

Guillaume Laibe

Le 07/10/2009

Préparation à l'agrégation de chimie : Devoir en temps limité

Option Chimie

Composition de physique

Durée : 4 heures

Calculatrice de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

NB : Hormis l'en tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc... Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page svp

Tribute to Newton :

Né en Angleterre en 1643, Isaac Newton est l'un des savants qui a le plus révolutionné la Science au cours de l'Histoire. Génie universel, on lui doit des contributions absolument essentielles en mathématiques (calcul différentiel), en physique (loi universelle de la gravitation, lois du mouvement, décomposition de la lumière), en astronomie (invention du télescope)... Il est aussi célèbre en Angleterre pour la chasse qu'il entreprit contre les faux-monnayeurs qui permit de stabiliser la monnaie. Il s'intéressa de très près à des domaines plus mystiques, notamment l'étude de la bible et de l'alchimie. Il décède en 1727 en laissant des découvertes qui appartiennent maintenant au patrimoine intellectuel de l'humanité. Sa chaire à l'université de Cambridge est occupée depuis 1979 par Stephen Hawking.

Dans le présent problème, on s'intéresse à quelques unes des contributions scientifiques dues à Isaac Newton, d'une part en optique, d'autre part en mécanique.

Données :

Célérité de la lumière :

$$c = 299\,972\,458 \text{ m.s}^{-1}$$

Constante universelle de la gravitation :

$$\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Unité astronomique (distance Soleil-Terre) :

$$1 \text{ UA} = 150.10^6 \text{ km}$$

Masse du Soleil :

$$M_{\odot} = 2.10^{30} \text{ kg}$$

Masse de Jupiter :

$$M_{\text{J}} = 2.10^{27} \text{ kg}$$

I - Optique

I.1. Dispersion de la lumière par un prisme

On se propose ici d'étudier la dispersion de la lumière par un prisme, phénomène qu'avait remarqué Isaac Newton au cours de ses expériences. On considère donc un prisme à base triangulaire, d'angle au sommet A et constitué d'un matériau d'indice optique n . Un rayon incident de lumière arrivant sur l'une des faces du prisme en faisant un angle i avec la normale est réfracté sous un angle r . Il arrive sur la deuxième face du prisme sous un angle r' avec la normale et ressort par l'autre face en faisant un angle i' (Fig. 2). On note D l'angle de déviation du rayon.

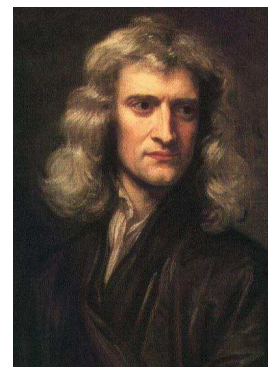


Figure 1: Portrait d'Isaac Newton.

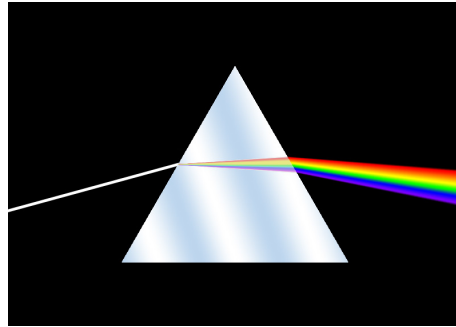
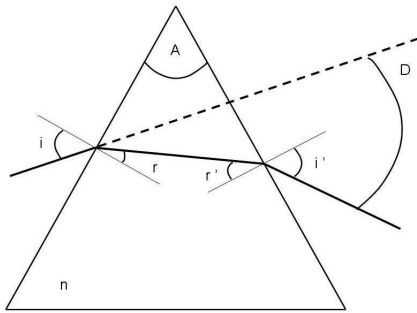


Figure 2: A gauche : Schéma d'un prisme. A droite : Pochette de *The Dark Side of the Moon* du groupe *Pink Floyd*.

I.1.a. Donner les relations liant les différentes grandeurs du problème.

I.1.b. Montrer que lorsqu'on fait varier i , D passe par une valeur minimale D_m . Dans cette configuration, que valent i , i' , r et r' ? En déduire une mesure expérimentale de n .

I.1.c. L'angle incident i étant fixé, déterminer le sens de variation de D en fonction de l'indice n . Rappeler comment varie n en fonction de la longueur d'onde λ . En déduire de quelle manière un prisme sépare la lumière. Où se trouvent la couleur rouge et la couleur bleue dans le prisme de Pink Floyd (Fig. 2). Connaissez vous un phénomène naturel où un tel effet de dispersion se produit ?

I.2. Etude d'un télescope

Newton fut un des pionniers de l'astronomie en inventant le premier télescope dont le principe est encore utilisé en astronomie de nos jours (Fig. 3). On se propose d'étudier quelques caractéristiques d'un tel instrument.

I.2.a. Dans la suite du problème, on se placera dans les conditions de Gauss. Rappeler en quoi elles consistent.

I.2.b. On considère un miroir convexe de sommet S et de centre C . Rappeler la formule de conjugaison du miroir avec origine au sommet reliant la position d'un point objet A de l'axe Sx à son image A' . Placer les foyers.

I.2.c. Soit un objet à l'infini, centré sur le miroir et vu sous un angle α . Construire son image à travers le miroir. Déterminer la nature de l'image, sa position, ainsi que sa taille.

I.2.d. Le télescope du Pic du Midi est constitué d'une association de deux miroirs. Le premier, M_1 est concave, de sommet S_1 et de rayon R_1 . Le second, M_2 est convexe, de sommet S_2 et de rayon R_2 (cf. Fig. 3). Déterminer l'image après réflexion des rayons

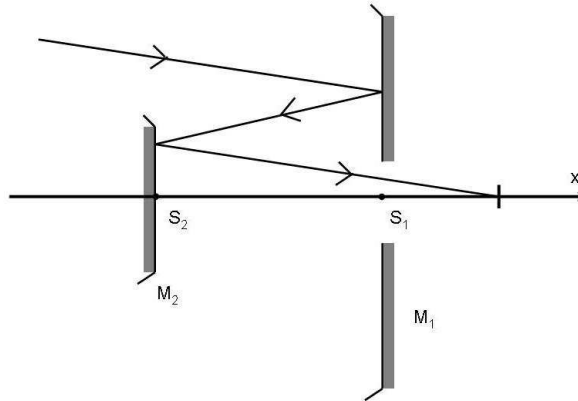


Figure 3: A gauche : un télescope. A droite : modèle d'un télescope.

lumineux sur M_1 puis sur M_2 d'un objet ponctuel à l'infini sur l'axe.

I.2.e. Soit un objet étendu, à l'infini, de diamètre apparent α . Caractériser son image comme en I.2.c.

I.2.f. On donne $R_1 = 19,972$ m, $R_2 = 4,465$ m et $S_2S_1 = 8,184$ m. Quelle est la taille de l'image d'un objet vu sous un angle de 2 secondes d'arc ? Pourquoi utilise-t-on un système constitué de miroirs et non de lentilles ?

I.2.g. En admettant que le télescope est équivalent à une lentille mince, déterminer la position du centre O de cette lentille et sa distance focale image f_1 . Application numérique.

I.3. Anneaux de Newton

Dans une expérience classique, Hook observa que des franges d'interférences concentriques se forment au niveau de la lame d'air comprise entre un plan de verre et la surface sphérique d'une lentille plan-convexe de très grand rayon de courbure (plusieurs mètres). C'est Newton qui établit la relation entre le rayon des anneaux et le rayon de courbure de la lentille. L'origine des *anneaux de Newton* sera expliquée au XIXème siècle par Young.

I.3.a. On réalise une lame d'air d'épaisseur variable en posant sur un plan de verre P une lentille plan-convexe L de rayon de courbure r très grand (cf. Fig.4). On éclaire le dispositif avec une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ . Déterminer l'épaisseur e de la lentille en fonction de x , la distance à l'axe en supposant $e \ll r$.

I.3.b. Par réflexion, on observe sur la face supérieure de la lentille des interférences lumineuses. Que vaut la différence de marche δ entre un rayon incident et un rayon réfléchi ? En notant I_0 l'intensité de la source lumineuse, déterminer l'expression de l'intensité $I(x)$ au niveau de la face supérieure de la lentille.

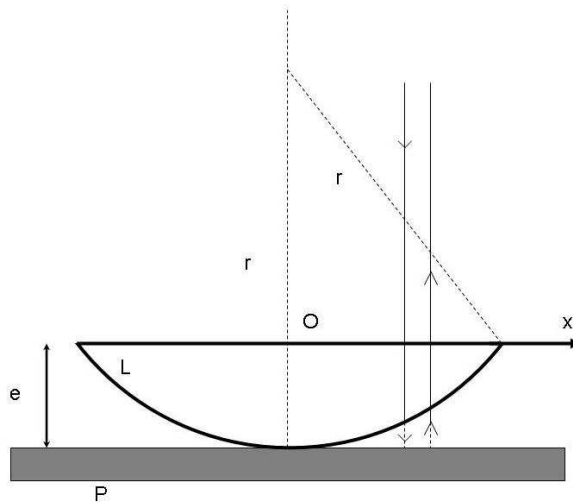


Figure 4: Schéma de principe de l'expérience des anneaux de Newton. Les rayons incidents et réfléchis ont été séparés par souci de lisibilité.

I.3.c. Exprimer la condition pour observer des anneaux noirs. Donner l'expression de x_k , position du k ième anneau, en fonction de λ et r .

I.3.d. Pour $r = 2$ m et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, déterminer le rayon du premier anneau. En déduire quel dispositif utiliser pour observer les figures d'interférence.

I.3.e. Qu'observe-t-on avec une lumière non monochromatique ? Connaissez vous un phénomène naturel où l'on retrouve ce type d'interférences ?

II - Mécanique

Le but de cette partie est de démontrer analytiquement les lois régissant l'évolution de corps célestes à partir de la loi de la gravitation universelle ainsi que des lois de la dynamique découvertes par Newton. On prolongera cette étude par des applications modernes liées à l'observation de planètes extra solaires, ainsi qu'à la formation planétaire.

II.1. Lois de Kepler

On étudie le mouvement de deux masses ponctuelles m_1 et m_2



Figure 5: Isaac Newton vu par Gotlib.

ayant les positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 par rapport à une origine O fixe dans un référentiel inertiel et subissant chacune l'attraction gravitationnelle de l'autre corps.

II.1.a. Quel est le mouvement du centre de masse du système ?

II.1.b. On pose $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, décrivant le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1 . Donner l'équation différentielle vérifiée par \mathbf{r} .

II.1.c. En déduire qu'une quantité vectorielle \mathbf{h} que l'on explicitera est conservée. Quelle en est la conséquence pour la trajectoire ? A quoi correspond physiquement cette grandeur ? En introduisant un repère adapté, en déduire la seconde loi de Kepler (loi des aires).

II.1.d. Projeter l'équation différentielle obtenue précédemment dans le système de coordonnées précédemment défini. En introduisant $u = 1/r$, en déduire une équation différentielle vérifiée par $u(\theta)$.

II.1.e. Résoudre cette équation différentielle et montrer que l'équation de la trajectoire vérifiée par \mathbf{r} se met sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}, \quad (1)$$

où p est une constante que l'on explicitera en fonction des grandeurs physiques du problème. A quoi correspond e ? Pour quelles valeurs de e a-t-on des trajectoires fermées ? En déduire la première loi de Kepler (loi des orbites).

II.1.f. Dans la suite du problème, on ne considèrera que des orbites elliptiques (Fig. 6). On pose $p = a(1 - e^2)$, où a est le demi-grand axe de l'ellipse. On rappelle la relation entre le demi-grand axe et demi-petit axe b de l'ellipse: $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Rappeler l'expression de l'aire d'une ellipse. En déduire la troisième loi de Kepler (loi des aires).

II.2. Application 1: découvertes d'exoplanètes par mesures de vitesses radiales

Depuis 1995 et la découverte de 51 Peg b. par Mayor et Queloz, plus de 400 planètes orbitant autour d'étoiles autres que notre Soleil (des exoplanètes, ou planètes extrasolaires) ont été découvertes. La technique principale utilisée pour détecter de telles planètes est la vélocimétrie radiale. Sous l'action gravitationnelle de la planète de masse m_2 , l'étoile parente de masse m_1 orbite autour du centre de masse du système. Vue de la Terre, l'étoile a une composante de sa vitesse dirigée vers l'observateur. En particulier, les différentes raies spectrales de l'étoile sont décalées par effet Doppler. En mesurant le décalage Doppler des raies, on remonte à la composante de la vitesse de l'étoile autour du centre de masse dans la direction de la Terre. On va montrer que l'on peut en déduire de nombreuses propriétés de la planète responsable de ce mouvement.

II.2.a. Pour simplifier les calculs, on introduit f l'anomalie vraie et n , la vitesse angulaire moyenne, ou *moyen mouvement*, définies par $\theta = f + \varpi$ et $n = \frac{2\pi}{T}$, avec T la

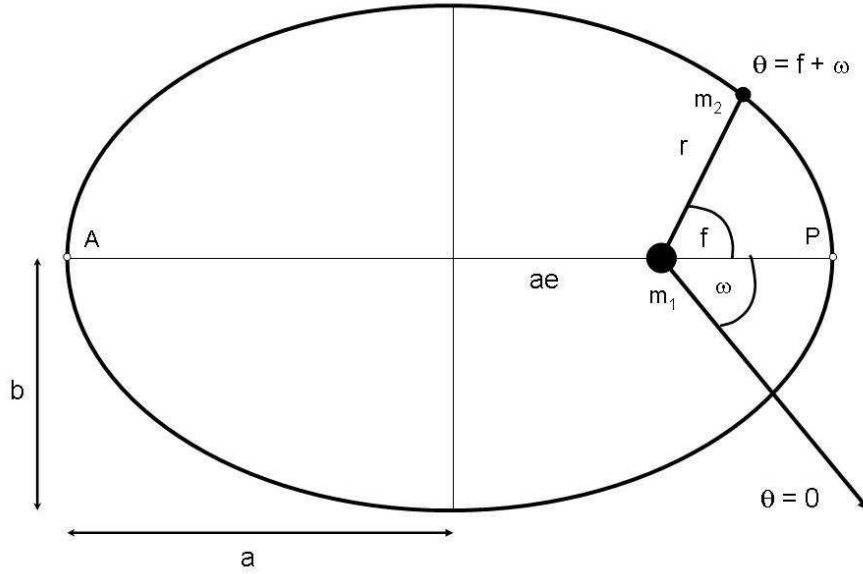


Figure 6: Trajectoire elliptique de la masse m_2 autour de la masse m_1 .

période orbitale du mouvement. Déterminer une relation entre h , n , a et e .

II.2.b. Donner les expressions de \dot{r} et $r\dot{\theta}$ dans un système de coordonnées $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$ en fonction de n , a , e et f .

II.2.c. En déduire que la projection V de la vitesse de la planète autour de l'étoile selon l'axe X (Fig. 7) se met sous la forme :

$$V = k_1 [\cos(\theta + k_2) + e \cos(k_2)], \quad (2)$$

où k_1 et k_2 sont des constantes que l'on explicitera.

II.2.d. Exprimer la vitesse \mathbf{v}' de l'étoile par rapport au centre de masse en fonction de la vitesse \mathbf{v} de la planète par rapport à l'étoile. En déduire V' , projection de la vitesse de l'étoile autour du centre de masse selon l'axe y , en fonction de m_1 , m_2 , i , a , e , ϖ et θ ?

II.2.e. De la Terre, le système formé de l'étoile et de la planète est vu selon une ligne de visée (axe x), qui forme un angle i avec la verticale au plan de l'orbite. En déduire la valeur de V_{obs} , projection de V selon la ligne de visée (Fig. 8).

II.2.f. Quel type de planète observe-t-on plus facilement par ce type de détection ? Justifier le besoin de méthodes complémentaires de détection (ex: méthode du transit).

II.2.g. Des observations spectroscopiques de l'étoile HD 209458, de masse $M = 1,1$

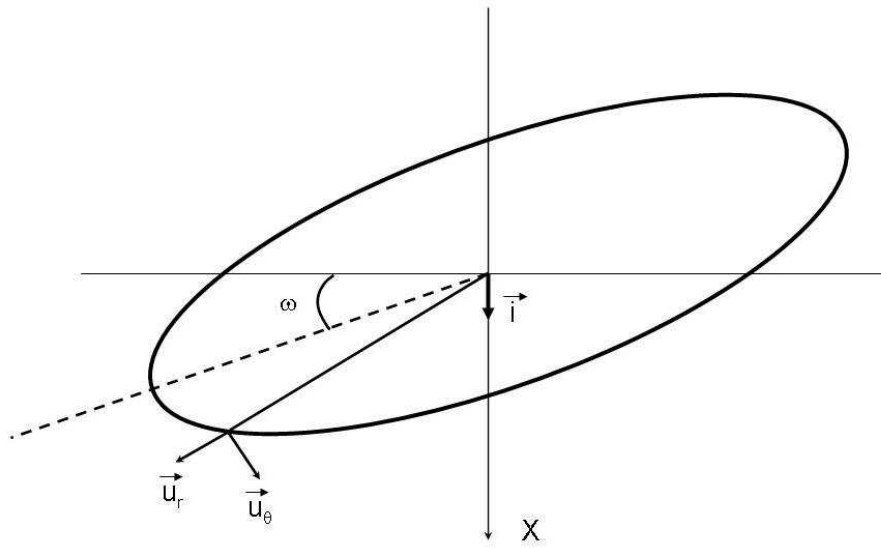


Figure 7: Orbite de la planète autour de l'étoile vue selon la direction \mathbf{X} .

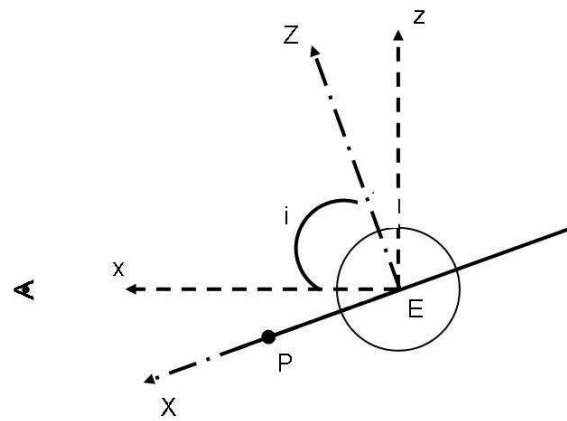


Figure 8: Inclinaison par rapport à la ligne de visée pour un observateur terrestre du plan contenant l'étoile et sa planète.

M_\odot , ont montré des variations de sa vitesse radiale avec une période de $T = 3,524$ jours et une amplitude de $85,9 \text{ m.s}^{-1}$. En déduire le rayon orbital a (en unités astronomiques) de la planète ainsi que la borne inférieure de sa masse M_p (en masses de Jupiter). On supposera que l'excentricité de la planète est négligeable.

II.3. Application 2: Formation planétaire

Il est maintenant clair que les planètes se sont initialement formées par agglomération de petites poussières solides (grains), situées initialement dans un disque de gaz orbitant autour de l'étoile centrale de masse M , appelée nébuleuse protoplanétaire. Sans la présence de cette nébuleuse, les grains de poussière auraient une orbite képlérienne telle qu'étudiée dans la première section de cette partie. Cependant, la friction du gaz sur les grains modifie cette trajectoire de plusieurs manières. On se propose ici d'étudier la relaxation de l'orbite des grains dans le plan médian de la nébuleuse. On modélise la friction exercée par le gaz sur les grains par une force \mathbf{F}_d (régime des gaz dilués dit d'Epstein), donnée par:

$$F_d = -\frac{m_d \rho_g c_s}{\rho s} (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g), \quad (3)$$

où m_d est la masse d'un grain, s sa taille, ρ sa masse volumique, ρ_g la masse volumique du gaz, c_s la vitesse locale du son, \mathbf{v}_d et \mathbf{v}_g respectivement les vitesses du grain et du gaz.

II.3.a. Soit z la coordonnée verticale de la position d'un grain (Fig. 9). En supposant que le gaz de la nébuleuse est à l'équilibre vertical hydrostatique et que r est constant au cours du temps, donner l'équation différentielle vérifiée par z en fonction du temps.

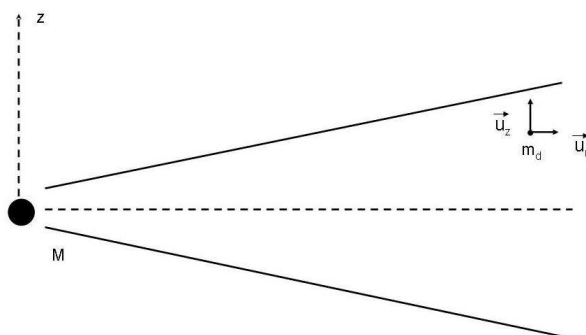


Figure 9: Vue de la tranche d'un disque de gaz situé autour d'une étoile centrale dans lequel se trouve un grain de poussière.

II.3.b. On suppose que $z \ll r$ (disque mince). Comment se simplifie la précédente équation différentielle ? Quels sont les temps caractéristiques qui interviennent dans le problème ? Faire l'analogie entre l'évolution de tel système et d'autres systèmes bien connus en physique.

II.3.c. Déterminer et interpréter les trois régimes d'évolution possibles pour $z(t)$. Donner les solutions générales de l'équation différentielle précédente.

II.3.d. Au bout de quel temps caractéristique les grains ont-ils tendance à sédimenter dans le plan médian $z = 0$? Déterminer la taille des grains pour laquelle le processus de sédimentation est le plus efficace. Quelles sont les conséquences que l'on peut en tirer en ce qui concerne la formation des planètes ?

Fin du problème