# Partiel

*Durée 2h, les notes de cours ne sont pas autorisées*

Les trois exercices et le problème sont indépendants. Dans les trois exercices, les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et on note par défaut $L^p$ l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On rappelle que la transformée de Fourier de la densité gaussienne est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2} \,.$$

### Exercice 1.— Une permutation aléatoire « uniforme »

Soit $\sigma$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathfrak{S}_n$, le groupe symétrique de $\{1, 2, \ldots, n\}$.
**1.** On suppose que $\sigma$ est de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\mathbb{P}(\sigma(i) = j) = 1/n$ pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
**2.** Réciproquement, si on suppose que pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a que $\mathbb{P}(\sigma(i) = j) = 1/n$, est-il vrai que $\sigma$ est nécessairement de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ ?

### Exercice 2.— Lois stables de de variance finie

Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe une constante $c \in ]0, \infty[$ telle que, si $Y$ est indépendante de $X$ et de même loi, alors les variables aléatoires $X + Y$ et $cX$ ont même loi. On suppose enfin que $X$ est dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et que $X$ n'est pas une constante p.s., c'est-à-dire que sa loi n'est pas une masse de Dirac.
**1.** Quelle est la valeur de $c$ ?
**2.** Quelle est la valeur de $\mathbb{E}[X]$ ?
**3.** Montrer que, si $\varphi$ est la fonction caractéristique de $X$, on a le développement limité suivant lorsque $\xi \to 0$ :

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + o(\xi^2) \,,$$

où $\sigma^2 \in ]0, \infty[$.
**4.** En déduire la loi de $X$.
**5.** Que se passe-t-il si, toutes choses égales par ailleurs, on suppose que $X + Y$ et $cX + b$ ont même loi pour deux constantes $c \in ]0, \infty[$ et $b \in \mathbb{R}$ ?

### Exercice 3.— Une dichotomie remarquable

Soit $X$ une variable aléatoire positive.
**1.** Montrer la variante suivante de l'inégalité de Markov : pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq x\}}]}{x} \,.$$

En déduire que si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $\mathbb{P}(X \geq x) = o(1/x)$ lorsque $x \to \infty$.

**2.** Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) \mathrm{d}x \,.$$

**3.** Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
– $\mathbb{E}[X] < \infty$
– il existe $a > 0$ tel que $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X \geq ak) < \infty$
– pour tout $a > 0$ on a $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X \geq ak) < \infty$

**4.** Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi. Montrer que
– si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ alors $\lim_n X_n/n = 0$ presque surement,
– si $\mathbb{E}[X_1] = \infty$ alors $\limsup_n X_n/n = \infty$ presque surement.

**Problème** — Diagonalisation de la transformée de Fourier $L^2$

Nous notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, définie comme le prolongement continu à $L^2$ de l'application définie sur $L^1 \cap L^2$ par

$$f \mapsto \frac{\hat{f}}{\sqrt{2\pi}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} f(x) \mathrm{d}x \right)_{\xi \in \mathbb{R}} ,$$

qui est une isométrie pour la norme $L^2$. On veut déterminer les vecteurs propres de $\mathcal{F}$.
**1.** Soit $\varphi(x) = \exp(-x^2)$. Justifier que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi(x)$ où $H_n$ est un polynôme de degré $n$ (appelé le $n$-ième polynôme de Hermite).
**2.** En développant $\varphi$ en série entière, montrer que pour tout $x, t \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{-(x-t)^2} = e^{-x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{-x^2} G(x, t).$$

où l'on a noté $G(x, t) = \exp(2tx - t^2)$.
**3.** Pour tout $\xi, t \in \mathbb{R}$, on note

$$J(\xi, t) = e^{-t^2} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} e^{2tx - \frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \,.$$

En pensant à la transformée de Fourier d'une densité gaussienne, montrer que pour tout $\xi, t \in \mathbb{R}$, on a

$$J(\xi, t) = \sqrt{2\pi} G(\xi, \mathrm{i}t) e^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} \psi_n(\xi) \,,$$

où $\psi_n(\xi) = \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi)$.
**4.** En remarquant que $\exp(2tx + t^2) = G(\mathrm{i}x, -\mathrm{i}t)$, justifier que les coefficients du polynôme $(-\mathrm{i})^n H_n(\mathrm{i}x)$ sont réels et positifs, égaux aux valeurs absolues des coefficients de $H_n$. En déduire que

$$\left| \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \right| \leq \exp(2t|x| + t^2).$$

**5.** Montrer que pour tout $t, \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$J(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x} G(x,t) e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \hat{\psi}_n(\xi)\,.$$

On prendra bien garde à justifier l'interversion entre somme et intégrale.
**6.** En conclure que $\mathcal{F}\psi_n = \mathrm{i}^n \psi_n$.
**7. (Question subsidiaire)** Montrer que les fonctions $(\psi_n, n \geq 0)$ forment une famille orthogonale de $L^2$, et que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans $L^2$. En déduire que $\mathcal{F}$ a exactement quatre sous-espaces propres de $L^2$ associés aux valeurs propres $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$, et décrire ces sous-espaces.