Guillaume Laibe
Agrégation de Chimie
décembre 2009

Thermodynamique : TD 2 - Diffusion

I - Diffusion d'un pic de concentration

On regarde un phénomène d'autodiffusion moléculaire monodimensionnel suivant l'axe Ox de molécules "marquées" d'un liquide à l'équilibre. Cette diffusion moléculaire s'opère sur un tube cylindrique de section S suffisamment long pendant une durée d'étude suffisamment courte pour négliger les effets de bord aux extrémités. A $t = 0$, les molécules étudiées sont très fortement concentrées dans le plan $x = 0$. Soient N_0 leur nombre, D leur coefficient d'autodiffusion et $n(x,t)$ la densité moléculaire volumique (en m^{-3}) à l'abscisse x à l'instant t.

I.1.1 Énoncer la loi de Fick. Que traduit elle ? Quel est son domaine de validité ?

I.1.2 Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$. Que traduit cette équation ?

I.1.3 A quelle condition sur a la fonction $n(x,t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}}e^{-\frac{ax^2}{t}}$ est elle solution de l'équation de diffusion ? Commentaires.

I.1.4 En utilisant une loi de conservation ad hock, déterminer la valeur de K satisfaisant aux conditions initiales.

I.1.5 Tracer et justifier l'allure de la courbe $n(x,t)$ à deux instants différents.

I.2.1 Soit une tranche d'épaisseur dx. Quel est le nombre de molécules marquées présentes dans cette tranche à l'instant t ?

I.2.2 En déduire la probabilité $\mathrm{d}P = P(x,t)\mathrm{d}x$ pour une molécule marquée d'être à l'instant t dans le tranche en x d'épaisseur dx.

I.2.3 Déterminer l'abscisse moyenne $\langle x\rangle$ et la distance quadratique moyenne x_m définies par :

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)\mathrm{d}x,\ x_m = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2P(x,t)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},$$

ainsi que la vitesse $v_m = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

I.2.3 Application numérique : dans le cas de l'eau, D =1,8.10^{-9}m^{2}s^{-1} ; calculer x_m et v_m pour $t = 10$s. Commentaires.

On donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}u^2\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2.$$

II - La sensation de chaud

Le but de cet exercice est de comprendre l'origine de la sensation de chaud et de résoudre certains "paradoxes" de la vie quotidienne : pourquoi ne se brûle-t-on pas en mettant sa main à l'intérieur d'un four chaud ? Pourquoi peut on s'asseoir sur le bois des sièges d'un sauna, alors que l'on se brûle en passant la main sur une vis en métal du même siège ?

II.1.1 Énoncer la loi de Fourier en notant λ la conductivité thermique. Commentaires.

II.1.2 On appelle ρ la masse volumique d'un corps et c sa capacité calorifique massique. Écrire l'équation de la chaleur à une dimension en faisant intervenir un coefficient de diffusion D.

II.1.3 L'équation de la chaleur admet comme solution mathématique $f_D(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} \mathrm{d}y$, où $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$, avec $f_D(+\infty, t) = 1$ et $f_D(-\infty, t) = -1$. Commenter cette solution.

II.2.1 On admet qu'à l'interface, il s'établit une température stationnaire T_0. Le justifier par un argument simple.

II.2.2 On cherche une solution dans chaque corps i sous la forme $T(x,t) = a_i + b_i f_{D_i}(x,t)$ (D_i (coefficient de diffusion du milieu i). Déterminer les constantes a_i et b_i en fonction de T_0 et T_i (i = 1,2).

II.2.3 Etablir les expressions des flux de chaleur j_i dans chaque milieu.

II.2.4 En déduire l'expression de T_0 en fonction de T_1, T_2 et des effusivités des deux corps définis par $E = \sqrt{\rho c \lambda}$.

II.3.1 En quoi ce modèle sert il à expliquer la sensation de chaud ?

II.3.2 On considère qu'un sauna a une température moyenne de 85°C. On donne les effusivités suivantes : E_1= $1.8.10^3 \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}s^{\frac{1}{2}}}$ pour la main, E_2= $0.4.10^3 \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}s^{\frac{1}{2}}}$ pour le bois, et E_3= $14.10^3 \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}s^{\frac{1}{2}}}$ pour l'acier.. Résoudre le paradoxe du sauna.

Figure 1: Un sauna...