

# Recrutement de professeurs agrégés : épreuve blanche

Option Chimie

Composition de physique

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

***NB : Hormis l'en tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc... Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page svp

## Données :

Propriétés de l'acier :

$$\text{Masse volumique : } \rho = 7,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\text{Module d'Young : } E = 2,1 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$$

$$\text{Module de torsion : } G = E/2,6$$

$$\text{Coefficient de dilatation thermique : } \lambda = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Propriétés de l'air aux conditions ambiantes de température et de pression :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

$$M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$$

Constantes universelles :

$$\text{Constante des gaz parfaits : } R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\text{Vitesse de la lumière : } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{Constante de Planck : } h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2.\text{kg.s}^{-1}$$

$$\text{Charge élémentaire : } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Analyse vectorielle :

$$\text{Laplacien vectoriel : } \vec{\Delta} \vec{f} = \text{grad } \text{div} \vec{f} - \text{rot } \text{rot} \vec{f}$$

$$\text{Laplacien scalaire : } \Delta \vec{g} = \text{div grad } \vec{g}$$

$$\text{Laplacien en symétrie sphérique : } \Delta h(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial h(r)}{\partial r} \right)$$

Valeurs des résistances utilisées dans le problème :

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$R_4 = 4.7 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 22 \text{ k}\Omega$$

$$R_6 = 2.2 \text{ k}\Omega$$

$$R_7 = 15 \text{ k}\Omega$$

Valeurs des capacités utilisées dans le problème :

$$C_1 = 4.7 \text{ nF}$$

$$C_2 = 10 \text{ pF}$$

$$C_3 = 10 \text{ }\mu\text{F}$$

$$C_4 = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

## Introduction

La guitare sèche (ou classique), qui tire son nom du Sanskrit "Guit" (musique) et du Perse "Tar" (corde), est un instrument de musique apparu il y a environ 5000 ans en Perse et qui fut introduit au dixième siècle en Europe par les Maures.

De manière générale, la guitare est un instrument à cordes pincées, jouée avec les doigts ou avec un médiator triangulaire que l'on tient entre le pouce et l'index. Les cordes, au nombre de six, ont une longueur vibrante de 65 cm et sont fixées à un chevalet collé à la table (cf figure 2). La vibration de l'air induite par les cordes doit être amplifiée pour être rendue audible.

Dans le cas de la guitare sèche, l'amplification se fait par une caisse de résonance de 49 cm de long environ. Celle-ci comporte une table, un fond quasi-plan et des éclisses de 10 cm de haut à peu près. Au vingtième siècle, la guitare sèche a tiré ses lettres de noblesse d'artistes comme Django Reinhardt ou encore Georges Brassens.

Dans le cas de la guitare électrique (inventée en 1930 par Rickenbacken), la vibration mécanique des cordes est préalablement convertie en un signal électrique à l'aide de microphones (humbuckers) placés sous les cordes à différents endroits sur le corps de la guitare. Ce signal électrique est ensuite amplifié et restitué à l'auditeur par un haut parleur dynamique. Certaines guitares électriques, comme la Fender Stratocaster ou la Gibson Lee Paul sont devenues des instruments mythiques !

Avant l'étape d'amplification, le signal électrique peut être modifié par un circuit électronique appelé pédale d'effet, que le guitariste actionne avec le pied. Ce système permet de modifier le son produit. Les effets les plus connus sont sans doute le wah-wah, rendu célèbre par Jimmy Hendrix, ou encore la distorsion, utilisée pour produire le son puissant des groupes de métal.



Figure 1: Jimmy Hendrix, virtuose de la guitare électrique.

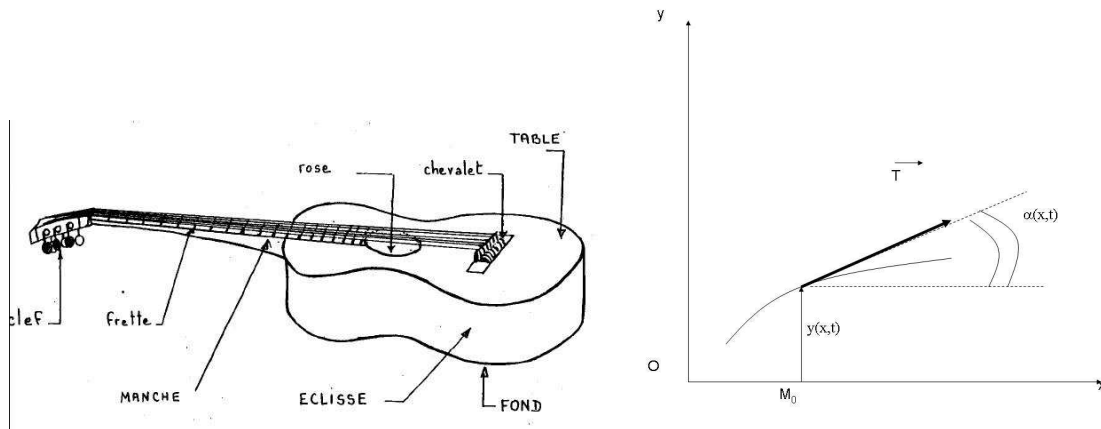


Figure 2: Guitare et modèle de la corde vibrante.

## I - Étude du système excitateur : les cordes de la guitare

### I.1. Modèle de la corde sans raideur

I.1.1. On modélise une corde de guitare par une corde sans raideur, inextensible, de masse linéique constante  $\mu$  et tendue par une tension  $\vec{T}$  (cf figure 2). Au repos, elle se confond avec l'axe  $Ox$ . De part et d'autre de cette position d'équilibre, on étudie les petits mouvements transversaux de cette corde dans le plan  $xOy$ , en admettant qu'un élément de corde au repos (point  $M_0$ ) reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  (point  $M$ ) est noté  $y(x, t)$ . La tangente en  $M$  à la corde fait avec l'axe  $Ox$  un angle  $\alpha(x, t)$  qui reste petit. Les actions du champ de pesanteur sur le mouvement ainsi que toute cause d'amortissement sont négligées.

I.1.1.a. La longueur de la corde varie très peu lorsqu'elle vibre. Montrer qu'à des termes du second ordre en  $\alpha$  près, l'abscisse curviligne peut être confondue avec l'abscisse  $x$ .

I.1.1.b. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour un élément de corde compris entre  $x$  et  $x + dx$ . Montrer à l'aide des hypothèses faites que la tension  $\vec{T}$  est de module constant  $T$  et que l'ébranlement est régi par l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Exprimer la constante  $c$  en fonction de  $T$  et  $\mu$  et donner ses dimensions.

I.1.1.c. Comment nomme-t-on l'équation d'onde précédente ? Quelles sont ses principales propriétés ? Citer des domaines de la physique où l'on retrouve cette équation. Pourquoi dit-on dans ce cas que l'onde est transverse ?

I.1.2. La corde de longueur  $l$  est fixée à ses extrémités, aux deux points de l'axe  $Ox$  d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ .

I.1.2.a. On cherche des solutions de l'équation (1) sous la forme d'une fonction aux variables séparées :

$$y(x, t) = f(x)g(t). \quad (2)$$

Montrer que  $f$  et  $g$  doivent être des fonctions sinusoidales. Quelle est la relation entre  $\omega$  la pulsation temporelle de  $g$  et  $k$ , la pulsation spatiale de  $f$  ?

I.1.2.b. Montrer que les conditions aux limites imposent à  $k$  et à  $\omega$  de ne pouvoir prendre qu'une série de valeurs discrètes notées  $k_n$  et  $\omega_n$  ( $n$  entier strictement positif) et en donner l'expression en fonction de  $l$  et  $c$ . On notera par la suite  $\omega_1$  la pulsation du mode fondamental ( $n = 1$ ). Exprimer aussi la valeur de la longueur d'onde  $\lambda_n$  associée au mode propre  $n$ .

I.1.2.c. Quelle est l'expression d'une solution  $y_n(x, t)$  correspondant au mode de vibration d'indice  $n$  ? En déduire qu'une solution générale de l'équation s'écrit sous la forme d'une série de Fourier :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3)$$

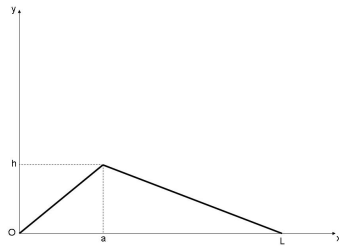


Figure 3: Attaque initiale de la corde vibrante.

I.1.3. On modélise la position initiale de la corde lors de l'attaque par le guitariste par une fonction triangulaire (figure 3). Les conditions initiales sont alors les suivantes : à  $t = 0$ , la corde comporte deux parties rectilignes. Les coordonnées du point d'attaque sont  $x = a$ ,  $y = h$  ( $h \ll l$ ) ; la corde est lâchée sans vitesse initiale. Les coefficients de Fourier de  $y(x, t = 0)$  sont alors donnés par :

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 a(l-a)} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right), \quad (4)$$

$$b_n = 0. \quad (5)$$

I.1.3.a. Exprimer la fréquence du mode fondamental et représenter l'allure de ce mode. A quoi correspond cette fréquence d'un point de vue musical ? Expliquer le rôle des clefs et des frètes d'une guitare (cf figure 2).

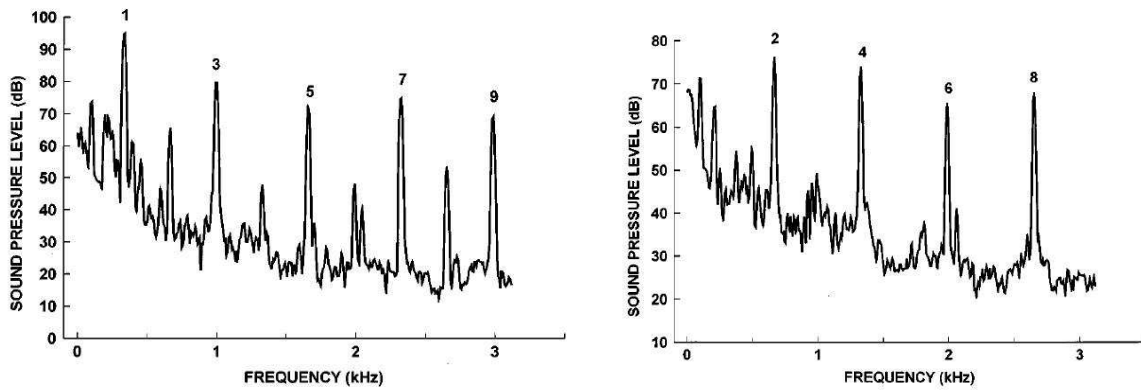


Figure 4: Spectres d'une corde pour différents points d'attaque.

I.1.3.b. En pratique, on maintient la tension des cordes à une valeur à peu près constante et identique pour toutes les cordes. Expliquer pourquoi. Les cordes associées aux notes les plus basses sont-elles les plus grosses ou les plus fines ? Pourquoi les cordes associées aux notes les plus aiguës font-elles plus mal aux doigts ?

I.1.3.c. Quelle valeur choisir pour la masse linéique  $\mu$  afin que le fondamental d'une corde d'acier de longueur  $l = 65$  cm, sous une tension  $T = 100$  N soit un  $mi_3$  à 330 Hz ?

I.1.3.d. Comment se traduit au niveau du spectre la dépendance de  $a_n$  en fonction de  $n$  ? Quelles en sont les conséquences pour le son de la guitare ?

I.1.3.e. Montrer qu'en choisissant un point d'attaque d'abscisse  $a$  convenable, il est possible d'éliminer certaines harmoniques. Commenter ce résultat.

I.1.3.f. La figure 4 donne deux spectres de guitare, l'un mesuré pour un point d'attaque au milieu de la corde et l'autre pour un point d'attaque près du chevalet. Identifier ces deux spectres. Une telle acquisition a été faite avec une précision d'environ 100 mHz. Quelle doit être la durée minimale de l'acquisition permettant d'obtenir les spectres correspondants ?

## I.2. Propriétés d'une corde réelle

I.2.1. En réalité, une corde réelle présente une certaine raideur. L'équation différentielle vérifiée par  $y = f(x, t)$  s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (6)$$

avec  $a^2 = \frac{EI}{\mu}$ , où  $E$  est le module d'Young du matériau et  $I = \frac{\pi r^4}{4}$  pour une corde cylindrique et homogène de rayon  $r$ .

I.2.1.a. Montrer que lorsque  $a$  est suffisamment petit, l'équation (6) admet des solu-

tions sinusoïdales appelées partiels de la note, de fréquences  $f'_n$  telles que :

$$f'_n = f_n \left( 1 + n^2 \frac{EI\pi^2}{2Tl^2} \right), \quad (7)$$

où  $f_n$  est la fréquence de l'harmonique  $n$  pour une corde sans raideur. Pourquoi les sons produits par une corde de raideur non négligeable sont-ils peu agréables pour l'oreille ?

I.2.1.b. On note dans cette question  $f'_{n(l)}$  la fréquence du  $n$ ème partial d'une corde de longueur  $l$ . Montrer que  $f'_{1(l/n)} = f'_{n(l)}$ . En déduire qu'en pinçant la corde à une certaine longueur que l'on déterminera, on peut entendre la fréquence  $f'_n$ .

I.2.1.c. On pose  $\varepsilon = \frac{EI\pi^2}{2Tl^2}$ . La tension  $T$  étant à peu près la même pour toutes les cordes, en déduire que les grosses cordes sont les plus affectées par la correction de raideur.

I.2.2. Par ailleurs, toute corde est aussi sujette à des modes de vibrations longitudinaux et de torsion, dont la fréquence des fondamentaux est donnée respectivement par les expressions :

$$f_l = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{et} \quad f_t = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (8)$$

où  $G$  est le module de rigidité du matériau.

I.2.2.a. Quels modes sont susceptibles d'être entendus pour une corde en acier ? Sont ils gênants dans la pratique ?

I.2.3.b. Pourquoi une corde réelle s'arrête-t-elle de vibrer au bout d'un certain temps ?

### I.3. Influence de la température

I.3.1. Le coefficient de dilatation thermique  $\Lambda$  d'un corps est tel que si la longueur du corps est  $l_0$  à  $0^\circ\text{C}$ , elle vaut  $l = l_0(1 + \Lambda\theta)$  à  $\theta^\circ\text{C}$ . Par ailleurs, le module d'Young d'un corps est tel que si on applique une tension  $T$  (à température constante) à un échantillon de longueur  $l$  et de section  $s$  en restant dans le domaine d'élasticité, cela entraîne un allongement relatif :  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{T}{s}$ .

I.3.1.a. Écrire en fonction des données du problème la variation  $dl$  de la longueur  $l$  d'une corde sous l'action d'une variation de la tension  $dT$  et de la température  $d\theta$ .

I.3.1.b. Sous l'influence d'une variation de température de quelques degrés, le bois de la guitare subit une déformation relative de longueur de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-5}$ . On considère donc que la longueur de la partie vibrante de la corde reste constante. Pour cette transformation, donner la variation de la tension avec la température. Commenter.

I.3.2.a. Comment évolue la masse linéique de la corde au cours de cette transforma-

tion ?

I.3.2.b. En déduire la variation relative de fréquence du fondamental d'une corde due à une variation de température  $d\theta$ . Application numérique pour une corde de guitare en acier telle que  $s = 0,25 \text{ mm}^2$  et  $T = 100 \text{ N}$  pour une élévation de température de  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Commentaires.

I.3.2.c. Citer un autre facteur que la température susceptible de faire varier la fréquence d'une corde de guitare.

## II - Caisse de résonance de la guitare sèche

Lorsque la vibration des cordes excite directement l'air, la puissance des ondes sonores générées est trop faible pour que le son produit soit audible, en particulier pour les basses fréquences. L'ajout d'une caisse de résonance aux dimensions bien choisies permet d'amplifier le son issu de la vibration des cordes. On considèrera que l'air, initialement au repos, peut être assimilé à un gaz parfait, non visqueux, subissant des transformations adiabatiques réversibles. On note  $P$ ,  $\rho$ ,  $\vec{v}$  les champs de pression, masse volumique, vitesse. Le coefficient de compressibilité isentropique de l'air est noté  $\chi_s$ . La pesanteur sera négligée.

II.1. Equation de propagation des ondes sonores dans l'air

II.1.1.a. Écrire l'équation locale de conservation de la masse pour le fluide.

II.1.1.b. Écrire l'équation vectorielle d'Euler pour un fluide parfait.

II.1.1.c. Déterminer le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_s$  d'un gaz parfait en fonction de  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  et de  $P$ . Pourquoi l'approximation isentropique est-elle justifiée ?

II.1.2. On note  $P_0$  et  $\rho_0$  les valeurs moyennes des champs correspondants et  $p = P - P_0$  le champ de surpression. Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique. Cette hypothèse est conservée dans toute la suite du problème.

II.1.3.a. Établir les relations suivantes :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} p, \quad (9)$$

$$\text{div} \vec{v} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (10)$$

II.1.3.b. En déduire les équations de propagation de l'onde acoustique en justifiant soigneusement chaque étape :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p, \quad (11)$$



$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\Delta} \vec{v}. \quad (12)$$

II.1.3.c. Application numérique : calculer  $c$  dans le cas de l'air pour  $T = 25^\circ\text{C}$ . On donne la valeur mesurée :  $c = 346,2 \text{ m.s}^{-1}$ . Commenter.

II.2. Solutions en symétrie sphérique. Impédance acoustique.

II.2.1.a. On cherche les solutions  $p(r, t)$  qui n'ont aucune dépendance angulaire (onde sphérique). Exprimer l'équation (11) dans cette hypothèse.

II.2.1.b. Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation précédente.

II.2.1.c. On cherche des solutions sous forme d'ondes sphériques harmoniques progressives sous la forme complexe suivante :

$$\underline{p}_+(r, t) = p_0 \frac{e^{j(+kr-\omega t)}}{kr}, \quad (13)$$

$$\underline{p}_-(r, t) = p_0 \frac{e^{j(-kr-\omega t)}}{kr}, \quad (14)$$

où le coefficient  $p_0$  est une constante homogène à une pression (les vitesses associées aux champs de pression ayant la même forme). Donner alors les relations de dispersion vérifiées par chacune des solutions. Laquelle se dirige dans le sens des  $r$  croissants ? Laquelle se dirige dans le sens des  $r$  décroissants ?

II.2.1.d. Comment expliquer la dépendance de l'amplitude en fonction de  $r$  ?

II.2.2.a. Rappeler les définitions de l'impédance acoustique  $\underline{Z}$  et de l'admittance acoustique  $\underline{Y}$  pour une onde progressive. Que vaut  $\underline{Y}$  dans le cas de l'onde sphérique harmonique progressive se propageant dans le sens des  $r$  croissants ?

II.2.2.b. Que vaut  $\underline{Y}$  dans la limite  $kr \gg 1$  ? A quel type d'onde cette limite correspond-elle ?

II.2.3. On se sert des résultats précédents pour étudier l'influence du rayonnement sur l'impédance à la sortie d'un tuyau. Pour cela, on regarde l'interface entre des ondes planes et une onde hémisphérique. On considère le modèle suivant (figure ??): dans la région I, les ondes acoustiques (incidente et réfléchi) sont planes, la pression acoustique est  $p_I$  et la vitesse  $u_I$ . Dans la région II, l'onde est sphérique, la pression acoustique est  $p_{II}$  et la vitesse  $u_{II}$ . On appelle impédance de rayonnement  $Z_r$  le rapport  $\frac{p_I}{u_I}$ . C'est l'impédance qu'il faut placer à l'extrémité de l'instrument pour remplacer l'extérieur.

II.2.3.a. Que vaut l'impédance de rayonnement à l'interface en l'absence de rayonnement (pas d'onde transmise) ?

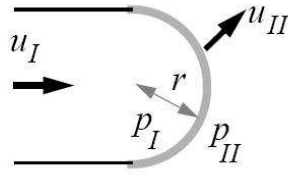


Figure 5: Interface entre une onde plane et une onde sphérique.

II.2.3.b. On tient compte du rayonnement selon le modèle décrit ci-dessus. Déterminer une relation liant  $p_I$  et  $p_{II}$ .

II.2.3.c. Déterminer de même une relation liant  $u_I$  et  $u_{II}$ .

II.2.3.d. Dans la limite des basses fréquences, montrer que dans le modèle précédent, on a :

$$Z_r = -j\rho c (\xi kr + j\sigma k^2 r^2), \quad (15)$$

où  $\xi$  et  $\sigma$  sont des constantes à déterminer.

II.2.3.e. Le modèle précédent permet de modéliser de manière simpliste un instrument diffractant. Un modèle plus approfondi donne  $\xi = 0,8$  et  $\sigma = 0,5$  pour l'impédance de rayonnement d'un instrument de musique dans la limite des basses fréquences. Commenter.

II.3. Caisse de résonance de la guitare.

On modélise la caisse de résonance de la guitare (figure 6) :

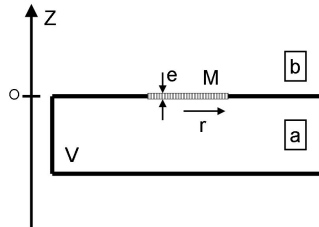


Figure 6: Caisse de résonance de la guitare.

La rose (figure 2) est une ouverture circulaire de rayon  $r$  et de surface  $S$  pratiquée dans la table d'harmonie de volume  $V$ . Une masse d'air  $M$  et d'épaisseur  $e$  (en hachuré) oscille au niveau de la rose : soit  $y$  un déplacement par rapport à la position d'équilibre. Une force de rappel est produite par la compression de l'air dans la cavité quand la masse  $M$  se déplace vers l'intérieur. L'effet du rayonnement acoustique est pris en compte. On

note avec un indice a l'intérieur de la cavité et avec un indice b l'extérieur de la cavité. L'air est toujours assimilé à un gaz parfait, non visqueux. On néglige la gravité.

II.3.1.a. On note  $P$  la pression à l'intérieur de la cavité et  $P_0$  la pression extérieure. Exprimer la force appliquée sur la masse  $M$  en fonction de la surpression  $\Delta P = P - P_0$ .

II.3.1.b. On admet que les échanges d'énergie sous forme de chaleur n'ont pas le temps de se faire lors des déplacements de la masse  $M$ . Montrer alors que la force exercée par la surpression de la cavité peut se mettre sous la forme :

$$\vec{F}_r = -Ky\vec{u}_y, \quad (16)$$

où  $K$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $P_0$ ,  $S$ ,  $V$  et  $\gamma$ .

On modélise l'effet du rayonnement acoustique à l'aide de l'impédance de rayonnement  $Z_r$  donnée par l'équation (15). Pour une ouverture sur un milieu infini, on admet que  $\xi = 0,8$  et  $\theta = 0,5$  et pour une ouverture sur un milieu fermé,  $\xi = 0,8$  et  $\theta = 0$ . On note  $u_a$  et  $u_b$  les vitesses des ondes à l'interface avec la masse d'air qui oscille.

II.3.2.a. Montrer que la force qu'exerce l'onde sphérique rayonnée dans la partie a sur la masse  $M$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{F}_a = \rho S \xi r \frac{du_a}{dt} \vec{u}_y \quad (17)$$

II.3.2.b. Montrer que la force qu'exerce l'onde sphérique rayonnée dans la partie b sur la masse  $M$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{F}_b = -\rho S \xi r \frac{du_b}{dt} \vec{u}_y - S \rho c \sigma k^2 r^2 u_b \vec{u}_y \quad (18)$$

II.3.2.c. Quel est le lien entre  $u_a$  et  $\frac{dy}{dt}$  ? Même question pour  $u_b$  et  $\frac{dy}{dt}$ .

II.3.3.a. Déduire de ce qui précède l'équation qui régit l'oscillation de la masse  $M$ . Commenter le rôle des deux termes issus de l'impédance acoustique. Donner des exemples de systèmes analogues à celui-ci dans différents domaines de la physique.

II.3.3.b. Déterminer la fréquence d'oscillation  $f$  et le facteur de qualité  $Q$  de ce système oscillant. Dans le cas de la guitare, l'ouverture est large et peu profonde ( $e \ll r$ ). Exprimer  $f$  en fonction de  $c$ ,  $r$  et  $V$  et  $Q$  en fonction de  $c$ ,  $r$  et  $f$ . Donner alors leur valeur numérique. On donne  $r = 5$  cm et  $V = 0,70 \times 0,35 \times 0,1$  m<sup>3</sup>.

II.3.3.c. Expliquer pourquoi le diamètre de la rosace est un paramètre que l'on peut difficilement faire varier.

### III - Principe de fonctionnement du micro de guitare électrique

Malgré sa caisse de résonance, la partie précédente a montré que les contraintes physiques sur la guitare sèche étaient suffisamment strictes pour en faire un instrument de musique dont le son est peu modulable. Pour palier ce défaut, on cherche à convertir la vibration mécanique des cordes en un signal électrique, qui pourra ensuite être traité, puis amplifié et finalement restitué par un haut-parleur. Le convertisseur électromécanique est le microphone de la guitare électrique, dont on se propose de voir plus en détail le fonctionnement.

#### III.1. Microphone et induction électromagnétique

III.1.1.a. Définir le phénomène d'induction électromagnétique. Donner l'expression générale d'un champ électrique généré par induction.

III.1.1.b. Quels sont les deux cas limites pour lesquels le phénomène d'induction peut se produire ? Citer un exemple concret illustrant chacun des deux cas.

III.1.2.a. On considère un solénoïde infini dont on néglige la résistance propre, de longueur  $l$ , de section  $S$ , possédant  $N$  spires et parcouru par un courant  $i$ . Rappeler sans démonstration l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. Énoncer le théorème qui vous permettrait de démontrer cette relation.

III.1.2.b. Donner en la justifiant l'expression de l'inductance propre de cette bobine en fonction des différentes grandeurs caractérisant le solénoïde.

III.1.2.c. Donner la relation courant-tension d'une inductance en convention générateur.

III.1.2.d. En utilisant les résultats précédents et en appelant  $\phi$  le flux du champ magnétique à l'intérieur de la bobine, montrer que la tension aux bornes de l'inductance vérifie la relation :

$$u = -N \frac{d\phi}{dt}, \quad (19)$$

Commenter.



Figure 7: Deux micros de guitare.

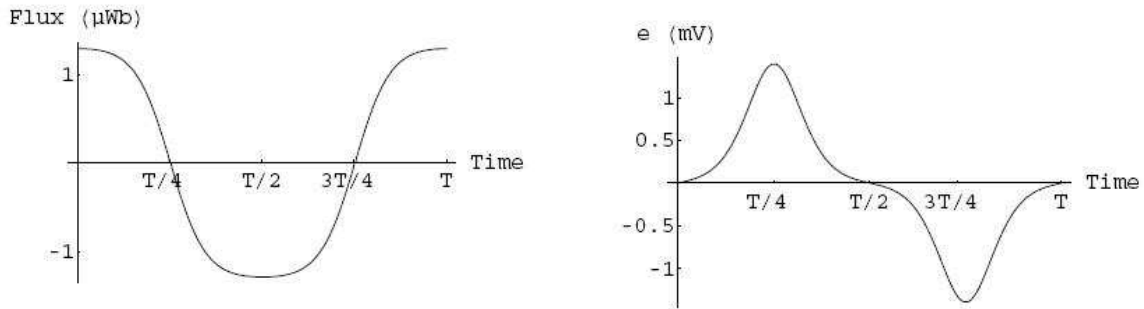


Figure 8: Flux magnétique et force électromotrice mesurés sur le microphone.

III.1.2.c. Un microphone de guitare électrique peut être décrit comme une juxtaposition de six aimants, un pour chaque corde, avec un enroulement de cuivre tout autour (cf figure 7). Chacun des aimants est à la verticale de la corde au repos correspondante. Expliquer le principe du fonctionnement du microphone d'une guitare électrique.

### III.2. Microphone réel.

III.2.1. En réalité, les cordes de guitare électrique sont faites de nickel, d'acier plaqué au nickel ou encore en acier inoxydable. La valeur de la force électromotrice  $e$  induite dans l'enroulement due à la vibration d'une corde peut se mettre sous la forme :

$$e = -NK \frac{d\phi}{dt}, \quad (20)$$

où  $N$  est le nombre de tours de l'enroulement,  $\phi$  est la variation du flux de champ magnétique total dans l'enroulement et  $K$  est une constante adimensionnée.

Commenter cette relation. D'où peut venir la constante  $K$  ? De quelle grandeur associée au matériau peut elle dépendre ?

III.2.2. On donne dans la figure 8 les courbes représentant la variation du flux du champ magnétique normalisé dans l'enroulement et la fem mesurée au cours du temps pour une excitation sinusoïdale de la corde. Commenter.

## IV - Étude d'une pédale d'effet "Harmonic sweetener"

Avant d'être amplifié, le signal électrique produit par le microphone peut être modifié à l'aide d'un circuit électronique adéquat, ou pédale d'effet, afin de modifier le son qui sera restitué par les hauts parleurs. On se propose dans cette partie d'étudier le principe d'une pédale d'effet "Harmonic sweetener" ou adoucisseur d'harmoniques, dont le schéma électrique est donné par la figure 9 .

### IV.1. Rappels d'électronique

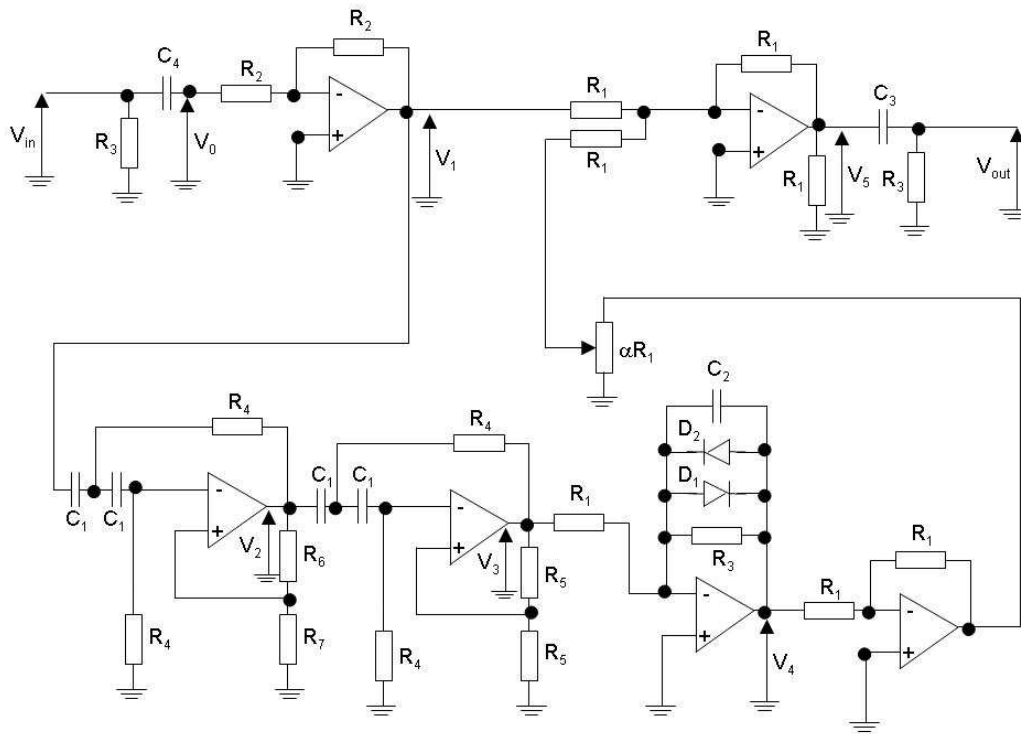


Figure 9: Schéma de la pédale d'effet "Harmonic Sweetener".

IV.1.1.a. Rappeler les propriétés d'un amplificateur opérationnel réel et définir la limite de l'amplificateur opérationnel parfait. Définir le régime linéaire. Dans la suite du problème, on supposera les différents amplificateurs opérationnels parfaits et on considèrera des gammes de fréquence qui permettent de négliger sa réponse temporelle.

IV.1.1.b. Quel est l'intérêt de faire des filtres avec des amplificateurs opérationnels (dits filtres actifs) plutôt que sans (dits filtres passifs) ?

IV.1.2.a. Rappeler les comportements limites d'une capacité à basse et à haute fréquences. Quels types de condensateurs fabrique-t-on utiliser pour réaliser de telles capacités ? Quelles en sont les limites ?

IV.1.2.b. Pourquoi n'utilise-t-on pas de bobines dans les circuits électroniques usuels ?

IV.1.3.a. Rappeler la caractéristique courant-tension d'une diode idéale (on considère toutefois que la tension de seuil  $V_D$  de la diode est non nulle). Quels types de matériaux utilise-t-on pour faire une diode ?

IV.1.3.b. On utilise des diodes électroluminescentes (DEL's) dont la tension de seuil est 1,5 V. De quelle couleur est-elle ?

## IV.2. Étude du bloc inverseur

IV.2.1. Quel est le rôle de la capacité d'entrée  $C_4$  et de la résistance d'entrée  $R_3$  ? Justifier que pour les fréquences des signaux électriques générés par les micros de la guitare,  $V_0 \simeq V_{in}$ .

IV.2.2. En déduire la valeur de  $V_1$  en fonction de  $V_{in}$ .

## IV.3. Filtres de Sallen et Key

IV.3.1.a. On étudie maintenant la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_2}{V_1}$ . Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{-K \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_c} - \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}, \quad (21)$$

où  $K$ ,  $Q$  et  $\omega_c$  sont des grandeurs caractéristiques du problème que l'on déterminera. Pour simplifier le calcul, on pourra poser  $\beta = \frac{R_7}{R_6 + R_7}$ .

IV.3.1.b. Donner les valeurs numériques de  $f_c$  et de  $Q$ .

IV.3.1.c. Quelle est la nature d'un tel filtre ? Tracer le diagramme de Bode en amplitude et en phase correspondant.

IV.3.2. Mêmes questions pour la fonction de transfert  $\underline{H}' = \frac{V_3}{V_2}$ . Quel est l'intérêt de mettre ces deux blocs à la suite l'un de l'autre ?

## IV.4. Bloc de clipping

IV.4.1.a On considère que les diodes  $D_1$  et  $D_2$  sont parfaites avec une tension seuil  $V_d$ .  $D_1$  et  $D_2$  peuvent elles être passantes simultanément ? Que vaut  $V_4$  lorsque la diode  $D_1$  est passante ?

IV.4.1.b. Que vaut  $V_4$  lorsque la diode  $D_2$  est passante ?

IV.4.1.c. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}'' = \frac{V_4}{V_3}$  lorsque  $D_1$  et  $D_2$  sont bloquées . Quelles sont la nature et les caractéristiques du filtre obtenu ?

IV.4.2.a. On suppose que le signal d'entrée du bloc de clipping est sinusoïdal. Tracer qualitativement l'allure du signal de sortie en fonction du temps.

IV.4.2.b. Quel peut être l'intérêt du point de vue musical de changer la valeur de la résistance  $R$  ?

IV.5. Sommateur et signal de sortie.

IV.5.1.a. Déterminer la valeur de  $V_5$  en fonction de  $V_1$  et  $V_4$ .

IV.5.1.b. Quel est le rôle de la capacité et de la résistance de sortie ?

IV.5.2.a. On décompose le signal d'entrée en somme de ses harmoniques successives :

$$V_{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} (V_n \cos(n\omega t) + V'_n \sin(n\omega t)) . \quad (22)$$

En déduire une expression du signal  $V_{\text{out}}$  sans détailler l'expression des différents coefficients de Fourier que l'on introduira.

IV.5.2.b. En déduire l'intérêt musical de la pédale "Harmonic sweetener".

## V - Production du son : le haut parleur de basses

Après avoir été transformé par la pédale d'effet, le signal électrique est amplifié puis arrive à l'entrée d'un haut parleur électromagnétique. Le signal électrique est alors retranscrit en un signal sonore. Dans cette partie, on s'intéresse au fonctionnement du haut parleur et aux caractéristiques qui rendent le son produit audible par un spectateur !

### V.1 Modélisation du haut-parleur

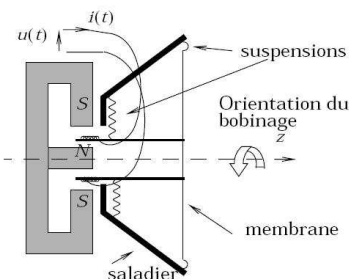


Figure 10: Schéma en coupe d'un haut parleur.

On considère le haut-parleur représenté en coupe sur la figure 10, possédant la symétrie de révolution autour de  $Oz$ . Il comporte :



- Un équipage mobile de masse  $m$ , constitué d'une membrane plane de surface  $S$ , solidaire d'un tube sur lequel est collé une bobine de résistance  $R$  et d'inductance négligeable, réalisée avec un fil de longueur  $l$ .
- Un socle fixe comportant un aimant qui crée un champ magnétique radial centrifuge de module  $B$  uniforme dans son entrefer, où est logée la bobine. Sur ce socle est fixé un saladier conique.
- Des suspensions latérales entre le saladier et l'équipage mobile qui réduisent les mouvements de ce dernier à une translation selon  $Oz$  et dont on néglige la force de rappel.

On note  $\underline{u}$ ,  $\underline{i}$  et  $\underline{v}$  les grandeurs complexes associées respectivement à la tension, l'intensité dans le circuit électrique et à la vitesse de l'équipage mobile.

V.1.1.a. Déterminer l'équation électrique du haut parleur en utilisant les variables  $\underline{u}$ ,  $\underline{V}$  et  $\underline{i}$ .

V.1.1.b. Déterminer l'équation mécanique du haut parleur régissant le mouvement de l'équipage mobile sur l'axe  $Oz$ , en utilisant les variables  $\underline{V}$  et  $\underline{i}$ .

V.1.2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{u}}$ . Quelle est la nature du filtre obtenu ? Commentaires.

V.2. Création d'une onde sonore

Du point de vue de son rayonnement, un haut parleur peut être modélisé en première approximation par un disque plan de rayon  $a$  (cf figure 11). On repère la position du disque sur l'axe  $Oz$  par sa cote  $\xi(t)$ , prise nulle au repos, et on note  $V(t) = \dot{\xi}(t)$ . On se place en régime sinusoïdal, de telle sorte que  $\underline{\xi} = \xi_0 e^{j\omega t}$ . On admet que le disque impose les conditions aux limites de l'onde qu'il rayonne et que l'onde est localement plane au voisinage du disque. On pose alors :  $\underline{v}(0) = \underline{V}$  et on note  $\underline{p}(0)$  la surpression supposée uniforme au niveau de la face du disque dirigée vers les  $z$  croissants.

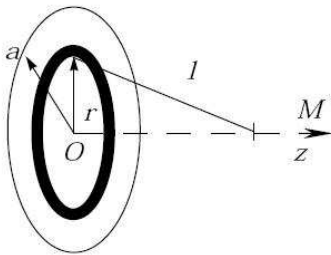


Figure 11: Création d'une onde sonore par la membrane du haut parleur.

V.2.1.a. On s'intéresse à la pression sur l'axe au point  $M$ , de coordonnées  $(0,0,z)$  avec

$z > 0$ . On applique le principe de Huygens-Fresnel en écrivant que la pression élémentaire de rayon  $r$  de la membrane vaut :

$$\delta \underline{p}(z) = K \underline{p}(0) 2\pi r \delta r \frac{e^{-jkl}}{l}, \quad (23)$$

avec

$$l = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (24)$$

Justifier chaque terme de cette expression.

V.2.1.b. En déduire la relation

$$\underline{p}(z) = \underline{A} \left( e^{-jk\sqrt{z^2+a^2}} - e^{-jkz} \right), \quad (25)$$

en exprimant  $\underline{A}$  en fonction des données.

V.2.1.c. Pour cette question, on suppose que le milieu est légèrement absorbant. Traduire cette propriété sur  $k$ . Que devient  $\underline{p}(z)$  lorsque  $a \rightarrow \infty$  ? Quelle est alors la nature de l'onde ? En déduire que  $\underline{A} = -\underline{p}(0)$ . On admet la généralité du résultat et on adopte cette valeur dans la suite du problème.

On se place maintenant dans des conditions de champ lointain :  $z \gg a$  et  $\frac{\lambda}{a} \gg \frac{a}{z}$ , avec  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Dans ces conditions, on suppose que les ondes sont localement planes, et on pourra utiliser à bon escient les résultats de II.2.2.b .

V.2.2.a. Pour quelles longueurs d'onde ces conditions de champ lointain sont elles vérifiées pour un haut parleur de surface  $S = 73 \text{ cm}^2$ , à  $z = 1 \text{ m}$  ?

V.2.2.b. Montrer que dans ces conditions, on a :

$$|\underline{p}(z)| = \frac{\rho_0 \xi_0 S \omega^2}{2\pi z}. \quad (26)$$

V.2.2.c. Calculer pour le haut parleur de référence l'amplitude de vibration du disque produisant une puissance surfacique  $\Pi$  de  $10^{-3} \text{ W.m}^{-2}$  (soit 90 dB) à 1 m du disque sur l'axe pour  $f = 1 \text{ kHz}$  et  $f = 60 \text{ Hz}$ .