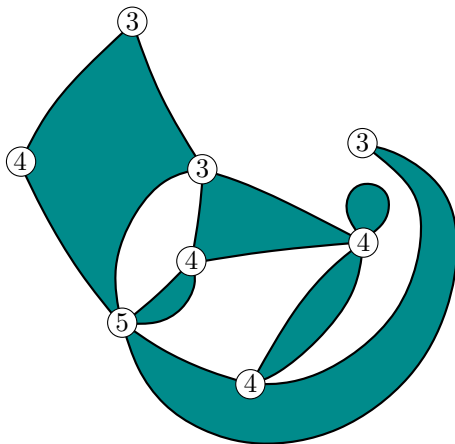


On y applique les “règles BDG”.

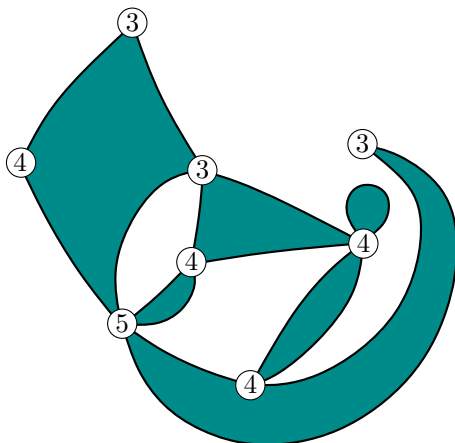
La bijection Φ



La bijection Φ



La bijection Φ



On obtient une **hypercarte bien étiquetée** : carte planaire bicoloriée dont les sommets sont étiquetés par des entiers tels que, en tournant autour des faces sombres dans le sens indirect, la variation à chaque pas appartient à $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$. On note \mathcal{H} l'ensemble des hypercartes bien étiquetées.

La bijection Φ

Φ est une bijection entre \mathcal{B} et \mathcal{H} induisant les correspondances suivantes :

$B \in \mathcal{B}$	\leftrightarrow	$H \in \mathcal{H}$
face de B de degré $2k$	\leftrightarrow	face sombre de H de degré k
minimum local de B	\leftrightarrow	face claire de H
maximum local de B	\leftrightarrow	maximum local droit de H
autre sommet de B	\leftrightarrow	autre sommet de H
arête de B	\leftrightarrow	arête de H

La bijection Φ

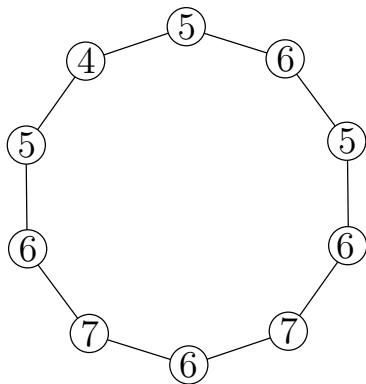
Φ est une bijection entre \mathcal{B} et \mathcal{H} induisant les correspondances suivantes :

$B \in \mathcal{B}$	\leftrightarrow	$H \in \mathcal{H}$
face de B de degré $2k$	\leftrightarrow	face sombre de H de degré k
minimum local de B	\leftrightarrow	face claire de H
maximum local de B	\leftrightarrow	maximum local droit de H
autre sommet de B	\leftrightarrow	autre sommet de H
arête de B	\leftrightarrow	arête de H

Lorsque B est une quadrangulation, toutes les faces sombres sont bivalentes, en les écrasant on obtient une carte bien étiquetée (on retrouve la bijection de Miermont).

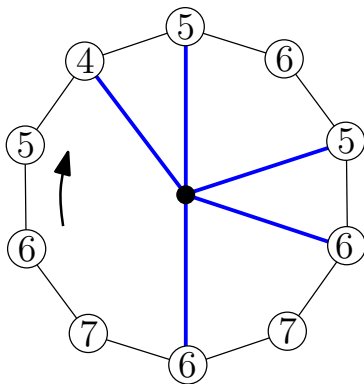
La bijection Φ_-

Étant donné une carte dans \mathcal{B} , on considère chaque face séparément.



La bijection Φ_-

Étant donné une carte dans \mathcal{B} , on considère chaque face séparément.



On y applique les règles BDG à l'envers.

La bijection Φ_-

On obtient une hypercarte bien étiquetée “vue dans un miroir” : en tournant autour des faces sombres dans le sens **direct**, la variation à chaque pas appartient à $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$. On note \mathcal{MH} l'ensemble des hypercartes bien étiquetées miroir.

La bijection Φ_-

On obtient une hypercarte bien étiquetée “vue dans un miroir” : en tournant autour des faces sombres dans le sens **direct**, la variation à chaque pas appartient à $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$. On note \mathcal{MH} l'ensemble des hypercartes bien étiquetées miroir.

Φ_- est une bijection entre \mathcal{B} et \mathcal{MH} induisant les correspondances suivantes :

$B \in \mathcal{B}$	\leftrightarrow	$H' \in \mathcal{MH}$
face de B de degré $2k$	\leftrightarrow	face sombre de H' de degré k
maximum local de B	\leftrightarrow	face claire de H'
minimum local de B	\leftrightarrow	minimum local droit de H'
autre sommet de B	\leftrightarrow	autre sommet de H'
arête de B	\leftrightarrow	arête de H'

La bijection $\Phi \circ \Phi^{-1}$

Par composition on obtient une bijection entre \mathcal{H} et \mathcal{MH} induisant les correspondances suivantes :

$H \in \mathcal{H}$	\leftrightarrow	$H' \in \mathcal{MH}$
face sombre de H de degré k	\leftrightarrow	face sombre de H' de degré k
maximum local droit de H	\leftrightarrow	face claire de H'
face claire de H	\leftrightarrow	minimum local droit de H'
autre sommet de H	\leftrightarrow	autre sommet de H'
arête de H	\leftrightarrow	arête de H'

La bijection $\Phi \circ \Phi^{-1}$

Par composition on obtient une bijection entre \mathcal{H} et \mathcal{MH} induisant les correspondances suivantes :

$H \in \mathcal{H}$	\leftrightarrow	$H' \in \mathcal{MH}$
face sombre de H de degré k	\leftrightarrow	face sombre de H' de degré k
maximum local droit de H	\leftrightarrow	face claire de H'
face claire de H	\leftrightarrow	minimum local droit de H'
autre sommet de H	\leftrightarrow	autre sommet de H'
arête de H	\leftrightarrow	arête de H'

Cas particulier intéressant : H n'a qu'une face claire, i.e. c'est un **mobile**.
L'étiquetage de H' est alors **géodésique**.

Étiquetages géodésiques

Une carte bipartie pointée possède un unique étiquetage convenable où le sommet pointé est l'unique minimum local et a l'étiquette 0. C'est l'**étiquetage géodésique** par rapport au sommet pointé.

Étiquetages géodésiques

Une carte bipartie pointée possède un unique étiquetage convenable où le sommet pointé est l'unique minimum local et a l'étiquette 0. C'est l'étiquetage géodésique par rapport au sommet pointé.

De manière similaire, une hypercarte pointée possède un unique bon étiquetage miroir où le sommet pointé est l'unique minimum local droit et a l'étiquette 0. C'est l'**étiquetage géodésique** par rapport au sommet pointé.

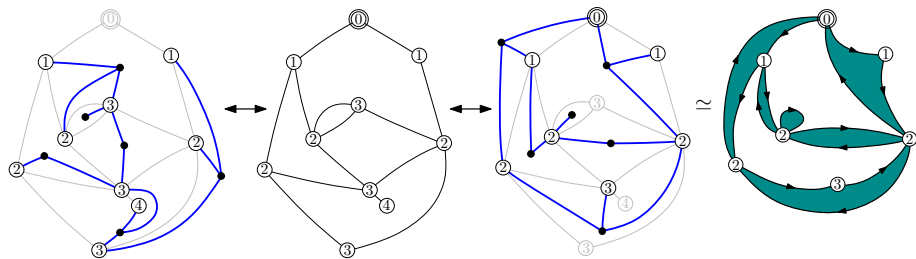
Étiquetages géodésiques

Une carte bipartie pointée possède un unique étiquetage convenable où le sommet pointé est l'unique minimum local et a l'étiquette 0. C'est l'étiquetage géodésique par rapport au sommet pointé.

De manière similaire, une hypercarte pointée possède un unique bon étiquetage miroir où le sommet pointé est l'unique minimum local droit et a l'étiquette 0. C'est l'étiquetage géodésique par rapport au sommet pointé.

Par restriction de Φ et Φ_- on obtient des bijections entre mobiles d'étiquette minimale 1, cartes biparties pointées, et hypercartes pointées. (La restriction de Φ est la bijection BDG.)

Mobles et hypercartes pointées



Mobles et hypercartes pointées

On obtient une bijection entre mobles et hypercartes pointées induisant les correspondances suivantes :

mobile	\leftrightarrow	hypercarte pointée
sommet noir de degré k	\leftrightarrow	face sombre de degré k
maximum local droit	\leftrightarrow	face claire
autre sommet blanc	\leftrightarrow	sommet non pointé
arête	\leftrightarrow	arête

Mobiles et hypercartes pointées

On obtient une bijection entre mobiles et hypercartes pointées induisant les correspondances suivantes :

mobile	\leftrightarrow	hypercarte pointée
sommet noir de degré k	\leftrightarrow	face sombre de degré k
maximum local droit	\leftrightarrow	face claire
autre sommet blanc	\leftrightarrow	sommet non pointé
arête	\leftrightarrow	arête

Par rapport à la bijection BDG pour les cartes eulériennes, on perd ici le contrôle sur les degrés des faces claires, mais en contrepartie les mobiles sont beaucoup plus simples.

Mobiles et hypercartes pointées

On obtient une bijection entre mobiles et hypercartes pointées induisant les correspondances suivantes :

mobile	\leftrightarrow	hypercarte pointée
sommet noir de degré k	\leftrightarrow	face sombre de degré k
maximum local droit	\leftrightarrow	face claire
autre sommet blanc	\leftrightarrow	sommet non pointé
arête	\leftrightarrow	arête

Par rapport à la bijection BDG pour les cartes eulériennes, on perd ici le contrôle sur les degrés des faces claires, mais en contrepartie les mobiles sont beaucoup plus simples.

Par restriction, on a une bijection entre p -mobiles et p -hypercartes pointées (tous les sommets noirs/faces sombres ont degré p). Pour $p = 2$ on retrouve le cas considéré par Ambjørn et Budd.

Constellations

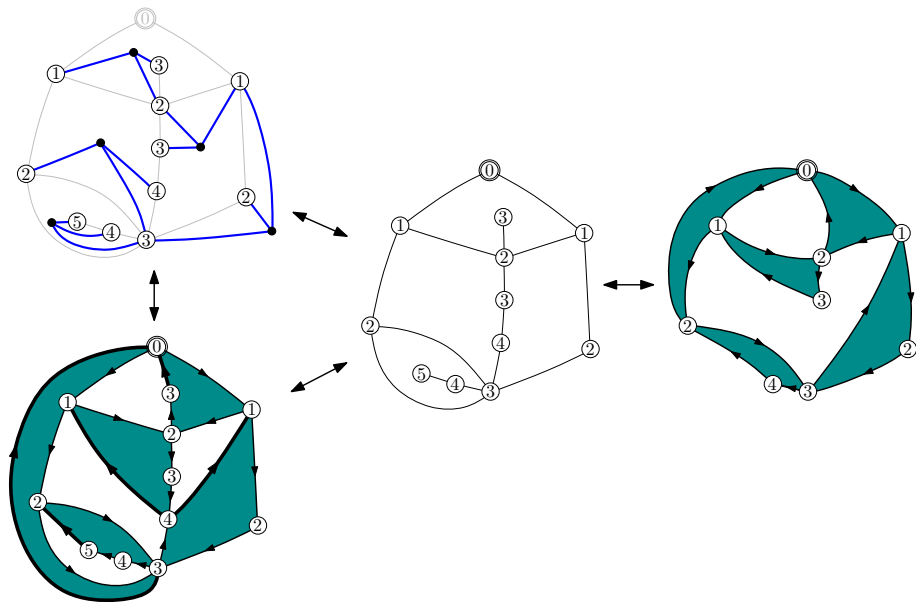
La bijection peut également se restreindre aux **p -constellations** (p -hypercartes dont toutes les faces blanches ont degré multiple de p), en correspondance avec les **mobiles p -descendants** (p -mobiles ayant $p - 1$ descentes autour de chaque sommet noir). Comme étape intermédiaire on obtient des $2p$ -angulations pointées “étirées”.

Constellations

La bijection peut également se restreindre aux **p -constellations** (p -hypercartes dont toutes les faces blanches ont degré multiple de p), en correspondance avec les **mobiles p -descendants** (p -mobiles ayant $p - 1$ descentes autour de chaque sommet noir). Comme étape intermédiaire on obtient des $2p$ -angulations pointées “étirées”.

La bijection BDG usuelle donne une bijection entre mobiles p -descendants et $(p + 1)$ -angulations eulériennes. (Il y a par ailleurs une bijection “triviale” entre $(p + 1)$ -angulations eulériennes et p -constellations.)

Constellations



Outline

1 Introduction

2 Bijections

3 Applications

Fonction à deux points des cartes générales

On se place dans le cas $p = 2$ considéré par Ambjørn et Budd (bijection cartes quelconques/arbres bien étiquetés via les quadrangulations).

Fonction à deux points des cartes générales

On se place dans le cas $p = 2$ considéré par Ambjørn et Budd (bijection cartes quelconques/arbres bien étiquetés via les quadrangulations).

On note $R_i \equiv R_i(t)$ la série génératrice des cartes pointées enracinées sur une arête de type $(j-1, j)$, $j \leq i$, avec poids t par arête. De même, on note $S_i^2 \equiv S_i^2(t)$ la série génératrice des cartes pointées enracinées sur une arête de type (j, j) , $j \leq i$.

Fonction à deux points des cartes générales

On se place dans le cas $p = 2$ considéré par Ambjørn et Budd (bijection cartes quelconques/arbres bien étiquetés via les quadrangulations).

On note $R_i \equiv R_i(t)$ la série génératrice des cartes pointées enracinées sur une arête de type $(j-1, j)$, $j \leq i$, avec poids t par arête. De même, on note $S_i^2 \equiv S_i^2(t)$ la série génératrice des cartes pointées enracinées sur une arête de type (j, j) , $j \leq i$.

Par la bijection, R_i et S_i^2 comptent des arbres bien étiquetés enracinés sur des arêtes de types respectifs $(j, j+1)$ et $(j+1, j+1)$, $j \leq i$, où les étiquettes sont strictement positives et il y a au moins une étiquette 1.

Fonction à deux points des cartes générales

On se place dans le cas $p = 2$ considéré par Ambjørn et Budd (bijection cartes quelconques/arbres bien étiquetés via les quadrangulations).

On note $R_i \equiv R_i(t)$ la série génératrice des cartes pointées enracinées sur une arête de type $(j-1, j)$, $j \leq i$, avec poids t par arête. De même, on note $S_i^2 \equiv S_i^2(t)$ la série génératrice des cartes pointées enracinées sur une arête de type (j, j) , $j \leq i$.

Par la bijection, R_i et S_i^2 comptent des arbres bien étiquetés enracinés sur des arêtes de types respectifs $(i, i+1)$ et $(i+1, i+1)$, où les étiquettes sont strictement positives.

Fonction à deux points des cartes générales

On déduit immédiatement les relations

$$R_i = 1 + tT_iT_{i+1}, \quad S_i = \sqrt{t}T_{i+1}$$

où T_i est la série des arbres bien étiquetés à étiquettes strictement positives, plantés sur un sommet d'étiquette i .

Fonction à deux points des cartes générales

On déduit immédiatement les relations

$$R_i = 1 + tT_iT_{i+1}, \quad S_i = \sqrt{t}T_{i+1}$$

où T_i est la série des arbres bien étiquetés à étiquettes strictement positives, plantés sur un sommet d'étiquette i .

T_i est par ailleurs "bien connu", il satisfait l'équation

$$T_i = \frac{1}{1 - t(T_{i-1} + T_i + T_{i+1})}, \quad i \geq 1$$

avec $T_0 = 0$, et vaut explicitement

$$T_i = T \frac{(1 - y^i)(1 - y^{i+3})}{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+2})}$$

$$\text{où } T = 1 + 3tT^2 \text{ et } y + \frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{tT^2} .$$

Fonction à deux points des cartes générales

On en déduit les expressions

$$R_i = R \frac{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+3})}{(1 - y^{i+2})^2}$$

où $R = 1 + t T^2$,

$$S_i = S \frac{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+2})(1 - y^{i+3})} = S - \sqrt{Ry} \left(\frac{1 - y^{i+2}}{1 - y^{i+3}} - \frac{1 - y^{i+1}}{1 - y^{i+2}} \right)$$

où $S = \sqrt{t} T$.

Fonction à deux points des cartes générales

On en déduit les expressions

$$R_i = R \frac{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+3})}{(1 - y^{i+2})^2}$$

où $R = 1 + t T^2$,

$$S_i = S \frac{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+2})(1 - y^{i+3})} = S - \sqrt{Ry} \left(\frac{1 - y^{i+2}}{1 - y^{i+3}} - \frac{1 - y^{i+1}}{1 - y^{i+2}} \right)$$

où $S = \sqrt{t} T$.

Comme application, on peut par exemple calculer l'espérance du nombre de sommets à distance i de l'origine dans une carte pointée infinie :

$$v_i = \frac{3}{280} (2i + 3) (10i^2 + 30i + 9).$$

Fonction à deux points des cartes générales

Une extension possible est d'introduire un poids supplémentaire z par face (donc par maximum local dans l'arbre bien étiqueté). On trouve alors les équations plus générales

$$R_i = 1 + tU_iT_{i+1}, \quad S_i = \sqrt{t}T_{i+1}$$

où T_i, U_i sont solution de

$$T_i = z + t(T_iU_{i-1} + T_i^2 + U_iT_{i+1}), \quad U_i = 1 + t(U_iU_{i-1} + U_iT_i + U_iT_{i+1}).$$

Comme observé par Ambjørn-Budd, ces équations admettent une solution explicite et on déduit l'expression

$$R_i = R \frac{(1 - \alpha y^{i+1})(1 - \alpha y^{i+3})}{(1 - \alpha y^{i+2})^2}$$

où R, y, α sont des séries algébriques en t, z .

Fonction à deux points des cartes biparties

On peut refaire la même chose pour les cartes biparties (en bijection avec les mobiles 2-descendants, aka arbres très bien étiquetés).

Fonction à deux points des cartes biparties

On peut refaire la même chose pour les cartes biparties (en bijection avec les mobiles 2-descendants, aka arbres très bien étiquetés).

On note à nouveau $R_i \equiv R_i(t)$ la série génératrice des cartes biparties pointées enracinées sur une arête de type $(j-1, j)$, $j \leq i$. Par la bijection, R_i compte des arbres très bien étiquetés enracinés sur une arête de type $(i, i+1)$, où les étiquettes sont strictement positives.

Fonction à deux points des cartes biparties

On peut refaire la même chose pour les cartes biparties (en bijection avec les mobiles 2-descendants, aka arbres très bien étiquetés).

On note à nouveau $R_i \equiv R_i(t)$ la série génératrice des cartes biparties pointées enracinées sur une arête de type $(j-1, j)$, $j \leq i$. Par la bijection, R_i compte des arbres très bien étiquetés enracinés sur une arête de type $(i, i+1)$, où les étiquettes sont strictement positives.

On en déduit

$$R_i = 1 + t T_i T_{i+1}$$

où T_i est solution de

$$T_i = \frac{1}{1 - t(T_{i-1} + T_{i+1})}, \quad i \geq 1$$

avec $T_0 = 0$.

Fonction à deux points des cartes biparties

De l'expression explicite connue

$$T_i = T \frac{(1 - y^i)(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+3})}$$

où $T = 1 + 2t T^2$ et $y + \frac{1}{y} = \frac{1}{t T^2}$

on déduit la forme

$$R_i = R \frac{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+2})(1 - y^{i+3})} \quad (1)$$

où $R = 1 + t T^2$.

Fonction à deux points des cartes biparties

De l'expression explicite connue

$$T_i = T \frac{(1 - y^i)(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+3})}$$

où $T = 1 + 2t T^2$ et $y + \frac{1}{y} = \frac{1}{t T^2}$

on déduit la forme

$$R_i = R \frac{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+2})(1 - y^{i+3})} \quad (1)$$

où $R = 1 + t T^2$.

Application : l'espérance du nombre de sommets à distance i de l'origine dans une carte bipartie pointée infinie est

$$v_i = \frac{4}{315} (i + 2) (10i^2 + 40i + 13).$$

Fonction à deux points des cartes biparties

On peut à nouveau introduire un poids supplémentaire z par face (maximum local dans l'arbre très bien étiqueté) :

$$R_i = 1 + tU_i T_{i+1}$$

où T_i, U_i sont solution de

$$T_i = z + t(T_i U_{i-1} + U_i T_{i+1}), \quad U_i = 1 + t(U_i U_{i-1} + U_i T_{i+1}).$$

Fonction à deux points des cartes biparties

On peut à nouveau introduire un poids supplémentaire z par face (maximum local dans l'arbre très bien étiqueté) :

$$R_i = 1 + tU_iT_{i+1}$$

où T_i, U_i sont solution de

$$T_i = z + t(T_iU_{i-1} + U_iT_{i+1}), \quad U_i = 1 + t(U_iU_{i-1} + U_iT_{i+1}).$$

On devine une forme explicite pour T_i, U_i et on en déduit l'expression

$$R_i = R \frac{(1 - \alpha y^{i+1})(1 - \alpha y^{i+4})}{(1 - \alpha y^{i+2})(1 - \alpha y^{i+3})}$$

avec R, y, α algébriques en t, z .

Conclusion

Autres applications possibles : 3-hypercartes, 3-constellations... (utilise des expressions explicites trouvées pour les 4/6-angulations, les quadrangulations eulériennes...)

Conclusion

Autres applications possibles : 3-hypercartes, 3-constellations... (utilise des expressions explicites trouvées pour les 4/6-angulations, les quadrangulations eulériennes...)

Questions en suspens :

- nouvelles limites d'échelles possibles en jouant sur le poids par face ?
- une topologie de Gromov-Hausdorff pour les quasi-distances ?

Conclusion

Autres applications possibles : 3-hypercartes, 3-constellations... (utilise des expressions explicites trouvées pour les 4/6-angulations, les quadrangulations eulériennes...)

Questions en suspens :

- nouvelles limites d'échelles possibles en jouant sur le poids par face ?
- une topologie de Gromov-Hausdorff pour les quasi-distances ?

Merci de votre attention !