Partiel

Durée 2h, les notes de cours ne sont pas autorisées

Les trois exercices et le problème sont indépendants. Dans les trois exercices, les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1.— Une identité remarquable

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $]0, \infty[$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $m \leq n$, on a que

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_m}{S_n}\right] = \frac{m}{n} \,.$$

2. Discuter le cas où $m > n$.

Exercice 2.— Une inégalité de Chebychev

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes bornées. Supposons que Y est une variable aléatoire de même loi que X, indépendante.

1. En considérant la variable aléatoire $(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))$, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)] \,.$$

2. Soit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ des nombres réels. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right) \,.$$

Que se passe-t-il si l'on suppose plutôt que $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$?

Exercice 3.— Lois gamma

Soit θ un nombre réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre θ si

$$\mathbb{P}(X \in \mathrm{d}x) = \theta \exp(-\theta x)\mathrm{d}x \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \,.$$

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant cette loi. Montrer que

$$\frac{X}{X+Y} \qquad \text{et} \qquad X+Y$$

sont indépendantes et calculer leurs lois.

Problème — Sous-espaces de L^2 invariants par les translations

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (l'espace des fonctions f à valeurs complexes telles que $|f|^p$ est intégrable, et considérées à égalité λ-presque partout près).
Par ailleurs, pour $h \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$, de sorte que τ_h induit une fonction $\tau_h : L^2 \to L^2$. Enfin, on note e_h la fonction $x \mapsto e^{ihx}$, et $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ la transformée de Fourier L^2.

Le but de ce problème est de caractériser les sous-espaces vectoriels fermés I de L^2 tels que pour tout $f \in I$ et $h \in \mathbb{R}$, on ait $\tau_h f \in I$. On dira que I est *invariant par les translations.*

1. Soit M un sous-espace vectoriel de L^2, et $\mathcal{F}M = \{\mathcal{F}f : f \in M\}$. Montrer que M est fermé si et seulement si $\mathcal{F}M$ est fermé.

2. Montrer que pour tout $f \in L^2$ et $h \in \mathbb{R}$, on a que $\mathcal{F}\tau_h f = \mathrm{e}_{-h}\,\mathcal{F}f$.

3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Notons N_A le sous-espace des $f \in L^2$ telles que $\mathbf{1}_A\, f = 0$, c'est-à-dire que f s'annule presque partout sur A. Montrer que N_A est fermé.

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'ensemble $I_A = \{f \in L^2 : \mathcal{F}f \in N_A\}$ est un sous-espace fermé de L^2 invariant par les translations.

Dans la suite, on se donne un sous-espace fermé I de L^2, invariant par les translations. Notons $J = \mathcal{F}I$, et soit P la projection orthogonale de L^2 sur J.

5. Montrer que pour tout $g \in J$, et tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}_h\, g \in J$.

6. Montrer que pour tout $f \in L^2$ et $g \in J$, la fonction $(f - Pf)\overline{g}$ est dans L^1, et de transformée de Fourier (au sens L^1) nulle. En déduire que $f\,\overline{g} = (Pf)\,\overline{g}$ presque partout. Justifier que l'on peut remplacer $\overline{g}$ par g dans cette égalité.

7. En déduire que pour tout $f, g \in L^2$, on a

$$f\,(Pg) = (Pf)(Pg) = g\,(Pf)\,.$$

8. Posons $g(x) = \exp(-|x|)$ et $\varphi = (Pg)/g$. Montrer que $Pf = \varphi f$ pour tout $f \in L^2$, puis que $\varphi^2 = \varphi$.

9. En déduire que φ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable A, $\varphi = \mathbf{1}_A$, et en conclure que $I = I_A$.

10. Montrer que $I_A = I_B$ si et seulement si $\lambda(A \Delta B) = 0$, où $A\Delta B$ désigne la différence symétrique $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.