Examen

Durée 3h, les notes de cours ne sont pas autorisées

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $x, y \in \mathbb{R}$, on notera $x \wedge y = \min(x, y)$ et $x \vee y = \max(x, y)$.

Exercice 1.— Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite i.i.d. de variables aléatoires vérifiant

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2\,.$$

Notons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On cherche à déterminer la limite de $\mathbb{P}(S_n \geq 0)$ lorsque $n \to \infty$. Expliquer l'erreur dans le raisonnement suivant, et donner le résultat juste.

> *Par la loi forte des grands nombres on a que $S_n/n \to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$. Donc*
>
> $$\mathbb{P}(S_n \geq 0) = \mathbb{P}(S_n/n \geq 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(0 \geq 0) = 1\,.$$

Exercice 2.— Somme et raffinement des lois de Poisson

1. Soit N et N' deux variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement la loi de Poisson avec paramètres strictement positifs λ et λ'. Montrer que $N + N'$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.

2. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On se donne une suite $(I_1, I_2, \ldots)$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et indépendantes de N. Montrer que les variables aléatoires

$$X = \sum_{j=1}^{N} I_j\,, \qquad Y = \sum_{j=1}^{N} (1 - I_j)\,,$$

sont indépendantes et calculer leur loi.

Exercice 3.— Lois extrêmes

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On note $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq x + \ln n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-x}}\,.$$

2. En déduire que $M_n/\ln n$ converge vers 1 en probabilité lorsque $n \to \infty$.

3. Le but est maintenant de montrer que la convergence de la question précédente a en fait lieu presque-sûrement. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq (1 - \varepsilon) \ln n) = \exp(-n^{\varepsilon}(1 + o(1))),$$

et en déduire que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln n} \geq 1 \quad \text{p.s.}$$

4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a lorsque $k \to \infty$,

$$\mathbb{P}(M_{2^k} \geq (1+\varepsilon)\ln 2^k) = 2^{-k\varepsilon}(1+o(1))\,,$$

et en déduire

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{2^k}}{\ln 2^k} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

5. Conclure

Exercice 4.— Formule de Stirling

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, telle que $M_1 = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, et convergeant en loi vers une variable aléatoire X.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. A-t-on que $(f(X_n))$ converge en loi vers $f(X)$? Justifier la réponse.

2. Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq M_1$. On pourra considérer les quantités $\mathbb{E}[|X_n| \wedge K], n \geq 1$, où $K > 0$ est fixé.

3. A-t-on que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$? Justifier la réponse.

4. On suppose que $M_2 = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Montrer que l'on a, pour tout $K > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]| \leq \sqrt{M_2\,\mathbb{P}(|X| \geq K)} + \mathbb{E}\big[|X|\mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}\big].$$

Indication : on pourra introduire

$$f_K(x) = (-K) \vee x \wedge K\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

la fonction identité sur $\mathbb{R}$ tronquée au niveau K, et on remarquera que l'on a

$$|x - f_K(x)| \leq |x|\mathbf{1}_{\{|x|\geq K\}}\,.$$

5. En déduire que sous les hypothèses de la question précédente, on a que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

6. Soit n un entier fixé, et Y_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{(Y_n - n)_+}{\sqrt{n}}\right] = \frac{e^{-n} n^{n+1/2}}{n!}\,,$$

où l'on a noté $x_+ = x \vee 0$ la partie positive de x.

7. Montrer que $(Y_n - n)_+/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers N_+, où N est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

8. Montrer que $\mathbb{E}[(Y_n - n)_+/\sqrt{n}]$ converge vers $\mathbb{E}[N_+]$.

9. En déduire la formule de Stirling

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+o(1))\,, \qquad n \to \infty.$$

Fin du sujet