

Géométrie I

Auguste Hoang Duc

2009

Table des matières

1	Géométrie affine	4
I	Espaces affines	4
• A	Définition	4
• B	Sous-espaces affines	4
• C	Parallélisme	5
II	Applications affines	5
• A	Définition	5
• B	Exemples	5
• C	Point fixe et décomposition canonique	6
• D	Décomposition canonique	6
• E	Translations et homothéties	8
III	Barycentres	8
• A	Définition	8
• B	Propriétés fondamentales	9
• C	Applications du barycentre	9
2	Géométrie Euclidienne	14
I	Définitions	14
II	Structures des isométries affines	15
• A	Parties génératrices	15
• B	Topologie	15
• C	Réduction	15
• D	Action de $SO(\vec{E})$ sur \vec{E} et $S(0, 1, \vec{E})$	16
• E	Simplicité de $SO(\mathbb{R}^n)$	17
III	Pavage et théorème de Bieberbach	18
IV	Géométrie euclidienne plane	18
• A	Angles orientés de vecteurs	18
• B	Angles orientés de droites	19
• C	Angle géométrique	19
• D	Quelques théorèmes sur les angles	19
• E	Isométries et déplacements du plan	21
V	Géométrie euclidienne dans l'espace	23
• A	Classification des isométries vectorielles	23
• B	Classification des isométries affines	23

• C	Formule d'Euler et formule de Girard	25
3	Géométrie projective	27
I	Espaces projectifs	27
• A	Définition	27
• B	Topologie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	27
• C	Sous-espaces projectifs	28
II	Applications entre espaces projectifs	28
• A	Groupes des homographies	28
• B	Repères projectifs et coordonnées homogènes	29
• C	Homographies de la droite projective	30
III	Birapport	30
IV	Complétion projective	31
• A	Complété d'un espace vectoriel	31
• B	Choix de l'infini	32
• C	Prolongement des applications affines	33
V	Dualité projective	34
VI	Automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$	35
4	Les nombres complexes en géométrie	36
I	Calcul dans \mathbb{C}	36
• A	Coordonnées cartésiennes	36
• B	Module et argument	36
• C	Angles et applications conformes	39
5	Espace des cercles et groupe circulaire	40
I	Espace des cercles	40
• A	Calculs préliminaires	40
• B	Équations formelles et formes quadratiques	40
• C	Signature de q	41
• D	L'espace projectif des cercles-droites	41
• E	Orthogonalité	41
• F	Tangence	43
II	Faisceaux de cercles	44
• A	Définition	44
• B	Puissance d'un point par rapport a un cercle	44
• C	Axe radical de deux cercles	45
• D	Classification des faisceaux de cercle à similitude près ($GA(\mathbb{R}^2)$) et à homographie près ($PGL_2(\mathbb{C})$)	46
III	Groupe circulaire	48
• A	Inversion analytique et géométrique	48
• B	Action sur les cercles droites	49
• C	Groupe circulaire	51

6	Quadriques	52
I	Définitions	52
II	Liaison projectif/affine	52
III	Droites et quadriques	53
	• A Intersection entre droites et quadriques	53
	• B Intersection double et tangence	53
	• C Tangentes à une conique passant par un point	54
IV	Quadrique à centre	55
V	Classification des quadriques projectives	55
VI	Classification des côniques de \mathbb{R}^2	56
	• A Classification affine	56
	• B Classification euclidienne	57
	• C 2 descriptions euclidiennes des côniques	57
	• D Synthèse sur les côniques	60
	• E Quelques théorèmes	61
VII	Classification affine des quadriques	62
	Index	62
	Bibliographie	65

Chapitre 1

Géométrie affine

I Espaces affines

• A Définition

Définition I.1. Un *espace affine* est un ensemble E munie d'un espace vectoriel \vec{E} et d'une action de \vec{E} sur E simplement transitive (i.e. pour tout $A \in E$, $\vec{E} \rightarrow E, u \mapsto A + u$ est bijective). Un élément de E est appelé un *point*, l'espace \vec{E} s'appelle la direction de E et le nombre $\dim \vec{E}$ est sa dimension.

Remarque I.2. L'ensemble vide est espace affine dirigé par n'importe quel espace vectoriel.

Exemple I.3. .

- Un espace vectoriel \vec{E} est un espace affine dirigé par lui-même.
- Le produit $E_1 \times E_2$ est un espace affine dirigé par $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$.

Définition I.4. Un *vectorialisé* d'un espace affine est le choix d'un point $A \in E$, auquel cas la bijection $\vec{E} \rightarrow E, \vec{u} \mapsto a + \vec{u}$ munie E d'une structure d'espace vectoriel. La bijection réciproque est noté $\Theta_A : \mathcal{E} \rightarrow E, B \mapsto \overrightarrow{AB}$.

• B Sous-espaces affines

Définition I.5. Un *sous-espace affine* de E est un sous-ensemble $F \subset E$ tel que :

$$\forall A \in F, \Theta_A(F) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Si F est vide, Cela équivaut à :

$$\exists A \in F, \Theta_A(F) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Cet espace vectoriel, noté \vec{F} , est indépendant du point A , et l'action induite par \vec{F} donne à F une structure d'espace affine.

Démonstration. Si $A, B \in E$ alors $\Theta_B(F) = \Theta_A(F) + \overrightarrow{AB}$ (en effet : $u \in \Theta_B(F) \Leftrightarrow B + \vec{u} \in F \Leftrightarrow A + \overrightarrow{AB} + u \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + u \in \Theta_A(F)$). Donc si $\Theta_A(F)$ est un espace vectoriel alors comme $\overrightarrow{AB} \in \Theta_A(F)$ on a $\Theta_B(F) = \Theta_A(F)$. \square

Exemple I.6. Si $f : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ est une application linéaire et $v \in \text{Im } f$, alors $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de \vec{E} de direction $\ker f$. On notera alors $F//G$.

Définition I.7. On dit que des points A_0, \dots, A_k sont *affinement libres* si le sous-espace affine $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ engendré par A_0, \dots, A_k est de dimension k , auquel cas on dit que A_0, \dots, A_k est un repère affine de $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$.

[Voir la section sur le barycentre pour les repères affines]

• C Parallélisme

Définition I.8. On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles si leur directions sont égales.

Définition I.9. On dit que F et G sont faiblement parallèles si $\vec{F} \subset \vec{G}$ ou $\vec{F} \supset \vec{G}$.

Remarque I.10. Si $F//G$ alors $F = G$ ou $F \cap G = \emptyset$. En effet si $F \cap G \neq \emptyset$ alors pour $x \in F \cap G$, on a $F = x + \vec{F}$ et $G = x + \vec{G}$.

Proposition I.11 (Postulat d'Euclide). Pour F sous-espace affine de E et x un point de E , il existe un unique G parallèle a F passant par x .

Démonstration. Le seul G qui convient est $x + \vec{F}$. □

II Applications affines

• A Définition

Définition II.1. Un application $f : E \rightarrow F$ est dite *affine* s'il existe $O \in E$ tel que :

$$\begin{aligned} \vec{E} &\longrightarrow \vec{F} \\ u &\longmapsto \overrightarrow{f(O+x)f(O)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

est linéaire. Ce qui est équivalent à pour tout $O \in E$, l'application (1.1) est linéaire, auquel cas elle est indépendante du point O et on le note \vec{f} .

• B Exemples

Exemple II.2. – Si f est constante alors $\vec{f} = 0$.

– Si ϕ est une application linéaire de \vec{E} vers \vec{F} et $A \in E, B \in F$, alors $f(X) = B + \phi(\overrightarrow{AX})$ est affine et $\vec{f} = \phi$.

– **Translation** : si $f : E \rightarrow E$ est telle que $\vec{f} = Id$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$.

– **Homothétie** : application $f : E \rightarrow E$ telle que $\vec{f} = \lambda Id$, avec $\lambda \neq 1$. L'application f admet alors un unique point fixe

– **Symétrie centrale** : application $f : E \rightarrow E$ telle que $\vec{f} = -Id$. L'application f admet un unique point fixe.

- **Symétrie** : application $f : E \rightarrow E$ telle que \vec{f} est une symétrie et f admet un point fixe. Alors l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - Id)$ (regarder les symétries glissées).
- **Projecteur** : application $f : E \rightarrow E$ telle que \vec{f} est un projecteur et f admet un point fixe. Alors l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - Id)$.
- **Affinité** : application $f : E \rightarrow E$ telle que \vec{f} est une affinité et f admet un point fixe.

Proposition II.3. Si $f : E \rightarrow F$ est affine, alors l'image directe et réciproque d'un sous-espace affine est un sous-espace affine.

Démonstration. Exercice. □

• C Point fixe et décomposition canonique

Proposition II.4. Soit $f : E \rightarrow E$. On pose $E_1(f) = \ker(\vec{f} - Id)$ et $F_1(f) = \text{Im}(\vec{f} - Id)$.

- Si 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} , alors f admet un unique point fixe.
- Si 1 est valeur propre de \vec{f} et si $\exists A \in E, \overrightarrow{Af(A)} \notin F_1(f)$, alors $\forall A \in E, \overrightarrow{Af(A)} \notin F_1(f)$ et f n'a pas de point fixe.
- Si 1 est pas valeur propre de \vec{f} et si $\exists A \in E, \overrightarrow{Af(A)} \in F_1(f)$, alors $\forall A \in E, \overrightarrow{Af(A)} \in F_1(f)$ l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine non vide de direction $E_1(f)$.

Démonstration. On a pour tout $A \in E$ et $X \in E$:

$$\begin{aligned} f(X) = X &\iff f(A) + \overrightarrow{f(A)f(X)} = X + \overrightarrow{AX} \\ &\iff (\vec{f} - Id)(\overrightarrow{AX}) + \overrightarrow{Af(A)} = 0 \\ &\iff X \in A + (\vec{f} - Id)^{-1}(\overrightarrow{f(A)A}). \end{aligned}$$

Donc pour tout $A \in E, \text{Fix}(f) = A + (\vec{f} - Id)^{-1}(\overrightarrow{f(A)A})$, ce qui permet de conclure facilement. □

• D Décomposition canonique

Définition II.5. Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine. On dit que f admet une *décomposition canonique*, s'il existe un unique couple (τ, h) avec τ translation et h admettant un point fixe tel que $f = \tau \circ h = h \circ \tau$.

Proposition II.6. Soit $f : E \rightarrow E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f admet une décomposition canonique.
2. $E_1(f) \oplus F_1(f) = \vec{E}$.

Démonstration. On pose $\phi = \vec{f}$. Si $E_1(f) \oplus F_1(f) = \vec{E}$, on note π_1 et π_2 les projecteurs sur $E_1(f)$ et $F_1(f)$. On cherche h avec point fixe et $u \in \vec{E}$ tel que $f = h \circ \tau_u = \tau_u \circ h$.

Analyse : Soient h, u tels que $f = h \circ \tau_u = \tau_u \circ h$. On a alors $\vec{h} = \vec{f} = \phi$ et $\phi(u) = u$, soit $\pi_1(u) = 0$. Soit A un point fixe de h et $O \in E$ quelconque. Comme $f(O) = h(O) + u$ on $\pi_1(\overrightarrow{Of(O)}) = \pi_1(\overrightarrow{Oh(O)}) + \pi_1(u) = \pi_1(\overrightarrow{Oh(O)}) + u$ soit :

$$u = \pi_1(\overrightarrow{Of(O)}) - \pi_1(\overrightarrow{Oh(O)}).$$

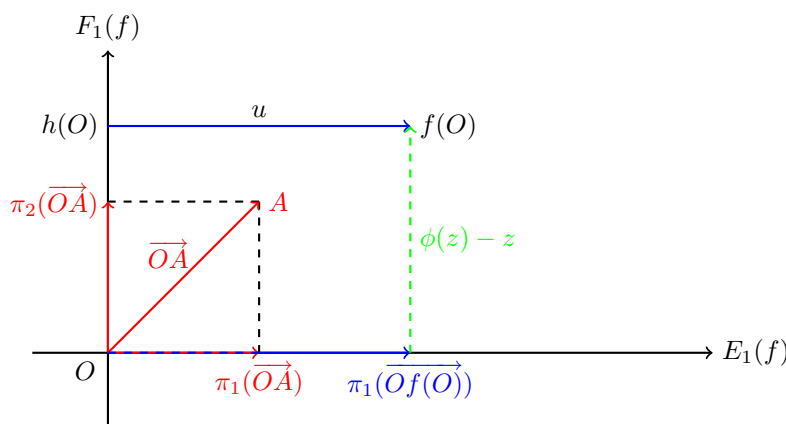
Or comme A est fixe on a $\overrightarrow{Ah(O)} = \phi(\overrightarrow{AO})$, puis $\overrightarrow{Oh(O)} = \overrightarrow{OA} - \phi(\overrightarrow{OA}) \in F_1(f)$, donc $\pi_1(\overrightarrow{Oh(O)})$.
D'où :

$$u = \pi_2(\overrightarrow{Of(O)}).$$

On en déduit que u est unique (même si O a été choisit arbitrairement), puis $h = f \circ \tau_{-u} = \tau_{-u} \circ f$.

Si on note $z = \pi_1(\overrightarrow{AO}) \in F_1(f)$ et $b = \pi_2(\overrightarrow{AO}) \in E_1(f)$, alors $O = A + b + z$ et $h(O) = A + b + \phi(z) = O - z + \phi(z)$, donc $O - z$ est fixe par h .

Synthèse : On prend $O \in E$ et on pose $u = \pi_2(\overrightarrow{Of(O)})$ et $h = \tau_{-u} \circ f$. On prend $z \in F_1(f)$ tel que $(\phi - Id)(z) = \overrightarrow{Of(O)} - u$. Alors $h(O - z) = f(O) - \phi(z) - u = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} - z = O + z$, donc h admet un point fixe. On a $u \in F_1(f) = \ker(\overrightarrow{h} - id)$ donc h commute avec τ_u .



Réciproquement, si f admet une décomposition canonique $f = h \circ \tau$. Alors h admet aussi une unique décomposition canonique $h = h \circ \tau_0$. Soit $v \in E_1(f) \cap F_1(f)$. On pose pour $X \in E$, $g(X) = h(X) - v$. Comme $v \in E_1(h)$, τ_v commute avec h , donc $\tau_v \circ g = g \circ \tau_v = h$. Montrons que g admet un point fixe, c'est-à-dire $\exists O \in E, \overrightarrow{Og(O)} \in F_1(g)$ (voir proposition (II.4)). On prend O un point fixe de h alors $\overrightarrow{Og(O)} = v \in F_1(h) = F_1(g)$. Donc $h = \tau_v \circ g = g \circ \tau_v$ est une décomposition canonique de h et par unicité $v = 0$. On donc $E_1(f) \cap F_1(f) = \{0\}$, puis $E_1(f) \oplus F_1(f) = \overrightarrow{E}$. \square

Remarque II.7. La condition est équivalente à : 1 est racine simple du polynôme minimal.

Exemple II.8. :

- Les transvections affines : une transvection affine est une applications telle que l'ensemble des points fixes est un hyperplan affine et tel que tout hyperplan affine parallèle est stable.
- Dilatation affine : c'est une application telle que l'ensemble des points fixes est un hyperplan affine et qu'il existe D droite telle que $f|_D$ est une homothétie affine.

Remarque II.9. Les transvections ont une décomposition mais elle n'est pas unique.

Remarque II.10. Les dilatations et les transvections sont exactement les applications telles que leur ensemble de points fixes est un hyperplan.

• E Translations et homothéties

On note $HT(E)$ l'ensemble des translations et des homothéties.

Proposition II.11. $HT(E)$ est un groupe pour la composition.

Démonstration. Soit h une homothétie de centre O et de rapport $\lambda \neq 1$ et τ une translation de vecteur u . On pose $A = O + \frac{1}{1-\lambda}u$, alors $\tau \circ h(X) = O + \lambda \overrightarrow{OX} + u = A - \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AX} + u = A + \lambda \overrightarrow{AX}$. On pose $B = O + \frac{\lambda}{1-\lambda}u$, $h \circ \tau(X) = O + \lambda(\overrightarrow{OX} + u) = B - \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{AX} + \lambda u = B + \lambda \overrightarrow{BX}$.

Soit h une homothétie de centre A et de rapport λ et g une homothétie de centre B et de rapport μ . Alors $g \circ h(X) = g(A + \lambda \overrightarrow{AX}) = B + \mu(\overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{AX}) = B + \mu \overrightarrow{BA} + \mu \lambda \overrightarrow{AX}$ donc c'est une homothétie (éventuellement de rapport 1) composée par une translation. \square

L'image d'une droite par un élément de $HT(E)$ est une droite parallèle.

Proposition II.12. On suppose que $\dim E \geq 2$. Soit $f : E \rightarrow E$ tel que pour toute droite D , $f(D) // D$. Alors $f \in HT(E)$.

Démonstration. Si f n'a qu'un point fixe O . Alors pour tout $X \in E$, \overrightarrow{OX} est vecteur propre de \overrightarrow{f} donc \overrightarrow{f} est une homothétie vectoriel et f est une homothétie affine (on rappelle que f a un point fixe)(on peut aussi utiliser Thalès).

Si f est quelconque. On prend $X \in E$ alors $f - \tau_{\overrightarrow{Xf(X)}}$ admet un point fixe et conserve le parallélisme, donc c'est une homothétie. \square

III Barycentres

• A Définition

Définition III.1. Soit $(M_i, \alpha_i)_{i \in [1, n]}$ un système fini de points pondérés. La *fonction vectorielle de Leibniz* est l'application

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow \overrightarrow{E} \\ P &\longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{PM_i} \end{aligned}$$

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors ψ est constante et si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors ψ est bijective et le *barycentre* est l'unique point G tel que $\psi(G) = \vec{0}$. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et si $O \in E$ est un point quelconque, on note

$$G = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i = O + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OM_i}.$$

Démonstration. Soit $O \in E$. On a

$$\psi(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{PO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OM_i}.$$

Donc ψ est constante si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ et bijective sinon et le point $O + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OM_i}$ est envoyé sur 0. \square

Proposition III.2. Si $G = \text{bar}\{(A_i, \lambda)_{i \in [1, n]}\}$, on a pour tout point $O : \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i OA_i$ et $\overrightarrow{A_1 G} = \frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i \overrightarrow{A_1 A_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$.

Démonstration. Exercice. \square

Proposition III.3 (Associativité). Si on a

$$G = \text{bar}\{(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), (A_3, \lambda_3)\} \text{ et } H = \text{bar}\{(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2)\},$$

alors

$$G = \text{bar}\{(H, \lambda_1 + \lambda_2), (A, \lambda_3)\}.$$

Démonstration. Exercice. \square

• B Propriétés fondamentales

Proposition III.4. L'image du barycentre par une application affine est le barycentre des images.

Démonstration. Soit $(M_i, \alpha_i)_{i \in [1, n]}$ un système de points pondérés de E de masse 1, on note G son barycentre, et soit $f : E \rightarrow F$ affine. Pour $O \in E$, on a

$$f(G) = f\left(O + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OM_i}\right) = f(O) + \vec{f}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OM_i}\right) = f(O) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(M_i)}.$$

C'est donc le barycentre de $(f(M_i), \alpha_i)_{i \in [1, n]}$. \square

Proposition III.5. Si une application conserve le barycentre de deux points alors elle est affine.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow F$ une application conservant le barycentre de deux points. On se fixe $O \in E$ et on note $\vec{f}(u) = f(O + u) - f(O)$. Montrons que \vec{f} est linéaire. Soit pour $t \in \mathbb{R}$ et $A, B \in E$, alors $f(O + t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}) = f(O) + t\vec{f}(\vec{OA}) + (1-t)\vec{f}(\vec{OB})$ soit $\vec{f}(t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}) = t\vec{f}(\vec{OA}) + (1-t)\vec{f}(\vec{OB})$. En changeant les variables c'est la linéarité de \vec{f} . \square

• C Applications du barycentre

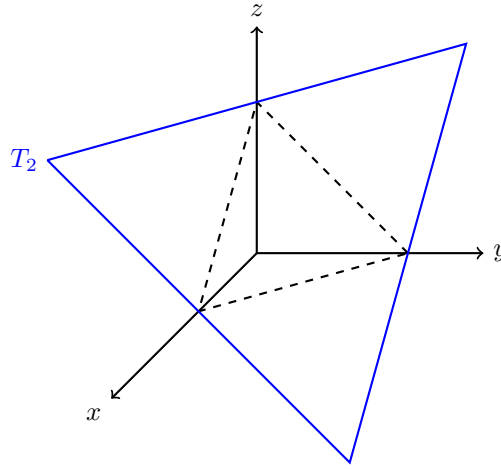
Définition III.6. Si $\dim E = n$ et A_0, \dots, A_n sont des point affinement indépendants, alors en notant

$$T_n = \left\{ (\lambda_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

le simplexe de dimension n , l'application :

$$\begin{aligned} T_n &\longrightarrow E \\ (\lambda_i) &\longmapsto O + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \end{aligned}$$

est indépendante du point O et est bijective. On dit alors que A_0, \dots, A_n est un *repère affine* de E .



Démonstration. L'indépendance du point O vient du fait que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ [exercice]. On prend alors $O = A_0$ ce qui définit alors un vectorialisé de E . On a une bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_n \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_n\right) \end{aligned}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto A_0 + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i} \end{aligned}$$

est linéaire surjective et donc bijectif puisque les (A_i) sont affinement libres. \square

Définition III.7. Un *hyperplan affine* est un sous-espace de codimension 1, c'est-à-dire dont la direction est de codimension 1.

Proposition III.8. Un sous-ensemble est un hyperplan affine si et seulement si c'est la fibre d'une application $E \rightarrow \mathbb{R}$ affine.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ affine non constante (donc surjective). Si $H = f^{-1}(a)$ alors pour $A \in H$, et $u \in \vec{E}$ on a

$$A + u \in H \iff f(A + u) = a \iff f(A) + \vec{f}(u) = a \iff \vec{f}(u) = 0,$$

donc \vec{H} est un hyperplan vectoriel. Réciproquement, si H est un hyperplan affine et $A \in H$, alors on prend $\phi : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\vec{H} = \ker \phi$, on prend

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \phi(\overrightarrow{AX}) . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(X) = 0 \iff \overrightarrow{AX} \in \overrightarrow{H} \iff X \in H.$$

□

On va maintenant montrer le théorème de Ménaulus et de Ceva.

Lemme III.9. On se place dans E un espace affine de dimension 2 et on se donne (A_0, A_1, A_2) un repère affine. Soient $a, b \in \mathbb{R}^3$ et notons

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, x_1, x_2) &\longmapsto \sum x_i a_i . \end{aligned}$$

Alors :

La fonction ψ est surjective $\iff a$ est non constant ($a \notin \mathbb{R}(1, 1, 1)$).

Si a et b sont non constants, on note $D_a = \psi_a^{-1}(0)$ et $D_b = \psi_b^{-1}(0)$. Alors :

- $D_a \neq D_b \iff (a, b)$ est de rang 2.
- Si $D_a \neq D_b$, alors $D_a // D_b \iff \det(a, b, (1, 1, 1)) = 0$
- Si $D_a \neq D_b$, alors D_a et D_b s'intersectent $\iff \det(a, b, (1, 1, 1)) \neq 0$

Démonstration. On se fixe $O \in E$, alors pour $M = (x_0, x_1, x_2)$ (avec $x_0 + x_1 + x_2 = 1$), on a $\psi(M) = {}^t a x$. On a alors

$$\begin{aligned} \psi \text{ est constant} &\iff x \mapsto {}^t a x \text{ est constant sur l'hyperplan } \{x_0 + x_1 + x_2 = 1\}, \iff \text{le noyau de} \\ &x \mapsto {}^t a x \text{ contient } \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\} \iff a \in \mathbb{R}(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^3$ non constant. On note H l'hyperplan affine dans \mathbb{R}^3 : $H = \{x_0 + x_1 + x_2 = 1\}$. Alors

$$D_a = D_b \iff (\forall (x_0, x_1, x_2) \in H, {}^t x a = 0 \iff {}^t x b = 0) \iff a^\perp \cap H = b^\perp \cap H \iff a^\perp = b^\perp$$

Pour la dernière équivalence : comme a est libre avec $(1, 1, 1)$, l'ensemble $a^\perp \cap H$ est une droite affine ne passant pas par 0, donc $a^\perp \cap H = b^\perp \cap H$ si et seulement si b^\perp contient a^\perp .

Si $D_a \neq D_b$, alors

$$D_a \text{ et } D_b \text{ s'intersectent} \iff a^\perp \cap a^\perp \cap H \text{ est un singleton} \iff (a, b, (1, 1, 1)) \text{ est une famille libre.}$$

□

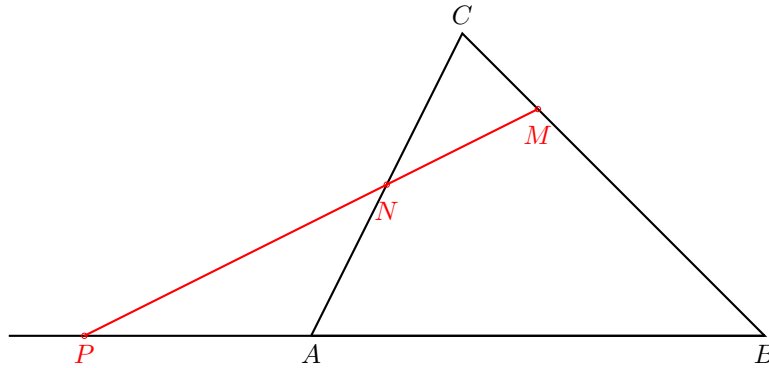
Lemme III.10. Soient D_a, D_b, D_c trois droites affines distinctes du plan (on suppose que a, b, c sont non constants). Alors

- D_a, D_b, D_c sont concourantes ou parallèles (éventuellement confondus) $\iff (a, b, c)$ est de rang 1 ou 2.

Démonstration. D'après le lemme précédent (a, b, c) est de rang 1 $\Leftrightarrow D_a = D_b = D_c$. On suppose $rg(N) \geq 2$. Si D_a, D_b, D_c sont concourantes alors $a^\perp \cap b^\perp \cap c^\perp$ contient un point de H , donc non nul, et donc a, b, c est lié. Si D_a, D_b, D_c sont parallèles, alors $(a, b, (1, 1, 1)), (b, c, (1, 1, 1)), (c, a, (1, 1, 1))$ sont liées. Si (a, b, c) était libre alors $(1, 1, 1) \in \text{vect}(a, b) \cap \text{vect}(b, c) \cap \text{vect}(c, a) = \{0\}$ ce qui est absurde, donc (a, b, c) est de rang 2. Réciproquement si (a, b, c) est de rang 2. On peut par exemple supposer $D_a \neq D_b$, on a alors $c^\perp \cap b^\perp = c^\perp \cap a^\perp = a^\perp \cap b^\perp$. On en déduit que D_a, D_b se coupent si et seulement si D_a, D_c et D_b, D_c se coupent au quel cas c'est le même point. \square

Théorème III.11 (de Ménélaüs). On se place dans un plan affine. On se donne ABC un triangle non plat et $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$ distincts de A, B, C . Alors

$$M, N, P \text{ sont alignés} \iff \frac{\overline{MB} \overline{NC} \overline{PA}}{\overline{MC} \overline{NA} \overline{PB}} = 1.$$



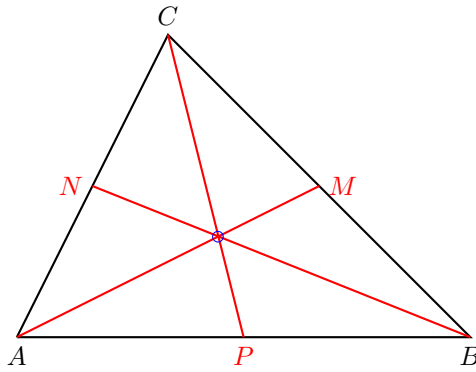
Démonstration. On note $M = m_B B + m_C C$, $N = n_B B + n_A A$ et $P = p_A A + p_B B$. Alors :

$$\begin{aligned} M, N, P \text{ alignés} &\iff \text{il existe une forme qui annule } M, N, P \\ &\iff \text{il existe une forme linéaire qui annule } \begin{pmatrix} 0 \\ m_B \\ m_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_A \\ 0 \\ n_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \det \begin{pmatrix} 0 & m_B & m_C \\ n_A & 0 & n_C \\ p_A & p_B & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff n_A p_B m_C + m_B n_C p_A = 0 \\ &\iff \frac{m_C n_A p_B}{m_B n_C p_A} = 1. \end{aligned}$$

Puis on conclut en remarquant que $\frac{m_C}{m_B} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$. \square

Théorème III.12 (de Ceva). On se place dans un plan affine. On se donne ABC un triangle et $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$ distincts de A, B, C . Alors

$$(AM), (BN), (CP) \text{ sont concourantes} \iff \frac{\overline{MB} \overline{NC} \overline{PA}}{\overline{MC} \overline{NA} \overline{PB}} = -1.$$



Démonstration. On note $M = m_B B + m_C C$, $N = n_C C + n_A A$ et $P = p_A A + p_B B$. La droite (AM) a pour équation : $m_C x_B - m_B x_C = 0$ dans le repère (A, B, C) (c'est bien une droite contenant A et M). De même $(BN) : n_C x_A - n_A x_C = 0$ et $(BP) : p_B x_A - p_A x_B = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
 (AM), (BN), (CP) \text{ concourantes ou parallèles} &\iff \det \begin{pmatrix} 0 & m_C & -m_B \\ n_C & 0 & -n_A \\ p_B & -p_A & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\iff m_C(-n_A)p_B + -(m_B)n_C - (p_A) = 0 \\
 &\iff \frac{m_C n_A p_B}{m_B n_C p_A} = -1.
 \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Géométrie Euclidienne

I Définitions

Définition I.1. Un *espace vectoriel euclidien* est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Un *espace affine euclidien* est un espace affine de direction un espace vectoriel euclidien. Cet espace est alors muni de la métrique : $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si les trois points sont alignés dans le même ordre.

Définition I.2. $f : E \rightarrow E$ est une *isométrie affine* c'est une application affine qui conserve les distances. C'est équivalent à \vec{f} conserve la norme (écrire $f(A) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OA})$). On note $Isom(E)$ leur ensemble.

Remarque I.3. Une application qui conserve la distance est automatiquement affine.

Démonstration. Soit ϕ une application de \overrightarrow{E} qui conserve la norme. Par formule de polarisation, ϕ conserve aussi le produit scalaire. Alors pour $x, y \in \overrightarrow{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\|\phi(\lambda x + \mu y) - \lambda\phi(x) - \mu\phi(y)\|^2 = \|\phi(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2\|\phi(x)\|^2 + \mu^2\|\phi(y)\|^2 - 2\lambda\langle\phi(\lambda x + \mu y), \phi(x)\rangle - 2\mu\langle\phi(\lambda x + \mu y), \phi(y)\rangle + 2\mu\lambda\langle\phi(x), \phi(y)\rangle$. On a de même $\|(\lambda x + \mu y) - \lambda x - \mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle\lambda x + \mu y, x\rangle - 2\mu\langle\lambda x + \mu y, y\rangle + 2\mu\lambda\langle x, y\rangle$. Comme ϕ préserve le produit scalaire : $\|\phi(\lambda x + \mu y) - \lambda\phi(x) - \mu\phi(y)\|^2 = \|(\lambda x + \mu y) - \lambda x - \mu y\|^2 = 0$. \square

Proposition I.4. Une isométrie affine est bijective.

Démonstration. Regarder \vec{f} . \square

Proposition I.5. L'ensemble $Isom(E)$ des isométrie affine est un groupe .

Exemple I.6. :

- Translations.
- Symétries centrales.
- Symétries orthogonales.
- Réflexions.

II Structures des isométries affines

• A Parties génératrices

Proposition II.1. .

- Pour $f \in O(\vec{E})$, il existe s_1, \dots, s_k k réflexions (vectoriel) avec $k \leq n$ telles que $f = s_1 \dots s_k$.
- Pour $f \in Isom(E)$, il existe s_1, \dots, s_k k réflexions (affine) avec $k \leq n + 1$ tel que $f = s_1 \dots s_k$.
- Pour $f \in SO(\vec{E})$, il existe r_1, \dots, r_k k retournements avec $k \leq n/2$ tel que $f = r_1 \dots r_k$.

Démonstration. Cas $O(\vec{E})$. Par récurrence sur la dimension. Pour $\dim E = 1$: $f = id$ ou $-id$ qui sont toutes les deux composées d'au plus 1 réflexions. Supposons la propriété vraie pour $\dim \vec{E} = n - 1$. Soit \vec{E} de dimension n . Si $f = Id$ c'est fini. Sinon soit $u \in \vec{E}$ tel que $f(u) \neq u$. On note H l'hyperplan médiateur de $[u, f(u)]$. Alors $s_H \circ f$ laisse fixe \vec{A} et on utilise l'hypothèse de récurrence sur $s_H \circ f$ restreinte à H^\perp .

Cas $SO(\vec{E})$: on remarque qu'un retournement est la composée de deux réflexions et que la composée de deux réflexions est soit Id soit un retournement [y réfléchir].

Cas $Isom(E)$. Si f admet un point fixe O alors en vectorialisant en O on en déduit que f est la composée d'au plus n réflexions. Sinon on prend $A \in E$ et on note H l'hyperplan médiateur de $[A, f(A)]$. Alors $s_H \circ f$ laisse fixe A et donc est la composée d'au plus n réflexions. \square

• B Topologie

Proposition II.2. .

- $Isom(E) \cong \vec{E}^n \rtimes O(\vec{E})$ en tant que groupe topologique (non canonique).
- $O(\vec{E}) = SO(\vec{E}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en tant que groupe topologique (non canonique).
- $O(\vec{E})$ est une sous-variété algébrique (groupe de Lie) avec deux composantes connexes, son espace tangent en I_n est $ASym(\vec{E})$, l'ensembles des application linéaires antiadjointes.

Démonstration. On se fixe $O \in E$. On identifie \vec{E}^n aux translations de $Isom(E)$ et $O(\vec{E})$ au isométrie laissant fixe le point O . On a $\vec{E}^n \triangleleft O(\vec{E})$ (si on conjugue τ_u par σ on obtient $\tau_{\sigma(u)}$), $\vec{E}^n \cap O(\vec{E}) = Id$ et $\vec{E}^n \cdot O(\vec{E}) = Isom(E)$ (si $f \in Isom(E)$, $\tau_{\overline{F(O)O}} \circ f \in O(\vec{E})$).

De même pour $O(\vec{E}) = SO(\vec{E}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si on note $\Theta : L(\vec{E}) \rightarrow Sym(\vec{E}), M \mapsto {}^t M.M$ est une submersion en tout point de $GL(\vec{E})$ et $O(\vec{E})$ et $D\Theta(M) = {}^t dM.M + {}^t M.dM$, donc $\ker D\Theta(I_n) = Antisym(\vec{E})$. \square

Définition II.3. Un *déplacement* est une isométrie affine qui conserve l'orientation. Un *anti-déplacement* est une isométrie affine qui renverse l'orientations

• C Réduction

Proposition II.4. Soit $\vec{f} \in O(E)$. Alors \vec{f} est orthogonalement conjugué à

$$\begin{bmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & R_{\theta_1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & R_{\theta_r} \end{bmatrix},$$

avec $p = \dim \ker f - I_n$ $q = \dim \ker f + I_n$ et :

$$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}, \theta_i \in]-\pi, \pi[.$$

Démonstration. Voir [Perrin]. □

Corollaire II.5. Le groupe $SO(\mathbb{R})$ est connexe par arc.

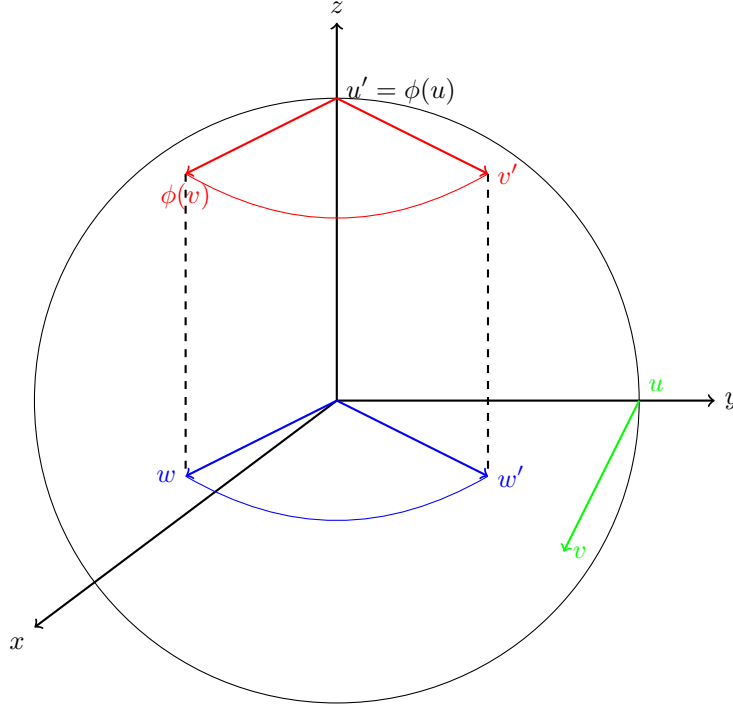
Corollaire II.6. Une isométrie affine admet une décomposition canonique.

• D Action de $SO(\vec{E})$ sur \vec{E} et $S(0, 1, \vec{E})$

Proposition II.7. Si $n \geq 2$, l'action de $SO(\vec{E})$ sur $S(0, 1, \vec{E})$ est transitive. Si $n \geq 3$, alors pour $u, v, u', v' \in S(0, 1, \vec{E})$ tels que $\|u - v\| = \|u' - v'\|$, il existe $\phi \in SO(\vec{E})$ tel que $\phi(u) = v$ et $\phi(u') = v'$. Si $n = 2$ alors il faut prendre ϕ dans $O(\vec{E})$.

Démonstration. Soient $u, v \in S(0, 1, \vec{E})$. Si u, v sont liés alors $u = \pm v$ et on prend un retournement (existe car $n \geq 2$) ou l'identité. Sinon on prend ϕ agissant par rotation sur $\text{vect}(u, v)$ envoyant u sur v et trivialement sur $\text{vect}(u, v)^\perp$. Donc l'action de $SO(\vec{E})$ sur $S(0, 1, \vec{E})$ est transitive.

Si $n \geq 3$. Soient $u, v, u', v' \in S(0, 1, \vec{E})$ tel que $\|u - v\| = \|u' - v'\| = r$. On prend ϕ_1 tel que $\phi_1(u) = u'$. On note w et w' les projections respectives de $\phi(v)$ et v' . Comme v et v' sont sur $S(0, 1) \cap S(A, r)$, on a $\|v\| = \|v'\|$. Il existe alors $\psi \in SO(u'^\perp)$ envoyant w sur w' (existe car $\dim u'^{\text{perp}} \leq 2$). L'application $(\psi \times Id_{\text{vect}(u')}) \in SO(\vec{E})$ envoie alors v sur v' et laisse fixe $u' = \phi(u)$. Donc $(\psi \times Id_{\text{vect}(u')}) \circ \phi$ envoie alors (u, v) sur (u', v') .



□

Proposition II.8. L'action de $SO(\vec{E})$ est transitive sur les sous-espaces vectoriel de dimension k . Si H est un sous-espace de dimension k , alors $Stab(H) = \{\phi \in O(H) \times O(H^\perp) \mid \det \phi = 1\}$

Démonstration. Exercice.

□

• E Simplicité de $SO(\mathbb{R}^n)$

Proposition II.9. Pour $k \geq 1$, $SO_{2k+1}(\mathbb{R})$ est simple. Pour $k \geq 3$, $SO_{2k}(\mathbb{R})/\{I_n, -I_n\}$ est simple.

Remarque II.10. $SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $SO_4(\mathbb{R}) \cong SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$

Démonstration. Rapide [voir Perrin] :

- 1- Les renversements engendrent $SO_n(\mathbb{R})$.
- 2- $SL_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des plans, donc les renversements sont conjugués.
- 3- Donc si G un sous-groupe distingue contient un renversement alors il engendre $SO_n(\mathbb{R})$.
- 4- On le montre pour $n = 3$.
- 5- En dimension $2k + 1$ on montre qu'il existe un élément qui laisse stable un espace de codimension 3.

Preuve pour $n = 3$: soit $h \in H$ on note $\phi_h : SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \pi], \mapsto \cos^{-1}((Tr[g, h] - 1)/2)$. L'image de ϕ_h est un connexe compact contenant 0 donc $Im(\phi_h) = [0, \alpha_h]$. Si pour tout $h \in H$, $\alpha_h = 0$ alors $\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), \cos^{-1}((Tr[g, h] - 1)/2) = 0$ et $[g, h] = I_3$ donc $H \subset Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{I_3\}$. Sinon il existe $h \in H$, $g \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $\cos^{-1}((Tr[g, h] - 1)/2) = \pi/p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. La rotation $[g, h]^p$ est alors un renversement et est dans H , donc $H = SO_3(\mathbb{R})$. □

III Pavage et théorème de Bieberbach

Définition III.1. On se donne K_1, \dots, K_l compacts de \mathbb{R}^n , appelés *pavés élémentaires*. Un *pavé* est l'image d'un pavé élémentaire par une isométrie. Un *pavage* est un ensemble de pavés $\{P_i | i \in \mathbb{N}\}$ recouvrant \mathbb{R}^n tel que $\forall i, j \in \mathbb{N}, \text{int}(P_i) \cap \text{int}(P_j) = \emptyset$. Le *groupe des symétries du pavage* $G(\wp)$ est l'ensemble des isométries échangeant les pavés.

Définition III.2. Un pavage \wp est dit *périodique* s'il existe F partie fini de \wp tel que $\wp = G(\wp).F$. Un pavage est dit *apériodique* si $G(\wp)$ est fini

Définition III.3. Un groupe cristallographique est un sous-groupe de $Isom(\mathbb{R}^n)$ qui est (exactement) le groupe de symétrie d'un pavage.

Théorème III.4 (de Bieberbach). :

- Pour tout groupe cristallographique Γ , le groupe des translations de Γ est d'indice fini et est engendré par n translations indépendants.
- Tout isomorphisme abstrait $\phi : \Gamma \rightarrow \Delta$ entre deux groupes cristallographiques est induit par une application affine h : i.e. $\phi(\gamma) = h \circ \gamma \circ h^{-1}$.
- Il n'y a qu'un nombre fini de classe d'isomorphisme de groupe cristallographique de \mathbb{R}^n . Si $n = 2$ il y en a 5 directs et 17 en tout. Si $n = 3$ il y en a 219 en tout.

Démonstration. Voir [Berger]. □

IV Géométrie euclidienne plane

• A Angles orientés de vecteurs

Soit E le plan euclidien orienté. $SO_2(\mathbb{R})$ agit simplement et transitivement sur la sphère de \vec{E} . A deux vecteurs unitaires u, v on associe ce $R(u, v)$ l'unique rotation qui envoie u sur v : $R(u, v).u = v$. Comme $SO_2(\mathbb{R})$ est abélien pour $T \in SO_2(\mathbb{R})$, $R(u, v)T.u = T.v$. Donc l'application R passe au quotient $\phi : S^1 \times S^1 / SO_2(\mathbb{R}) \rightarrow SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (canonique).

Proposition IV.1. L'application ϕ est bijective.

Démonstration. Elle est clairement surjective. Si $R(u, v) = R(u', v')$. Il existe T tel que $T.u = u'$, donc $R(u', v') = R(u, v) = R(Tu, Tv) = R(u', Tv)$. Comme l'action est simple on en déduit $Tv = v'$ puis $T(u, v) = (u'v')$. □

Définition IV.2. Un *angle orienté de vecteurs* est une classe dans $S^1 \times S^1 / SO_2(\mathbb{R})$. On note $\widehat{(u, v)}$ l'image de (u, v) par ϕ (dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Si u, v ne sont pas unitaires (mais non nuls) on note $\widehat{(u, v)} = (u/|u|, v/|v|)$.

Proposition IV.3 (Relation de Chasles). $\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)}$.

Démonstration. On peut supposer u, v, w unitaire. L'application $R(v, w).R(u, v)$ envoie u sur w donc $R(u, w) = R(v, w).R(u, v)$. □

• B Angles orientés de droites

Définition IV.4. Soient D, D' deux droites affines. On définit un relation d'équivalence sur l'ensemble des couple des droite affines par : pour (D_1, D_2) et (D'_1, D'_2) deux couples de droites affines et $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2)$ des vecteurs directeurs, on note $(D_1, D_2) \sim (D'_1, D'_2)$ si et seulement si $(\widehat{u_1, u_2}) = (\widehat{u'_1, u'_2}) \pmod{\pi}$. La définition est indépendante de $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2)$ car $(\widehat{u, v}) = (\widehat{-u, v}) \pmod{\pi}$.

Un *l'angle orienté de droites* est une relation d'équivalence.

Proposition IV.5. L'application $P^1(\mathbb{R}) \times P^1(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R}) \rightarrow SO_2(\mathbb{R}) / \{\pm I_2\} \cong \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ est bijective.

Démonstration. L'application est clairement surjective. Pour $(D_1, D_2), (D'_1, D'_2)$ deux couples de droites et $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2)$ des vecteurs directeurs.

S'il existe $R \in SO_2(\mathbb{R})$ tel que $(R.D_1, R.D_2) = (D'_1, D'_2)$, alors on a $R.u_1 = \pm u'_1$ et de même pour les autres. Donc

$$\begin{aligned} (\widehat{D_1, D_2}) &= (\widehat{u_1, u_2}) \pmod{\pi} \\ &= (\widehat{R.u_1, R.u_2}) \pmod{\pi} \\ &= (\widehat{u'_1, u'_2}) \pmod{\pi} \\ &= (\widehat{D'_1, D'_2}). \end{aligned}$$

Réciproquement si $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{D'_1, D'_2})$. On prend R tel que $R.u_1 = u'_1$. On a

$$\begin{aligned} (\widehat{D_1, D_2}) &= (\widehat{u_1, u_2}) \pmod{\pi} \\ &= (\widehat{R.u_1, R.u_2}) \pmod{\pi} \\ &= (\widehat{u'_1, R.u_2}) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Comme $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{D'_1, D'_2})$, on obtient $(\widehat{u'_1, R.u_2}) \pmod{\pi} = (\widehat{u'_1, u'_2}) \pmod{\pi}$. Soit $(\widehat{u'_1, R.u_2}) = (\widehat{u'_1, u'_2})$, auquel cas $R.u_2 = u'_2$ soit $(\widehat{u'_1, R.u_2}) = (\widehat{u'_1, u'_2}) + \pi = (\widehat{u'_1, -u'_2})$ auquel cas $R.u_2 = -u'_2$. Donc dans tous les cas $R(D_1, D_2) = R(D'_1, D'_2)$. \square

• C Angle géométrique

Soit E le plan euclidien non-orienté. L'*angle géométrique* entre u et v est $(u, v) = |\widehat{u, v}|$ dans $[0\pi]$, en choisissant une orientation de E .

Remarque IV.6. .

- L'ensembles des angles orienté de vecteurs ou de droites forment un groupe.
- Les angles de droites ne permettent pas de faire la différence entre les angles nuls ou plats.
- Les angles géométriques ne s'ajoutent pas.

• D Quelques théorèmes sur les angles

On considère E un plan affine euclidien orienté.

Proposition IV.7. Soit A, B, C trois points. On a

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pi \pmod{2\pi}$$

Démonstration. On a $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = (\widehat{AC}, \widehat{BC})$ (on a fait une symétrie centrale), et avec Chasles, on a

$$\begin{aligned} (\widehat{AB}, \widehat{AC}) + (\widehat{BC}, \widehat{BA}) + (\widehat{CA}, \widehat{CB}) &= (\widehat{AB}, \widehat{BA}) \\ &= \pi \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire IV.8. La somme des angles géométriques d'un triangle est π .

Démonstration. Exercice. □

Théorème IV.9 (de l'angle inscrit). Soit Γ un cercle de centre O et A, B, C sur Γ . Alors

$$(\widehat{OA}, \widehat{OB}) = 2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \pmod{2\pi}.$$

Démonstration. On a $(\widehat{OA}, \widehat{OB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OC}) + (\widehat{OC}, \widehat{OB})$. Comme le triangle OAC est isocèle on a $(\widehat{OA}, \widehat{OC}) + 2(\widehat{CO}, \widehat{CA}) = \pi \pmod{2\pi}$ ($(\widehat{CO}, \widehat{CA}) = (\widehat{AC}, \widehat{AO})$ en considérant la symétrie axiale qui envoie A sur C). De même $(\widehat{OC}, \widehat{OB}) + 2(\widehat{CB}, \widehat{CO}) = \pi \pmod{2\pi}$. D'où

$$\begin{aligned} (\widehat{OA}, \widehat{OB}) &= -2(\widehat{CB}, \widehat{CA}) \\ &= 2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire IV.10. Si on considère les angles géométriques on a $(\widehat{OA}, \widehat{OB}) = 2(\widehat{CA}, \widehat{CB})$.

Démonstration. Exercice. □

Théorème IV.11 (Cas $C = A$). Si on note D la tangente à Γ , alors $(OA, OB) = 2((AB), D) \pmod{2\pi}$.

Démonstration. On note I le milieu de $[AB]$. On a $(D, (AB)) + ((AB), (AO)) = (D, (AO)) = \pi/2 \pmod{\pi}$ et $((OI), (OA)) + ((IA), (IO)) + ((AO), (AI)) = 0 \pmod{\pi}$. Donc :

$$\begin{aligned} (D, (AB)) &= \pi/2 - ((AB), (AO)) \pmod{\pi} \\ &= \pi/2 - ((AI), (AO)) \pmod{\pi} \\ &= \pi/2 - ((OI), (OA)) - ((IA), (IO)) \pmod{\pi} \\ &= ((OA), (OA)) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Or $(OA, OB) = 2((OA), (OA)) \pmod{2\pi} = 2(D, (AB))$. □

Corollaire IV.12. Soient A, B, C, D quatre points du plan. Alors

$$A, B, C, D \text{ sont cocycliques ou alignés} \Leftrightarrow (AB, AC) = (DB, DC) \pmod{\pi}.$$

Démonstration. Si A, B, C, D sont alignés, alors on a clairement $(AB, AC) = (DB, DC) \pmod{\pi}$. Si A, B, C, D sont sur un cercle Γ de centre O , alors $2(AB, AC) \pmod{2\pi} = (OB, OC) \pmod{2\pi}$ et de même $2(DB, DC) \pmod{2\pi} = (OB, OC) \pmod{2\pi}$. Donc $(AB, AC) \pmod{\pi} = (DB, DC) \pmod{\pi}$.

Réciproquement si $(AB, AC) = (DB, DC) \pmod{\pi}$. Si A, B, C sont alignés alors D est aussi aligné avec A, B, C . Sinon on peut supposer que A, B, C et D, B, C ne sont pas alignés. On note Γ et Γ' leurs cercles circonscrits respectifs (existe, regarder les médiatrices). On note D la tangente de Γ en A , on a alors $2(D, (AB)) = (OA, OB) \pmod{2\pi} = 2(CA, CB) \pmod{2\pi}$. De même en notant D' la tangente de Γ' en A , on a $2(D', (AB)) = 2(DA, DB) \pmod{2\pi}$. Donc $D = D'$ puis $\Gamma = \Gamma'$. □

Théorème IV.13 (Droite de Simson). Soit A, B, C, M trois points. On note A', B', C' les projetés de M sur $(BC), (AC), (AB)$. Alors

$$A', B', C' \text{ sont alignés} \Leftrightarrow A, B, C, M \text{ sont cocycliques.}$$

[Réfléchir au cas A, B, C alignés]

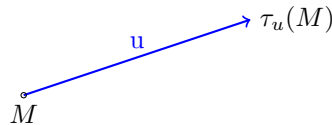
Démonstration. On a $(MB, MC) = (MB, MA') + (MA', MC)$. Comme B, C', M, A' sont cocycliques, on a $(MB, MA') = (C'B, C'A') \pmod{\pi} = (C'A, C'A') \pmod{\pi}$ et de même $(MA', MC) = (B'A', B'C) \pmod{\pi}$, donc $(MB, MC) = (C'A, C'A') + (B'A', B'A) \pmod{\pi}$. En considérant le quadrilatère $AC'A'B'$ on a $(C'A, C'A') + (A'C', A'B') + (B'A', B'A) + (AB', AC') \pmod{\pi} = 0 \pmod{\pi}$, donc $(MB, MC) = (A'C', A'B') + (AB', AC') \pmod{\pi} = (A'C', A'B') + (AC, AB) \pmod{\pi}$. On en déduit $(MB, MC) = (AC, AB) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (A'C', A'B') = 0 \pmod{\pi}$. \square

• E Isométries et déplacements du plan

Classification :

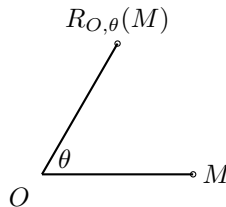
Translation τ_u ($u \neq 0$) :

- Points invariants : aucun.
- Droites invariantes : droite de direction u .
- Décomposition en réflexions : produit de deux réflexions d'axes parallèles distantes de $u/2$.



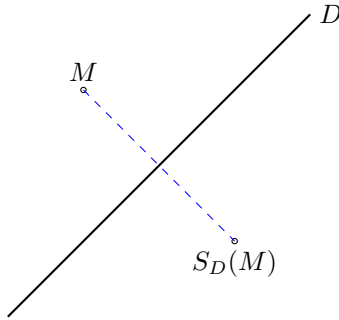
Rotation $R_{O,\theta}$ ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$) :

- Points invariants : O .
- Droites invariantes : aucun si $\theta \neq \pi \pmod{2\pi}$; toute droite passant par O si $\theta = \pi \pmod{2\pi}$.
- Décomposition en réflexions : produit de deux réflexions d'axe passant par O d'angle $\theta/2 \pmod{\pi}$.



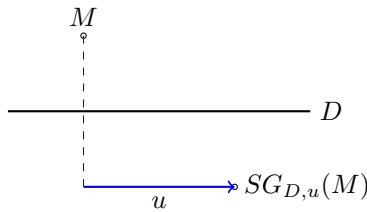
Réflexion S_D :

- Points invariants : D
- Droites invariantes : D et droites perpendiculaires à D .
- Décomposition en réflexions : elle même.



Réflexions glissée $SG_{D,u}$ (avec $u \neq 0$ et parralèle à D) :

- Points invariants : aucun.
- Droites invariantes : D .
- Décomposition en réflexions : décomposition en une réflexion et une translation.



Preuve de la classification. 1^{er} cas : $\vec{f} = I_2$, alors $f = Id$ ou $f = \tau_{\vec{f}(O)} \circ \vec{O}$.

2^{em} cas : $\vec{f} \in SO_2$, alors f a un unique point fixe et f est une rotation.

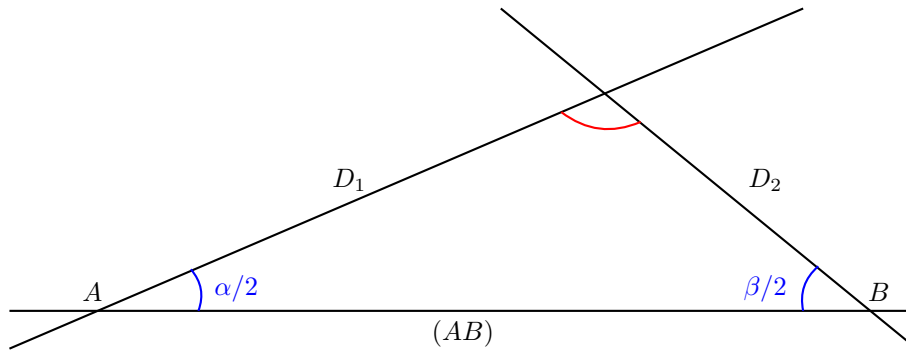
3^{em} cas : $\vec{f} \in O_2^-$, alors \vec{f} est une réflexion de droite noté d . Si f admet un point fixe O alors $f = S_{O+d}$. Sinon on utilise la décomposition canonique de f (voir la preuve pour trouver les éléments caractéristiques). \square

Produit de 2 rotations $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta} = ?$

Si $A = B$, alors $R_{A,\alpha} \circ R_{A,\beta} = R_{A,\alpha+\beta}$.

Si $A \neq B$ et $\alpha + \beta = 0$, alors $R_{A,\alpha} \circ R_{A,-\alpha} = \tau_{\vec{R_{A,\alpha}(A)}A}$.

Si $A \neq B$ et $\alpha + \beta \neq 0$, alors on considère des réflexions S_{D_1} et S_{D_2} tel que $R_{A,\alpha} = S_{D_1} \circ S_{(AB)}$ et $R_{B,\beta} = S_{(AB)} \circ S_{D_2}$, $R_{B,\beta} = S_{(AB)} \circ S_{D_2}$. On a alors $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta} = S_{D_1} \circ S_{D_2}$.



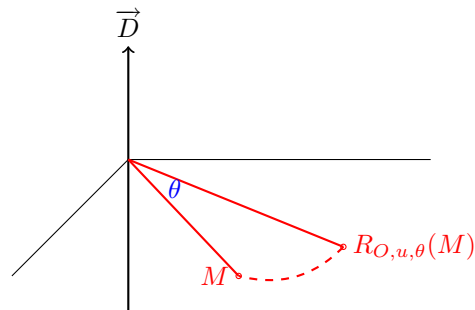
V Géométrie euclidienne dans l'espace

• A Classification des isométries vectorielles

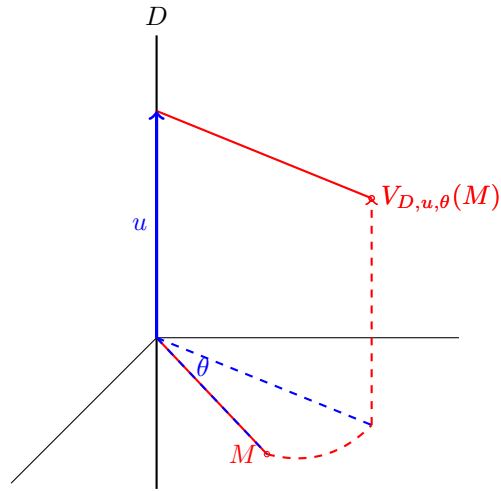
- Rotation : $\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$.
- Anti-rotation : $\begin{pmatrix} -1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$ (regarder les valeurs propres).

• B Classification des isométries affines

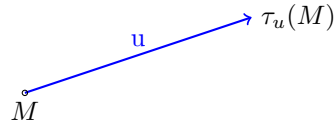
- Rotation $R_{\vec{D},\theta}$ (D axe orienté, θ angle de rotation)



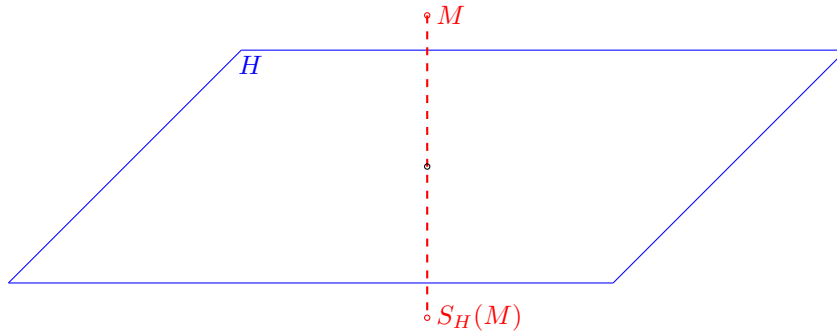
- Vissage $V_{D,\theta,v}$ (D axe de rotation, θ angle de rotation, v vecteur de translation)



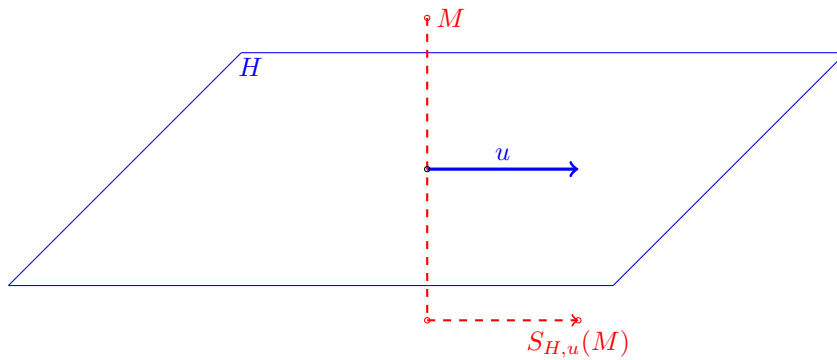
– Translation τ_u (u vecteur de translation)



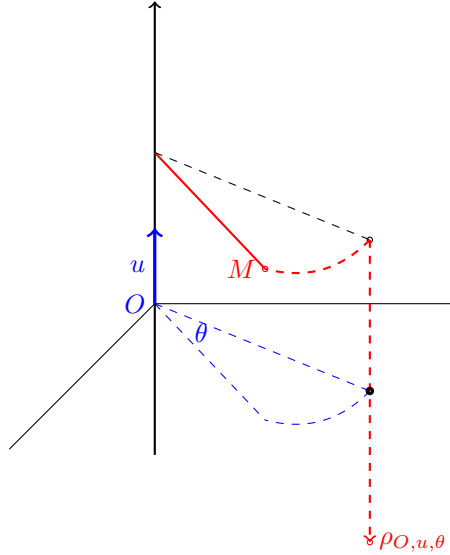
– Réflexion S_H (H hyperplan de réflexion) :



– Réflexion glissée $S_{H,u}$ (H hyperplan de réflexion, u vecteur de translation appartenant à \vec{H}) :



– Anti-rotation $\rho_{O,\theta,u}$ (O centre, u vecteur unitaire dirigeant l'axe, θ angle de rotation) :



• C Formule d'Euler et formule de Girard

Définition V.1. Un *polyèdre* dans \mathbb{R}^3 est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires.

Théorème V.2 (Formule d'Euler). Soit P un polyèdre. On note S le nombre de sommets ; A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Alors $F - A + S = 2$.

Démonstration. Idée : on se ramène au cas d'une sphère. On vectorialise en un point O à l'intérieur de P . On note π la projection de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sur S^2 . Les sommets sont envoyés sur des points, les arêtes sur des géodésiques et les faces sur des polygones sphériques. On obtient un pavage de S .

Lemme V.3 (Formule de Girard). On considère un polygone sphérique à k côtés. Alors

$$\sum \text{Angles} = \text{Aire} + (k - 2)\pi.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} 2\pi S &= \sum_{s \in \{\text{sommets}\}} 2\pi \\ &= \sum_{s \in \{\text{sommets}\}} \sum \text{angles} \\ &= \sum_{p \in \{\text{polygones}\}} \sum \text{angles} \\ &= \sum_{p \in \{\text{polygones}\}} \text{Aire}(p) + (\text{Côtés}(p) - 2)\pi \\ &= \text{Aire}(S^2) + 2A\pi - 2\pi F \end{aligned}$$

□

Preuve de la formule de Girard. Cas du triangle : on doit montrer : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \text{Aire} + \pi (> \pi)$.

Calcul de l'aire : on prend la mesure invariante sur la sphère de masse 4π . L'aire d'un fuseau double d'angle α est 4α . On considère le fuseau F_A de sommet A entre les droites (AB) et (AC) , de même pour F_B et F_C . On alors $\text{Aire}(F_A) + \text{Aire}(F_B) + \text{Aire}(F_C) = \text{Aire}(S^2) + 4\text{Aire}(ABC)$. D'où $4\hat{A} + 4\hat{B} + 4\hat{C} = 4\pi + 4\text{Aire}(ABC)$. \square

Chapitre 3

Géométrie projective

I Espaces projectifs

• A Définition

Définition I.1. Soit E un k -espace de dimension finie. L'espace projectif de E , noté $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E aussi identifié à $E - \{0\}/k^*$. Et sa dimension est $\dim E - 1$. On note $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$ de dimension n .

Exemple I.2. :

- $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$ est de dimension -1 .
- $\mathbb{P}(k) = \{k\}$ est de dimension 0 .

• B Topologie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Proposition I.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ munie de la topologie quotient sont connexes compacts séparés.

Démonstration. Pour \mathbb{C} : on a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. Donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est compact. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif \mathbb{C}^{n+1} quotienté par le sous-groupe fermé $\mathbb{C}^*(1, \dots, 1)$. La séparation vient alors des deux lemmes suivant. \square

Lemme I.4. Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe quelconque de G . Alors la projection $\pi : G \rightarrow G/H$ est ouverte.

Démonstration. Soit U ouvert de G . On a $\pi^{-1}(\pi(U)) = \{x \in G \mid x \in U.H\} = \bigcup_{h \in H} h.U$, avec $h.U$ ouvert, donc $\pi(U)$ est ouvert. \square

Lemme I.5. Soit G un groupe topologique et $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Alors G/H est séparé (muni de la topologie quotient).

Démonstration. On note $\Gamma = \{(x, y) \in G^2 \mid x^{-1}y \in H\}$ le graphe de la relation d'équivalence. L'ensemble Γ est alors l'image réciproque de H par $(x, y) \mapsto x^{-1}y$, donc Γ est fermé. Soit $xH, yH \in G/H$ distincts, alors $(x, y) \notin \Gamma$. Il existe U_x voisinage de x et U_y voisinage de y tels que $\Gamma \cap U_x \times U_y =$

\emptyset . Par lemme précédent $\pi(U_x)$ et $\pi(U_y)$ sont des voisinage de x et y , et comme $\Gamma \cap U_x \times U_y = \emptyset$, on a $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$. Donc G/H est séparé. \square

Proposition I.6. On a des homéomorphismes (non canoniques) :

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$.
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$.

Démonstration. Pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ on associe la droite de \mathbb{R}^2 $\mathbb{R}e^{2i\theta}$.

Pour $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ on associe $z/w \in \hat{\mathbb{C}} \cong (2zw, |z| - |z'|^2) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et cette action passe au quotient par \mathbb{S}^1 . \square

• C Sous-espaces projectifs

Définition I.7. Un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(E)$ est l'image d'un sous-espace vectoriel F de E intersecté avec $E - \{0\}$. Sa dimension est $\dim F - 1$: c'est-à-dire qu'un sous-espace projectif est l'ensemble des droites contenues dans un sous-espace vectoriel.

Si deux sous-espaces vectoriels sont différents alors leurs images sont différentes.

Proposition I.8. Soient V, W son deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$. Si $\dim V + \dim W \geq \dim \mathbb{P}(E)$ alors $V \cap W$ est un sous-espace projectif non vide.

Corollaire I.9. Dans $\mathbb{P}^2(k)$, toute paire de droites se coupent.

Démonstration. On note $V = \pi(F)$ et $W = \pi(G)$ avec F, G des sous-espaces vectoriels de E . L'hypothèse donne $\dim F + \dim G \geq \dim E + 1$, donc $F \cap G$ est non nulle et $F \cap G$ donc $\pi(F \cap G) \subset V \cap W$ [en fait on a égalité]. \square

Proposition I.10. Soient H est un hyperplan projectif. Alors toute droite D non inclus dans H coupe H en un seul point.

Démonstration. Soit $D = \pi(F)$ une droite projective coupant $H = \pi(G)$ en M . Comme D n'est pas inclus dans H , F n'est pas inclus dans l'hyperplan G , donc $F \cap G$ est une droite et $D \cap H = \pi(F \cap G)$ est un point. \square

II Applications entre espaces projectifs

• A Groupes des homographies

Pour f une application linéaire entre E et F , f passe au quotient si et seulement si f est injective.

Définition II.1. Une *homographie* de $\mathbb{P}(E)$ entre $\mathbb{P}(F)$ est le quotient d'une application linéaire **bijective** (ce qui implique $\dim E = \dim F$).

On note $PGL(E, F)$, l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$ vers $\mathbb{P}(F)$ et $PLG(E)$ le *groupe des homographies* de $\mathbb{P}(E)$ vers $\mathbb{P}(E)$.

Proposition II.2. L'application $GL(E) \rightarrow PGL(E)$ a pour noyau k^*Id .

• B Repères projectifs et coordonnées homogènes

Définition II.3. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}$, on note $[x_0 : \dots : x_n]$ son image dans $\mathbb{P}^n(k)$. On dit que $[x_0 : \dots : x_n]$ sont les *coordonnées homogènes* de (x_0, \dots, x_n) . Le $n + 1$ -uplet $[x_0 : \dots : x_n]$ est définie à constante de k^* près.

Question : soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension n . Combien faut-il de points pour identifier $\mathbb{P}(E)$ à $\mathbb{P}^n(k)$?

On se donne (M_0, \dots, M_n) $n + 1$ -points engendrant $\mathbb{P}(E)$, alors si on choisit une famille préimage (e_0, \dots, e_n) dans E , c'est une base de E , et donc on a une bijection :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\longrightarrow \mathbb{P}(E) \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto \pi \left(\sum_{i=0}^n x_i e_i \right), \end{aligned}$$

qui envoie $[1 : 0 : \dots : 0]$ sur M_0 , $[0 : 1 : 0 : \dots : 0]$ sur M_1 , etc...

Problème : cette application dépend du choix de la préimage (e_0, \dots, e_n) (si on change (e_0, \dots, e_n) en $(2e_0, e_1, \dots, e_n)$ alors on change $\pi(x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots)$ en $\pi(2x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots) \neq \pi(x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots)$).

Définition II.4. Un *repère projectif* de $\mathbb{P}(E)$ est un $n + 2$ -uplet de points (M_0, \dots, M_{n+1}) tel que il existe (e_0, \dots, e_n) base de E vérifiant :

- $\forall i \in [0, n], M_i = k e_i$.
- $M_{n+1} = k(e_0 + \dots + e_n)$.

Proposition II.5. Si (M_0, \dots, M_{n+1}) est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$, et (e_0, \dots, e_n) et (f_0, \dots, f_n) sont des bases de E associées à ce repère, alors ces deux bases sont proportionnelles.

Démonstration. Comme $k e_i = k f_i$, il existe $\lambda_i \in k^*$ tel que $e_i = \lambda_i f_i$. Et de même il existe $\mu \in k^*$ tel que $\mu(\sum f_i) = \mu(\sum e_i) = \sum \mu \lambda_i e_i$, donc $\forall i, \lambda_i = \mu^{-1}$. \square

Conséquence : la donnée d'un repère projectif fournit une bijection entre $\mathbb{P}^n(k)$ et $\mathbb{P}(E)$: si on se fixe (M_0, \dots, M_{n+1}) un repère, et (e_0, \dots, e_n) une base associé à ce repère, alors l'application suivante est un bijection indépendante de (e_0, \dots, e_n) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\longrightarrow \mathbb{P}(E) \\ x_0 : \dots : x_n &\longmapsto \pi \left(\sum x_i e_i \right). \end{aligned}$$

Proposition II.6. Le groupe $PGL(E)$ agit de façon simplement transitive sur les repères projectifs.

Démonstration. Soit (M_0, \dots, M_{n+1}) et (N_0, \dots, N_{n+1}) deux repères et (e_0, \dots, e_n) et (f_0, \dots, f_n) leurs bases associées. Soit $h = \overline{\phi}$ une homographie avec $\phi \in GL(E)$.

Il existe ϕ_0 tel que $\phi_0.(e_0, \dots, e_n) = (f_0, \dots, f_n)$. Et donc $h_0 := \overline{\phi_0}$, envoie (M_0, \dots, M_{n+1}) sur (N_0, \dots, N_{n+1}) .

Réciproquement : si h envoie (M_0, \dots, M_{n+1}) sur (N_0, \dots, N_{n+1}) , pour $i \in [0, n]$, il existe $\lambda_i \in k^*$, tel que $\phi(e_i) = \lambda_i f_i$ et λ_{n+1} tel que $\phi(e_0 + \dots + e_n) = \lambda_{n+1}(f_0, \dots, f_n)$. Donc $\forall i \in [0, n], \phi_0^{-1} \circ \phi(e_i) = \lambda_i e_i$ et $\phi_0^{-1} \circ \phi(e_0 + \dots + e_n) = \lambda_{n+1}(e_0 + \dots + e_n)$. On en déduit que $\phi_0^{-1} \circ \phi$ est une homothétie puis $h = h_0$. \square

• C Homographies de la droite projective

On note (e_1, e_2) la base canonique de k^2 . Soit $f : k^2 \rightarrow k^2$ un isomorphisme et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice. On note \bar{f} son image dans $PGL_2(k)$. On a alors

$$\bar{f}([x, y]) = [ax + by, cx + dy] = \left[\frac{ax + by}{cx + dy}, 1 \right].$$

Si on note $z = x/y$, alors $\bar{f}(z) = az + b/cz + d$ avec les conventions $\bar{f}(\infty, 1) = a/c$ et $\bar{f}(-d/c) = \infty$.

III Birapport

Définition III.1. Soit a, b, c un repère de $\mathbb{P}(E)$ avec $\dim \mathbb{P}(E) = 1$, alors il existe une unique homographie de $\mathbb{P}(E)$, vers $\mathbb{P}^1(k)$, $h : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$, telle que $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$ et $h(c) = 1$ (cf proposition [II.6]). Pour d un autre point de $\mathbb{P}(E)$, on note $[a, b, c, d] \in \mathbb{P}^1(k)$ l'image de d par cette homographie (i.e. $[a, b, c, d]$ est la coordonnée de d dans le repère (a, b, c)). On l'appelle le *birapport* de (a, b, c, d) .

Proposition III.2. Si a, b, c est un repère de $\mathbb{P}(k)$, alors :

$$h(z) = \frac{z - b}{z - a} \frac{c - a}{c - b} = \frac{z - b}{z - a} / \frac{c - b}{c - a}.$$

Démonstration. Cette homographie convient et on a unicité. \square

Proposition III.3. Les homographies conservent le birapport : si a, b, c est un repère de $\mathbb{P}(E)$, d est autre point et $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(F)$ est une homographie, alors $f(a), f(b), f(c)$ est un repère de $\mathbb{P}(F)$ et

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d].$$

Démonstration. Si ϕ envoie (a, b, c) sur $(\infty, 0, 1)$ alors $\phi \circ f^{-1}$ envoie $(f(a), f(b), f(c))$ sur $(\infty, 0, 1)$ et $f(d)$ sur $[a, b, c, d]$. Donc $(f(a), f(b), f(c))$ est un repère et $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$. \square

On peut considérer l'action de $\mathfrak{S}(\{A, B, C, D\})$ sur $k[A, B, C, D]$ et regarder l'orbite de la fraction

$$F(A, B, C, D) = \frac{D - B}{D - A} / \frac{C - B}{C - A}.$$

Proposition III.4. Le stabilisateur de F est V_4 et son orbite est

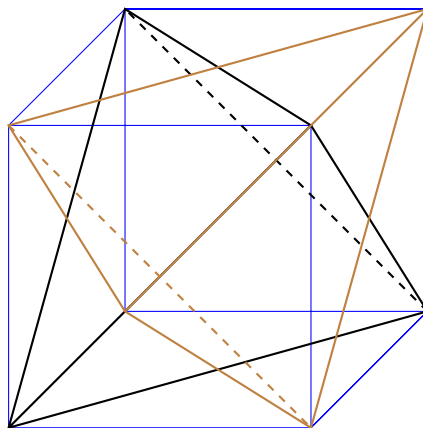
$$F, \frac{1}{F}, 1 - F, \frac{1}{1 - F}, 1 - \frac{1}{F}, (1 - \frac{1}{F})^{-1}.$$

Autrement dit l'orbite est stable par les application $G \mapsto G^{-1}$ et $G \mapsto 1 - G$.

Démonstration. [A compléter] \square

Théorème III.5 (Formule des six birapports). Soient $\{a(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ huit points distincts d'une droite projective. On a alors

$$\begin{array}{l}
[a(1, 1, 1), a(1, -1, -1), a(1, -1, 1), a(1, 1, -1)] \\
[a(-1, 1, 1), a(-1, -1, -1), a(-1, -1, 1), a(-1, 1, -1)] \\
[a(1, 1, 1), a(-1, 1, -1), a(-1, 1, 1), a(1, 1, -1)] \\
[a(1, -1, 1), a(-1, -1, -1), a(-1, -1, 1), a(1, -1, -1)] \\
[a(1, 1, 1), a(-1, -1, 1), a(-1, 1, 1), a(1, -1, 1)] \\
[a(1, 1, -1), a(-1, -1, -1), a(-1, 1, 1), a(1, -1, -1)]
\end{array} = 1$$



Démonstration. .[A compléter] □

Corollaire III.6. Si 5 des birapports est réel, alors le sixième est réel.

Théorème III.7 (Point de Miquel). Soient A, B, C un triangle et $P \in (B, C)$, $Q \in (C, A)$, $R \in (A, B)$ distincts des sommets. On note C_1 le cercle passant par A, Q, R , C_2 le cercle passant par B, P, R et C_3 le cercle passant par C, P, Q . Alors les cercles C_1, C_2, C_3 sont concourants.

Démonstration. .[A compléter] □

Théorème III.8 (du pivot). Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre cercles. Pour $i \in [1, 4]$, on note A_i et B_i les points d'intersection de C_i et de C_{i+1} (on suppose qu'ils existent et qu'il sont éventuellement confondus). On a alors (A_1, A_2, A_3, A_4) cocyclique ou aligné si et seulement si (B_1, B_2, B_3, B_4) sont cocycliques ou alignés.

Théorème III.9 (droite de Simson). A compléter.

IV Complétion projective

• A Complété d'un espace vectoriel

Définition IV.1. Soit E espace vectoriel. La *complétion projective* de E est $\mathbb{P}(E \oplus k)$.

On a alors une application injective :

$$\begin{array}{l}
E \longrightarrow \mathbb{P}(E \oplus k) \\
x \longmapsto [x : 1]
\end{array}$$

Le complémentaire de l'image est l'hyperplan $\pi(E \times \{0\})$, que l'on appelle *hyperplan à l'infini*. Cet hyperplan est isomorphe canoniquement à $\mathbb{P}(E)$, l'ensemble des droites de E . On note abusivement :

$$\mathbb{P}(E \oplus k) = E \sqcup \mathbb{P}(E)$$

Droite projective : $\mathbb{P}^1(k) = \pi(k \times \{1\}) \sqcup \{[1, 0]\} = k \sqcup \{\infty\}$.

Plan projectif : soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathbb{P}(E \oplus k) = E \sqcup \mathbb{P}(E)$. On appelle $\mathbb{P}E$ la droite à l'infini noté D_∞ . Une droite projective de $\mathbb{P}(E)$ est soit D_∞ soit une droite qui coupe D_∞ en un seul point. Du point de vu vectoriel, un hyperplan H de $E \oplus k$ vaut soit $E \times 0$ auquel cas $\pi(H) = D_\infty$, soit coupe $E \times \{1\}$ en une droite affine $H \cap E \times \{1\}$ et cette droite correspond à $\pi(H) \subset \mathbb{P}(E \oplus k)$.

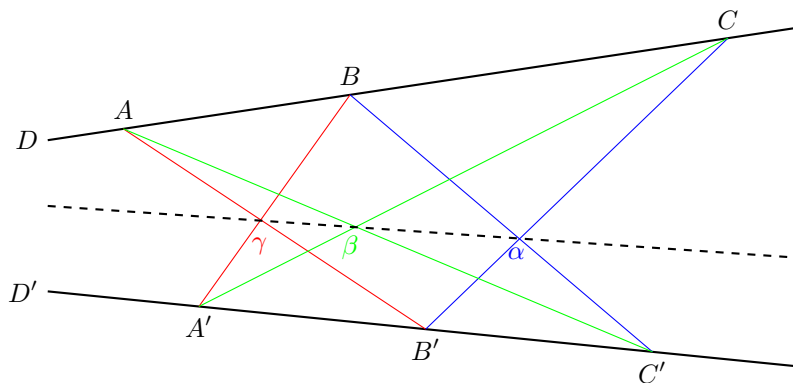
Cas d'intersection de droite : Si F et G sont deux hyperplans de $E \oplus k$ distincts $E \times 0$, alors $F \cap G$ est une droite vectoriel coupant $E \times \{1\}$ en un point qui correspond à $\pi(F \cap G) = \pi(F) \cap \pi(G) \subset \mathbb{P}(E \oplus k)$.

• B Choix de l'infini

Si on se donne D une droite d'un plan projectif $\mathbb{P}(E)$ avec $\dim E = 3$, alors on munit $\mathbb{P}(E)$ d'une structure de plan affine de la façon suivante : On note H l'hyperplan de E tel que $\pi(H) = D$, alors pour $x \in E - H$, la projection fournit une bijection $x + H \rightarrow \mathbb{P}^2(k) - D$. On fait alors agir H sur $\mathbb{P}^2(k) - D$ via cette bijection. Cette structure d'espace affine dépend du choix de x . Si on change x , alors l'action de H sur $\mathbb{P}^2(k) - D$ est changé par en multipliant par un scalaire. En particulier les droites sont indépendantes de x .

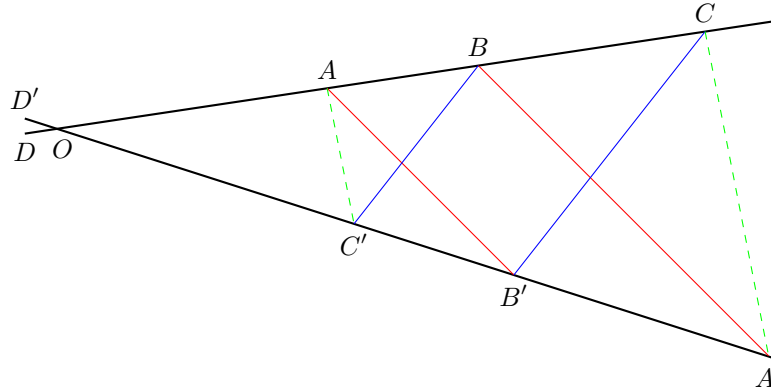
Exemple :

Théorème IV.2 (Pappus). Soit A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un plan projectif réel. On suppose que A, B, C et A', B', C' sont alignés sur D et D' respectivement. On note $\alpha = (BC') \cap (B'C)$, $\beta = (CA') \cap (C'A)$, $\gamma = (BA') \cap (B'A)$. Alors α, β, γ sont alignés

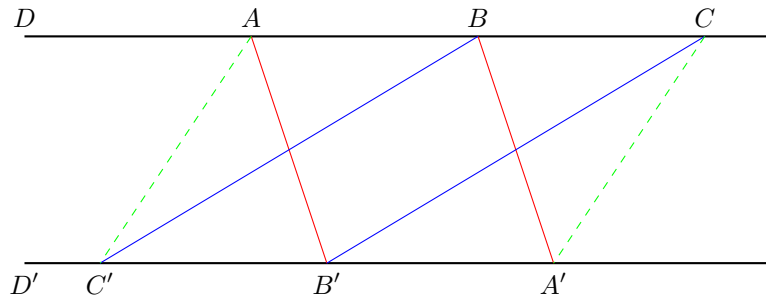


Démonstration. On pose $\Delta = (\alpha\gamma)$ et on se place dans le plan affine $\mathbb{P}(E) - \Delta$. Les paires droites $(BC'), (B'C)$ et $(AB'), (A'B)$ sont alors parallèles. Il s'agit alors de voir que $(CA'), (C'A)$ sont parallèles.

* Si D et D' sont sécantes en O (D et D' sont bien dans $\mathbb{P}(E) - \Delta$ car sont distincts de Δ), alors par Thalès l'homothétie de centre O envoyant A (resp. B) sur B (resp. C), envoie aussi A' (resp. B') sur B' (resp. C'). Donc l'homothétie de centre O envoyant A sur C , envoie aussi A' sur C' . On en déduit que (CA') , $(C'A)$ sont parallèles.



* Si D et D' sont parallèles, alors la translation envoyant A (resp. B) sur B (resp. C), envoie aussi A' (resp. B') sur B' (resp. C'). Donc la translation envoyant A sur C , envoie aussi A' sur C' .



□

• C Prolongement des applications affines

Soit E un espace vectoriel et $\mathbb{P}(E \oplus k) = E \oplus \mathbb{P}(E)$ son complété projectif. On note $H_\infty = \mathbb{P}(E)$ l'hyperplan à l'infini.

Proposition IV.3. On note G l'ensembles des homographies de $\mathbb{P}(E \oplus k)$ préservant H_∞ . Alors l'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GA(E) \\ f & \longmapsto & f|_E \end{array} .$$

Démonstration. Soit $f \in G$. Montrons que $f|_E$ est affine. Il existe $h \in GL(E \times k)$, tel que $f([x : t]) = [\phi(x, t)]$. Comme f laisse stable H_∞ , on a $f([x : 0]) = [\phi([x : 0])] \in H_\infty$, donc ϕ laisse stable $E \times \{0\} = E$. On note :

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi & y_0 \\ & s \end{pmatrix}.$$

avec $\psi = \phi|_E$ inversible et $s \in k^*$. Alors $f([x : 1]) = [\psi(x) + y_0 : s] = [\frac{1}{s}(\psi(x) + y_0) : 1]$. Donc $f|_E : x \mapsto \frac{1}{s}(\psi.x + y_0)$ est affine.

Réciproquement. Soit $g \in GA(E)$. On note $g(x) = Ax + B$. **Analyse :** soit $\phi \in GL(E \times k)$ tel que l'homographie associée à ϕ restreinte à E soit f . On note

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi & y_0 \\ {}^t z_0 & s \end{pmatrix}.$$

On a alors $g(x) = [f(x) : 1] = \bar{\phi}([x : 1]) = [\psi(x) + y_0 : {}^t z_0.x + s]$. Comme g est à valeur dans $E \subset \mathbb{P}(E \times k)$, on a ${}^t z_0.x + s \neq 0$ pour tout x donc $z_0 = 0$. On en déduit $g(x) = Ax + B = \frac{1}{s}(\psi(x) + y_0)$. On en déduit que $\bar{\phi} = \overline{Ax + B}$.

Synthèse : réciproquement cette application convient. □

V Dualité projective

Pour E un espace vectoriel on note $E^* = L(E, k)$ son dual et pour $F \subset E$ un sous-espace on note $F^\perp = \{\phi \in E^* \mid \phi(F) = 0\}$ son orthogonale pour le crochet de dualité entre E et E^* :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E &\longrightarrow k \\ (\phi, x) &\longmapsto \phi(x) \end{aligned} .$$

Et de même si $G \subset E^*$, on note $G^\perp = \{x \in E \mid \langle G, x \rangle = 0\}$. Si $F \subset E$ ou E^* est un sous-espace de dimension n alors F^\perp est un sous-espace de codimension n . Si F est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$, alors on lui associe son espace dual $F^\perp = \pi_{E^*}(\pi_E^{-1}(F)^\perp) \subset \mathbb{P}(E^*)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}(E) & E & E^* & \mathbb{P}(E^*) & & & \\ F \mapsto & \pi_E^{-1}(F) \mapsto & \pi_{E^*}^{-1}(F)^\perp \mapsto & \pi_{E^*}(\pi_E^{-1}(F)^\perp) \mapsto & & & \end{array} .$$

Si F est un sous-espace projectif inclu dans un sous-espace G de $\mathbb{P}(E)$, alors par dualité F^\perp est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E^*)$ contenant G^\perp .

Exemple fondamental : si E est de dimension 3 :

$\mathbb{P}(E)$	E	E^*	$\mathbb{P}(E^*)$
point	droite vectorielle	plan vectoriel	droite
droite	plan vectoriel	droite vectorielle	point
point \subset droite	droite vectorielle \subset plan vectoriel	plan vectoriel \supset droite vectorielle	droite \supset point
3 points alignés	3 droites vectorielles \subset plan vectoriel	3 plans vectoriels \supset droite vectorielle	3 droites concourantes

Exemple V.1. Théorème de Pappus : Soient D et D' deux points, $a, b, c \in D$ et $a', b', c' \in D'$. On note $\alpha = (bc') \cap (c'b)$, $\beta = (ca') \cap (c'a)$, $\gamma = (ab') \cap (a'b)$. Alors α, β, γ sont alignés.

Son énoncé dual est : Soient d et d' deux points, A, B, C trois droites concourantes en d et A', B', C' trois droites concourantes en d' . On note $\alpha' = (B \cap C', B' \cap C)$, $\beta' = (C \cap A', C' \cap A)$, $\gamma' = (A \cap B', B \cap A')$. Alors α', β', γ' sont concourantes.

Exemple V.2. Théorème de Desargues : soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On note $\alpha = (BC) \cap (B'C')$, $\beta = (CA) \cap (C'A')$ et $\gamma = (AB) \cap (A'B')$. Alors :

α, β, γ sont alignés si et seulement si $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

Son énoncé dual est lui même.

VI Automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$

On rappelle qu'une fonction de $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, est holomorphe si les conditions suivantes sont vérifiées

- Pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $z \neq \infty$ et $f(z) \neq \infty$, $w \mapsto f(w)$ est holomorphe sur un voisinage de z .
- Pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $z \neq \infty$ et $f(z) = \infty$, $w \mapsto f(w)^{-1}$ est holomorphe sur un voisinage de z .
- Pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $z = \infty$ et $f(z) \neq \infty$, $w \mapsto f(w^{-1})$ est holomorphe sur un voisinage de 0.
- Pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $z = \infty$ et $f(z) = \infty$, $w \mapsto f(w)^{-1}$ est holomorphe sur un voisinage de 0.

La deuxième condition signifie que z est pôle de f que z est un point de méromorphie.

Théorème VI.1. Les biholomorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$ sont exactement les homographies.

A completer.

□

Chapitre 4

Les nombres complexes en géométrie

I Calcul dans \mathbb{C}

• A Coordonnées cartésiennes

Pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on a :

- Un produit hermitien : $\bar{z}z' = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$.
- Un produit scalaire réel : $\operatorname{Re}(\bar{z}z') = xx' + yy'$.
- Un produit mixte : $\det(z, z') = xy' - x'y$.

• B Module et argument

Module : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Argument : $\operatorname{Arg}(z) = 2 \tan^{-1} \frac{y}{x + |z|}$.

Angle : $(\vec{ab}, \vec{cb}) = \operatorname{Arg} \left(\frac{c-a}{b-a} \right)$.

Théorème I.1 (Inégalité de Ptolémée). Soient A, B, C, D un quadrilatère (éventuellement croisé). Alors :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

avec égalité si et seulement si $ABCD$ est un quadrilatère non croisé inscrit dans un cercle.

Démonstration. On note a, b, c, d les affixes de A, B, C, D . On a alors :

$$(a - c)(b - d) = (a - b)(c - d) + (a - d)(b - c),$$

Donc en prenant le module et en majorant par inégalité triangulaire, on obtient :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

avec égalité si et seulement si $(a-b)(c-d)/(a-d)(b-c) \in \mathbb{R}_+$, ce qui signifie que $ABCD$ est un quadrilatère non croisé inscrit dans un cercle. \square

Théorème I.2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts. Alors a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est dans \mathbb{R} .

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} a, b, c, d \text{ cocycliques} &\Leftrightarrow (\vec{ab}, \vec{cb}) = (\vec{db}, \vec{db}) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg} \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{c-d}{b-d} \right) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \frac{d-c}{d-b} / \frac{a-c}{a-b} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

\square

Définition I.3. Un *cercle* de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un cercle de \mathbb{C} ou une droite **réelle** de \mathbb{C} ajouté du point ∞ .

Proposition I.4. Les homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ conservent les cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Démonstration. On utilise le fait que les homographies préservent le birapport et le théorème (I.2). \square

Définition I.5. Si E est une droite projective complexe, alors on définit les cercles de E en prenant un isomorphisme ϕ entre E et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et cette définition est indépendante de ϕ d'après la proposition.

Définition I.6. Une *similitude* d'un plan euclidien réel est une application affine qui multiplie les distances par une constante k , appelé rapport de la similitude.

Proposition I.7. Si f est une similitude de \mathbb{C} alors f est du type :

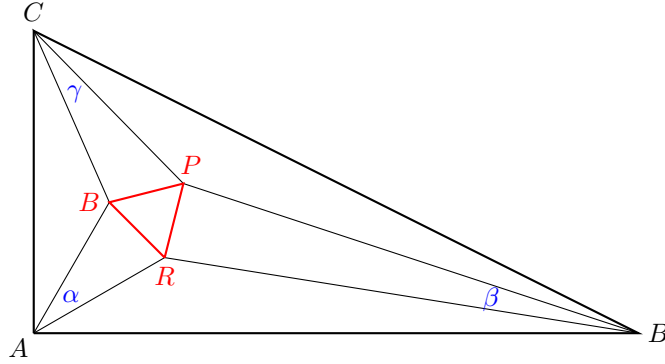
- $f(z) = az + b$ (similitude directe).
- $f(z) = a\bar{z} + b$ (similitude indirecte).

C'est-à-dire que f est soit :

- une translation
- une rotation composée par une homothétie
- une réflexion composée par une homothétie

Démonstration. Exercice. \square

Théorème I.8 (Morley). Soient A, B, C un triangle et P, Q, R l'intersection des trissectrices. Alors PQR est un triangle équilatéral.



Démonstration. (Par Alain Connes) On définit :

- f la rotation d'angle $2\alpha/3$ de centre A ,
- g la rotation d'angle $2\beta/3$ de centre B .
- h la rotation d'angle $2\gamma/3$ de centre C .

On remarque que :

- $g \circ h$ est une rotation de centre P .
- $h \circ f$ est une rotation de centre Q
- $f \circ g$ est une rotation de centre R

* Montrons que :

$$\boxed{f^3 \circ g^3 \circ h^3 = Id.}$$

En sommant les angles, on en déduit que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est une translation. Puis on remarque A est fixe.

* Ensuite on calcule... On note :

- $f(z) = a_1z + b_1$.
- $g(z) = a_2z + b_2$.
- $h(z) = a_3z + b_3$.

On a alors :

$$P = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}, Q = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}, R = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}.$$

Et

$$f^3 \circ g^3 \circ h^3(z) = (a_1a_2a_3)^3z + (a_1^2 + a_1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3.$$

Donc comme $f^3 \circ g^3 \circ h^3 = Id$:

$$\begin{cases} (a_1a_2a_3)^3 = 1 \\ (a_1^2 + a_1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3 = 0 \end{cases} .$$

Comme $f \circ g \circ h$ n'est pas une translation, on a $a_1a_2a_3 = j$ ou j^2 , ce qui donne : $P + jQ + j^2R = 0$ ou $P + j^2Q + jR = 0$ (gros calcul...on trouve que le terme nul ci-dessus est en facteur).

[Cf wikipedia]

□

• C Angles et applications conformes

Définition I.9. On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 est *conforme* si elle conserve les angles géométriques de courbes.

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est *conforme* si f préserve les angles orientés.

Proposition I.10. Une fonction différentiable f est conforme si et seulement si Df est à valeur dans les similitudes.

En cas complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ préserve les angles orientés si et seulement si f est holomorphe et f' ne s'annule pas.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une application linéaire conserve les angles si et seulement si c'est une similitude.

Si $\phi : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ est similitude, alors ϕ est la composée d'une isométrie et d'une homothétie qui conservent tous les deux les angles, donc ϕ conserve lui même les angles.

Réciproquement, si $\phi : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ conserve les angles. On prend (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée. Alors comme ϕ conserve les angles, la famille $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$ est une base orthogonales. Pour $i \in [1, n]$, on note $\lambda_i = \|\phi(e_i)\|$. Pour tout $i \neq j$ et $t > 0$, on a

$$\text{Angle}(te_i + e_j, e_j) = \frac{|\langle te_i + e_j, e_j \rangle|}{\|te_i + e_j\| \|e_j\|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}},$$

et de même

$$\text{Angle}(t\phi(e_i) + \phi(e_j), \phi(e_j)) = \frac{|\langle t\phi(e_i) + \phi(e_j), \phi(e_j) \rangle|}{\|t\phi(e_i) + \phi(e_j)\| \|\phi(e_j)\|} = \frac{1}{\sqrt{t^2(\lambda_i/\lambda_j)^2 + 1}}.$$

Donc par conformité $\lambda_i = \lambda_j$ ($i, j \in [1, n]$), et on en déduit que ϕ est la composée d'une similitude et d'une isométrie. \square

Chapitre 5

Espace des cercles et groupe circulaire

I Espace des cercles

• A Calculs préliminaires

Si on se donne trois points distincts a, b, c dans \mathbb{C} , alors l'image de \mathbb{R} par l'homographie qui envoie $(\infty, 0, 1)$ sur (a, b, c) est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{z-b}{z-a} / \frac{c-b}{c-a} \in \mathbb{R}.$$

Ce qui se réécrit :

$$\operatorname{Im} \left((z-b) \overline{(z-a)} \frac{c-b}{c-a} \right) = 0.$$

ou bien :

$$t|z|^2 - 2\langle z, \alpha \rangle + C = 0,$$

avec $t = \operatorname{Im}(c-b)/c-a$. C'est l'équation d'un cercle si $t \neq 0$ et d'une droite si $t = 0$ (c'est-à-dire que a, b, c sont alignés).

• B Équations formelles et formes quadratiques

Soient $a, b, c, t \in \mathbb{R}$. On note :

$$E_{a,b,c,t} : t(x^2 + y^2) - 2ax - 2by + c = 0,$$

et $\mathcal{E} = \{E_{a,b,c,t} = 0 \mid (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4\} \cong \mathbb{R}^4$ (\mathcal{E} est alors un espace vectoriel).

Si $t \neq 0$, on reconnaît l'équation d'un cercle

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{t^2}(a^2 + b^2 - ct),$$

qui est vide si $a^2 + b^2 - ct < 0$. On définit alors la forme quadratique sur \mathcal{E} :

$$q(a, b, c, t) = a^2 + b^2 - ct.$$

Si $t = 0$ on reconnaît l'équation d'une droite, dégénérée si $(a, b) = (0, 0)$ ce qui est équivalent à $q(a, b, c, 0) = 0$.

	$q > 0$	$q = 0$	$q < 0$
$t \neq 0$	cercle	point	\emptyset
$t = 0$	droite	$\begin{cases} \emptyset, & \text{si } c \neq 0 \\ \mathbb{R}^2, & \text{si } c = 0 \end{cases}$	

• C Signature de q

On a $q(a, b, c, t) = a^2 + b^2 + \frac{1}{4}(c-t)^2 - \frac{1}{4}(c+t)^2$, donc $\varepsilon(q) = (3, 1)$. On note ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à q :

$$\phi((a, b, c, d), (a', b', c', d')) = a'a + bb' - \frac{ct' + c't}{2}.$$

On notera $q(E_{a,b,c,t})$ pour $q(a, b, c, t)$ et de même pour ϕ .

• D L'espace projectif des cercles-droites

L'ensemble défini par l'équation $E_{a,b,c,t}$ est invariant par homothétie, on a donc une application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) &\longrightarrow P(\mathbb{R}^2) \\ [a : b : c : t] &\longmapsto \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ vérifie } E_{a,b,c,t}\} \end{aligned}$$

L'espace affine $\{E_{a,b,c,1} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ s'appelle l'*espace affine des cercles* formelles (ce sont des équations de cercles éventuellement dégénérés).

Définition I.1. Si C est le cercle d'équation $E_{a,b,c,t}$, alors C a aussi pour équation $E_{a/t,b/t,c/t,1}$.

• E Orthogonalité

Définition I.2. On dit que deux équations $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ sont *orthogonaux* si elles sont orthogonales pour ϕ .

Proposition I.3. Il ne peut pas y avoir 4 cercles-droites-points orthogonaux deux à deux.

Démonstration. Comme q est de signature $(3, 1)$ il ne peut pas y avoir 4 vecteurs orthogonaux v_i dont $q(v_i) > 0$. \square

Cercles orthogonaux On note $C_{O,R}$ le cercle de centre O et de centre R . Si C et C' sont deux cercles, éventuellement réduit à un point, d'équations $E = E_{a,b,c,1}$ et $E' = E_{a',b',c',1}$, alors on a :

- $R^2 = q(a, b, c, 1)$ et $R'^2 = q(a', b', c', 1)$.

- $O = (a, b)$ et $O' = (a', b')$.

- $OO'^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2$, soit :

$$OO'^2 = q(E - E').$$

- $\phi(E, E') = \frac{1}{2}(q(E) + q(E') - q(E - E'))$, soit :

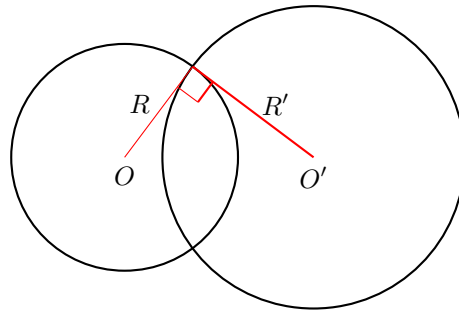
$$\phi(E, E') = \frac{1}{2}(R^2 + R'^2 - OO'^2).$$

On en déduit :

Proposition I.4. Deux cercles C et C' sont orthogonaux pour ϕ si et seulement si :

$$R^2 + R'^2 - OO'^2 = 0.$$

Ce qui signifie que les angles aux points d'intersection sont droits.



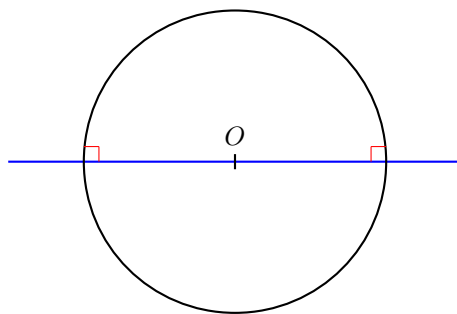
Démonstration. Regarder la formule précédente et utiliser Pythagore. □

Droites orthogonales Si D et D' sont deux droites non dégénérées d'équation $E_{a,b,c,0}$ et $E_{a',b',c',0}$, alors :

$$\phi(E, E') = aa' + bb'.$$

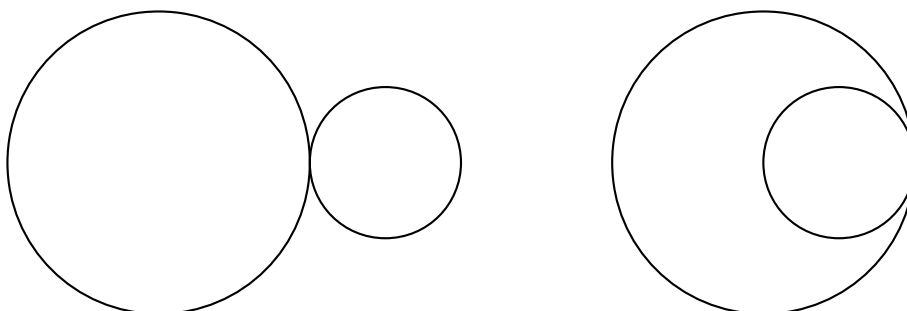
Proposition I.5. Deux droites sont orthogonales pour ϕ si et seulement si elles sont orthogonales au sens usuelle.

Droite orthogonale à un cercle Si C est un cercle, éventuellement réduit à un point, d'équation $E_1 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = q(a, b, c, 1)$ et D une droite d'équation $E_2 := -2a'x - 2b'y + c = 0$, alors $\phi(C, D) = 0$ si et seulement si $aa' + bb' - \frac{c}{2} = 0$, c'est à dire $O = (a, b) \in D$



• F Tangence

Si deux cercles sont tangents, alors il y a deux cas :



Deux cercles sont tangents intérieurement si et seulement si $OO' = |R' - R|$, et tangents extérieurement si $OO' = R + R'$.

Proposition I.6. Deux cercles C et C' , éventuellement dégénérés en un point, sont tangents si et seulement si :

$$q(C)q(C') - \phi(C, C')^2 = 0.$$

Démonstration. On a $(R \pm R')^2 = R^2 + R'^2 \pm 2RR' = q(C) + q(C') \pm 2\sqrt{q(C)q(C')}$. Or C et C' sont tangents si et seulement si $(R \pm R')^2 = OO'^2$. On a vu que $OO'^2 = q(C - C')$ (Cf [I.4]), donc la condition est équivalente à $4q(C)q(C') = (q(C - C') - q(C) - q(C'))^2 = 4\phi(C, C')^2$. \square

Remarque I.7. La quantité $q(C)q(C') - \phi(C, C')^2$ est le déterminant de $[\phi(\cdot, \cdot)]_{(C, C')}$.

Proposition I.8. On considère deux équations E et E' deux équations de **cercles** non réduit à un point. Alors :

- Leur intersection forme deux points distincts si et seulement si $q(E)q(E') - \phi(E, E')^2 > 0$, c'est-à-dire q est de signature $(2, 0)$ sur $\text{vect}(E, E')$.
- Leur intersection est réduit à 1 point (double), si et seulement si $q(E)q(E') - \phi(E, E')^2 = 0$, c'est-à-dire q est de signature $(1, 0)$ sur $\text{vect}(E, E')$.
- Leur intersection est vide si et seulement si $q(E)q(E') - \phi(E, E')^2 < 0$, c'est-à-dire q est de signature $(1, 1)$ sur $\text{vect}(E, E')$.

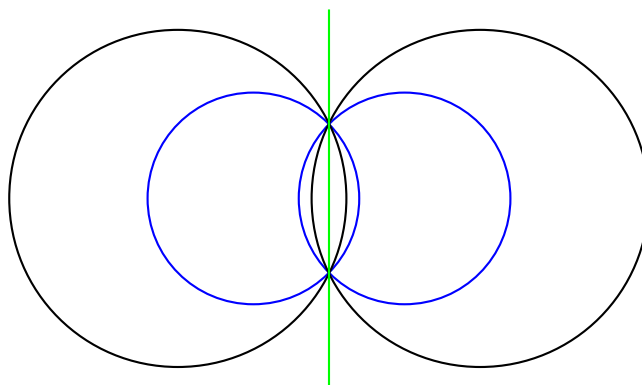
Démonstration. Si E et E' sont des cercles, quitte à diviser par t et t' (ce qui ne change pas le signe de $q(E)q(E') - \phi(E, E')^2$), on peut supposer $t = t' = 1$. On a alors : $q(E)q(E') - \phi(E, E')^2 = OO'^2 - R^2 - R'^2$, et en en déduit les 3 résultats. \square

II Faisceaux de cercles

• A Définition

Définition II.1. Un *faisceau de cercles* est l'espace vectoriel engendré par les équations de deux cercles distincts.

Exemple II.2. :



• B Puissance d'un point par rapport a un cercle

Proposition II.3. On se fixe $C_{O,R}$ un cercle non nul, et A un point quelconque. Pour D une droite passant par A et coupant $C_{O,R}$ en M et N (éventuellement confondus), on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = OA^2 - R^2.$$

En particulier $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ ne depend pas de D . Cette quantité s'appelle la *puissance de A* par rapport à $C_{O,R}$, noté $P_{C_{O,R}}(A)$.

Démonstration. On note N' le point diamétralement opposé à N . Comme $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN'} = 0$, on a $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AN'} = AN \cdot AN' = AO^2 - R^2$ (par formule de la médiane).



□

Proposition II.4. Soit C un cercle et A un point quelconque. Alors :

- A est à l'extérieur de $C \Leftrightarrow P_C(A) > 0$.
- A est à l'intérieur $\Leftrightarrow P_C(A) < 0$.
- A est sur le cercle $\Leftrightarrow P_C(A) = 0$.
- $C_{O,R}$ et $C_{O',R'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow R^2 = P_{C'}(O)$.

Démonstration. C'est clair d'après la formule $P_C(A) = OA^2 - R^2$.

□

• C Axe radical de deux cercles

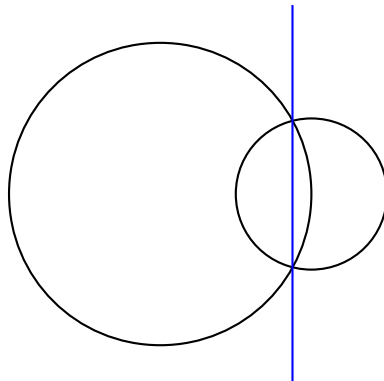
Définition II.5. L'axe radical de deux cercles C C' est l'ensemble des points A tel que $P_C(A) = P_{C'}(A)$. On le note $\Delta_{C,C'}$.

Proposition II.6. L'axe radical de deux cercles C et C' de centres distincts est une droite orthogonale à OO' . L'axe est vide si $O = O'$ et $R \neq R'$, et L'axe est l'espace entier si $C = C'$.

Démonstration. Pour $A \in \mathbb{R}^2$, on a $P_C(A) - P_{C'}(A) = OA^2 - O'A^2 - R^2 + R'^2$. Or par formule de la médiane si on note I le milieu de $[OO']$, on a $OA^2 - O'A^2 = 2\vec{AI} \cdot \vec{OO'}$.

□

Exemple II.7. Axe radical de deux cercles sécantes :

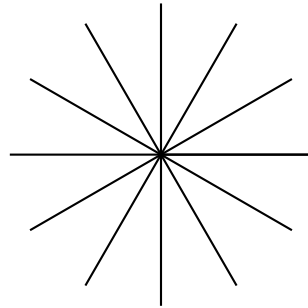


• **D Classification des faisceaux de cercle à similitude près ($GA(\mathbb{R}^2)$) et à homographie près ($PGL_2(\mathbb{C})$)**

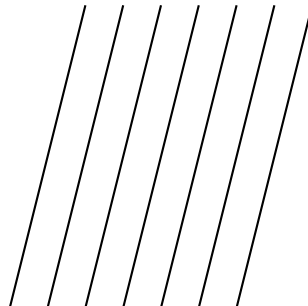
Soient $E_1 = E_{a,b,c,t}$ et $E_2 = E_{a',b',c',t'}$ deux équations indépendantes. On considère le Faisceau $vect(E_1, E_2)$.

* **Cas 1** : si E_1 et E_2 sont des droites, c'est-à-dire $t = t' = 0$.

* **Cas 1.1** : si (a, b) et (a', b') sont colinéaires, alors on peut supposer par exemple $(a, b) \neq (0, 0)$ et E_1 s'écrit $-2(ax + by) + c = 0$ et E_2 s'écrit $-2k(ax + by) + c' = 0$ avec $k \neq 0$ et $c'/k \neq c$. Donc lorsque (λ, μ) parcourt \mathbb{R}^2 , $\lambda E_1 + \mu E_2$ parcourt l'ensemble des équations de droites orthogonales à (a, b) (plus l'équation nulle).



* **Cas 1.2** : si (a, b) et (a', b') sont colinéaires non colinéaire, alors E_1 et E_2 sont des droites non vide de coupant en un unique point $A = (\alpha, \beta)$. Donc E_1 s'écrit $-2a(x - \alpha) - 2b(y - \alpha) = 0$ et E_2 s'écrit $-2a'(x - \alpha) - 2b'(y - \alpha) = 0$. Lorsque (λ, μ) parcourt \mathbb{R}^2 , $\lambda E_1 + \mu E_2$ parcourt l'ensemble des équations de droites passant par (a, b) (plus l'équation nulle).

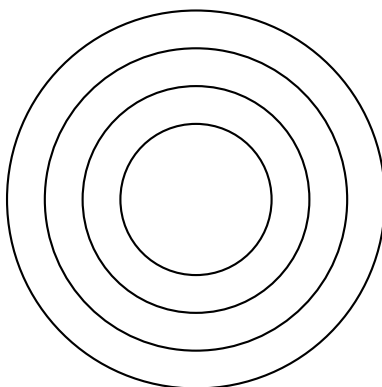


* **Cas 2** : si $t \neq 0$ ou $t' \neq 0$. Alors on peut supposer par exemple $t \neq 0$, et quitte à remplacer E_1 par $E_1 + \lambda E_2$, on peut supposer que $q(E_1) > 0$, c'est-à-dire que E_1 est l'équation d'un cercle non vide. De même quitte à remplacer E_2 par $E_2 + \mu E_1$, on peut supposer que E_2 est l'équation d'un cercle non vide. Et quitte à diviser E_1 par t et E_2 par t' on peut supposer $t = t' = 1$.

* **Cas 2.1** : si E_1 et E_2 sont concentriques, alors E_1 s'écrit $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R_1^2 = 0$ et E_2 s'écrit $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R_2^2 = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} vect(E_1, E_2) &= \{(\lambda + \mu)(x - a)^2 + (y - b)^2 - (\lambda R_1^2 + \mu R_2^2) = 0 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u(x - a)^2 + (y - b)^2 - v = 0 \mid u, v \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

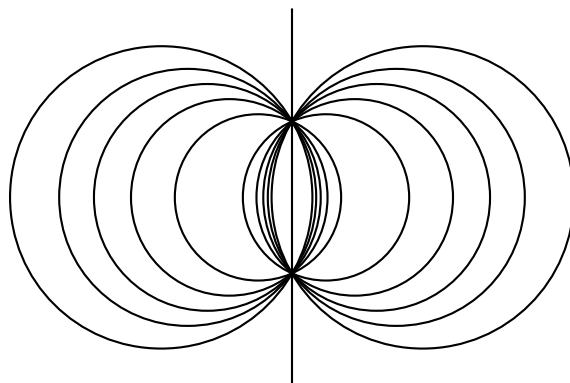
est l'ensemble des équations de cercles centrés en (a, b) .



* **Cas 2.2** : si E_1 et E_2 sont non-concentriques et se coupent en A et B distincts. Quitte à appliquer une isométrie on peut supposer que $A = (0, 1)$ et $B = (0, -1)$. Alors E_1 s'écrit $x^2 + y^2 - 2ax - 1 = 0$ et E_2 s'écrit $x^2 + y^2 - 2ax - 1 = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} \text{vect}(E_1, E_2) &= \{(\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2(\lambda a + \mu b)x - (\lambda + \mu) = 0 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \\ &= \{u(x^2 + y^2) - 2vx - u = 0 \mid u, v \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

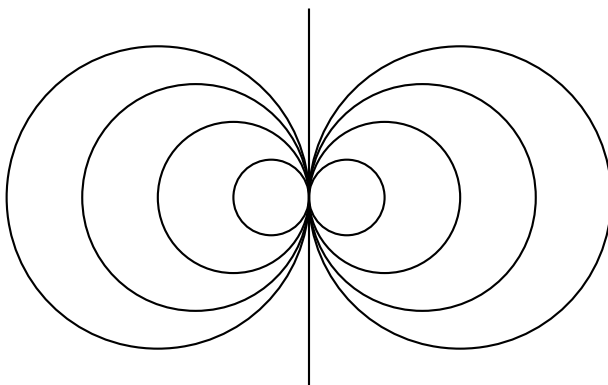
Si $u = 0$ et $v \neq 0$ alors c'est l'équation de la droite $x = 0$, qui est l'axe radicale de E_1 et E_2 . Si $u \neq 0$, alors c'est l'équation du cercle centré en $(v/u, 0)$ passant par A (et donc aussi par B), donc en particulier est non vide.



* **Cas 2.3** : si E_1 et E_2 sont non-concentriques et se coupent en un seul point A . Quitte à appliquer une translation on peut supposer que $A = (0, 0)$. Alors E_1 s'écrit $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ et E_2 s'écrit $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} \text{vect}(E_1, E_2) &= \{(\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2(\lambda a + \mu b)x = 0 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \\ &= \{u(x^2 + y^2) - 2vx = 0 \mid u, v \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

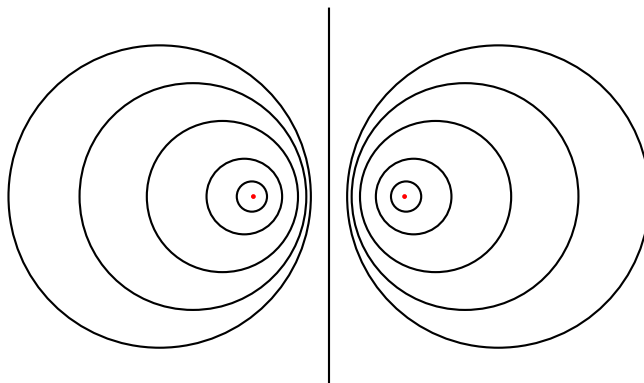
Si $u = 0$ et $v \neq 0$, alors c'est l'équation de la droite $x = 0$, qui est l'axe radicale de E_1 et E_2 . Si $u \neq 0$, alors c'est l'équation du cercle centré en $(v/u, 0)$ passant par $(0, 0)$, donc en particulier est non vide.



* **Cas 2.4** : si E_1 et E_2 sont non-concentriques et ne se coupent pas. On considère $D = E_1 - E_2$ l'équation $-2(a-a')x - 2(a-a')y + c - c' = 0$ (droite non vide car E_1 et E_2 sont non concentriques). La droite ne coupe pas E_1 (car sinon $E_2 = E_1 - D$ couperait E_1) D . Quitte à appliquer une isométrie, on peut supposer que $D = (x = 0)$. Alors E_1 s'écrit $x^2 + y^2 - 2ax + c = 0$, avec $c > 0$ (car sinon E_1 couperait D) et :

$$\begin{aligned} \text{vect}(E_1, E_2) &= \text{vect}(E_1, D) \\ &= \{ \lambda(x^2 + y^2) - 2(\lambda a + \mu)x + \lambda c = 0 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}. \\ &= \{ u(x^2 + y^2) - 2vx + uc = 0 \mid u, v \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Si $u = 0$ et $v \neq 0$ alors c'est l'équation de la droite $x = 0$, qui est l'axe radicale de E_1 et E_2 . En effet E_1 est le cercle centré en $(a, 0)$ de rayon $\sqrt{a^2 + c}$ donc $P_{E_1}((0, 0)) = c$, et de même avec $E_2 = E_1 - D = (x^2 + y^2 - (2a + 1)x + c = 0)$ on a $P_{E_2}((0, 0)) = c$. Si $u \neq 0$, alors c'est l'équation du cercle centré en $(v/u, 0)$, qui vide si $q(v, 0, uc, u) = v^2 - u^2c < 0$.



Remarque II.8. Tous ces cas ne sont pas semblables sous le groupe affine.

III Groupe circulaire

• A Inversion analytique et géométrique

Définition III.1. L'*inversion analytique* de pôle 0 et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est l'application :

$$i_{0,k} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \frac{k}{z} .$$

L'inversion analytique de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est :

$$i_{a,k} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \frac{k}{z-a} + a .$$

On a $i_{a,k} = \tau_a i_{a,k} \tau_{-a}$, et $(i_a(z) - a)(z - a) = k$.

Définition III.2. L'inversion géométrique de pôle 0 et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est :

$$j_{0,k} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \frac{zk}{|z|^2} = \frac{k}{\bar{z}} .$$

L'inversion géométrique de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est :

$$j_{a,k} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \frac{k(z-a)}{|z-a|^2} + a = \frac{k}{\overline{z-a}} + a .$$

On a $j_{a,k} = \tau_a j_{a,k} \tau_{-a}$, et $(j_a(z) - a)(z - a) = k$.

Remarque III.3. :

- Les inversions sont des involutions.
- On peut définir l'inversion géométrique en espace euclidien quelconque : pour $A \in E$ et $k \in \mathbb{R}^*$, l'inversion de pôle A et de rapport k est :

$$j_{A,k} : E \setminus \{A\} \longrightarrow E \setminus \{A\} \\ M \longmapsto A + k \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2} .$$

Proposition III.4. Les géométriques changent le signe des angles orientés.

Démonstration. Soit j une inversion de centre O et de rapport k . Alors en vectorialisant en O , on a $j(u) = \frac{ku}{\|u\|^2}$. En calculant on en déduit que la différentielle de j en u est

$$\boxed{\forall u, h \in E, Dj(u).h = \frac{k}{\|u\|^2} \left(h - 2 \left\langle \frac{u}{\|u\|}, h \right\rangle \right)} .$$

C'est la réflexion d'axe u composée par l'homothétie de rapport $k/\|u\|^2$. Donc u est une application anticonforme. \square

• B Action sur les cercles droites

Proposition III.5. Les inversions transforment un cercle-droite en un cercle-droite. L'inversion de $\mathbb{C} \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{P\}$ échange les cercles qui ne passent pas par le pôle P , et échange les cercles passant par le pôle en les droites qui ne passent pas par le pôle, et fixe des droites passant par le pôle.

Première démonstration. Une inversion est une homographie composée pas une conjugaison, donc conserve le birapport. \square

Deuxième démonstration. La démonstration suivante est plus géométrique et plus éclairante.

Une droite passant par le pôle est évidemment invariant par l'inversion (en comptant le point à l'infini).

Soient j une inversion de centre O et D une droite ne passant pas par O . Soit H le projeté de O sur D .

Lemme III.6. Si h est une homothétie de rapport λ et de centre O , alors $h \circ j$ est une inversion de centre O et de rapport $k\lambda$.

Démonstration du lemme. Exercice. \square

Quitte à composer j par l'homothétie de rapport OH^2/k (qui conserve les cercles-droites), on peut supposer que H est invariant par j . On est ramené au cas $k = OH^2$. Pour $M \in E$, on note $N = j(M) = O + \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM}$. On a

$$\begin{aligned} N \in D &\iff \langle \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OH} \rangle = OH^2 \\ &\iff \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OH} \rangle = OM^2 \quad . \\ &\iff \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MH} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$j(M) \in D \iff M \text{ est sur le cercle de diamètre } OH.$$

Soit Γ un cercle ne passant pas par O . On note p la puissance de O par rapport à Γ . Alors quitte à composer par l'homothétie de rapport p/λ , on peut supposer que $k = p$. Le cercle Γ est alors invariant par j . \square

Remarque III.7. – La même démonstration montre que l'inversion de \mathbb{R}^3 échange les sphères-plans.

– La projection stéréographique de \mathbb{S}^2 sur son plan équatoriale est l'inversion du pôle nord e rapport 2 : en effet, si P est le pôle nord, M un point de \mathbb{S}^2 et N son image, alors on a

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{MN}) \cdot \overrightarrow{PN} = PN^2 - \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN}.$$

Or $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN}$ est la puissance de N par rapport à la \mathbb{S}^2 qui vaut $ON^2 - 1$, et par Pythagore on a $PN^2 = ON^2 + 1$, d'où $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 2$.

En conséquence la projection stéréographique transforme les cercles de \mathbb{S}^2 en cercles-droite de \mathbb{C} : en effet un cercle de \mathbb{S}^2 est l'intersection de \mathbb{S}^2 avec un plan H , et H est envoyé sur une sphère si H ne passe pas par P et sur lui-même sinon.

• C Groupe circulaire

Dans la suite on considère des applications de $\hat{\mathbb{C}}$. On rappelle que la réflexion de \mathbb{C} d'axe $a + \mathbb{R}e^{i\theta}$, a pour équation $z \mapsto e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{a}) + a$.

Définition III.8. Le *groupe circulaire* G_{circ} est le groupe engendré par les homographies et les réflexions.

Proposition III.9. Si on note $c : z \mapsto \bar{z}$ la conjugaison (réflexion d'axe \mathbb{R}), et $i : z \mapsto \bar{z}^{-1}$ l'inversion de centre 0 alors

$$G_{circ} = PGL_2(\mathbb{C}) \rtimes \{Id, c\} = PGL_2(\mathbb{C}) \rtimes \{Id, i\}.$$

Démonstration. On vérifie que $PGL_2(\mathbb{C}) \rtimes \{Id, c\}$ est bien un produit semi-directe et contient toutes des réflexions. De même pour $PGL_2(\mathbb{C}) \rtimes \{Id, i\}$. \square

En en déduit que G_{circ} est la réunion disjointe de $\left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right\}$ et $\left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right\}$.

Théorème III.10. Le groupe circulaires sont exactement les applications bijectives de $\hat{\mathbb{C}}$ qui préservent l'ensemble des cercles et des droites.

Démonstration. Comme les homographies et c préservent l'ensemble des cercles et des droites, on en déduit que c'est le cas pour tous les éléments du groupe circulaire.

Pour la réciproque voir [Audin].

\square

Chapitre 6

Quadriques

I Définitions

On se place dans un espace affine E de dimension n sur un corps k .

On s'intéresse aux fonctions polynômiales de degré 2 sur E . La fonction f s'écrit alors :

$$f(O + u) = q_O(u) + L_O(u) + f(O),$$

avec $O \in E$, q_O une forme quadratique sur \vec{E} et L une forme linéaire sur \vec{E} .

Effet d'un changement de point base Soient $O, O' \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} q_{O'}(u) + L_{O'}(u) + f(O') &= f(O + \overrightarrow{OO'} + u) \\ &= q_O(u) + q_O(\overrightarrow{OO'}) + 2\phi_O(u, \overrightarrow{OO'}) + L_O(u) + L_O(\overrightarrow{OO'}) + f(O), \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\begin{cases} q_{O'}(u) = q_O(u), \\ L_{O'}(u) = 2\phi_O(u, \overrightarrow{OO'}) + L_O(u), \\ f(O') = q_O(\overrightarrow{OO'}) + L_O(\overrightarrow{OO'}) + f(O). \end{cases}$$

En particulier la forme q_O sur \vec{E} est indépendante de O . On le notera q .

Définition I.1. Une *quadrique affine* est une fonction polynômiale de degré 2 modulo multiplication par un scalaire non nul. Une *côniq*ue est une quadrique affine sur \mathbb{R} en dimension 2.

II Liaison projectif/affine

Soit E un espace **vectoriel** et $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E \times k)$ son complété projectif.

Définition II.1. Si f est une fonction polynômiale sur E de degré d , alors son *homogénéisé* est la fonction

$$Q: E \times k \longrightarrow k$$

$$(u, t) \longmapsto f\left(\frac{u}{t}\right) t^d .$$

La fonction Q est alors une fonction polynômiale homogène de degré d sur $E \times k$. Si $d = 2$ alors c'est une forme quadratique et on dit que Q est la *forme quadratique* de f sur \mathbb{P} .

Exemple II.2. :

- Si $f = x^2 + y^2 - 1$, alors $Q = x^2 + y^2 - z^2$.
- Si $f = x^2 - y - 1$, alors $Q = x^2 + yz - z^2$.
- Si $f = x^2 - x$, alors $Q = x^2 - xz$.

Définition II.3. Une *quadrique projective* est une forme quadratique modulo constante scalaire non nulle.

Réciproquement, si Q est une forme quadratique sur $E \times k$ alors on peut lui associer sa fonction polynômiale affine

$$f: E \longrightarrow k$$

$$x \longmapsto Q(x, 1) .$$

On dit que f est le *déhomogénéisé* de Q .

Définition II.4. Une quadrique affine est dite *propre* si son homogénéisé Q est non-dégénéré.

Remarque II.5. Si on prend f un polynôme de degré 2 sur un espace affine, alors l'homogénéisé de f dépend du vectorialisé, mais pas la non-dégénérescence.

Exemple II.6. En dimension 2 :

- $x^2 + y^2 - 1$ est propre (ellipse).
- $x^2 - y$ est propre (parabole).
- $x^2 - x$ n'est pas propre (2 droites parallèles).

III Droites et quadriques

• A Intersection entre droites et quadriques

Soient $A \in E$ et $u \in E$ et f une forme quadratique non nulle. On cherche les $\lambda \in k$ tels que :

$$f(A + \lambda u) = 0.$$

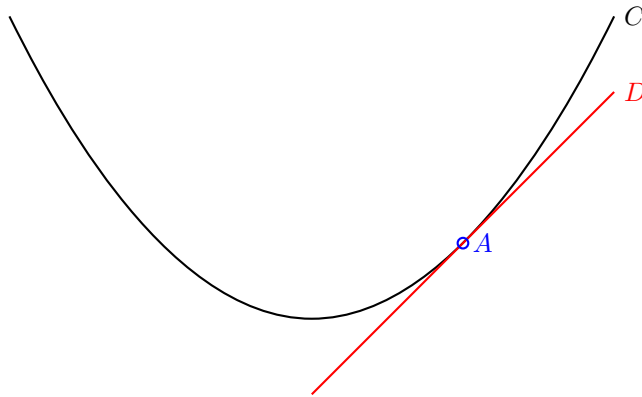
Si on décompose f en $f(A + v) = q(v) + L_A(v) + f(A)$, alors $f(A + \lambda u) = \lambda^2 q(u) + \lambda L_A(u) + f(A)$. Donc l'équation $f(A + \lambda u) = 0$ admet 0, 1, 2 solutions ou k^2 pour solution. Si u n'est pas vecteur isotrope de q , alors cela dépend du signe de $L_A(u)^2 - 4q(u)f(A)$.

• B Intersection double et tangence

Proposition III.1. Soit C une quadrique affine, $A \in C$ et D une droite passant par A . Alors :

$$\text{Alors } A \text{ est point double de } D \cap C \Leftrightarrow D \subset T_A C.$$

où $T_A C = A + \ker L_A$.



Démonstration. Soit D une droite passant par A et $u \in E$ tel que $D = A + ku$. Alors :

$$\begin{aligned}
 A \text{ point double} &\Leftrightarrow 0 \text{ racine double } \lambda^2 q(u) + \lambda L_A(u) = 0 \\
 &\Leftrightarrow L_A(u) = 0 \\
 &\Leftrightarrow D \subset T_A C
 \end{aligned}$$

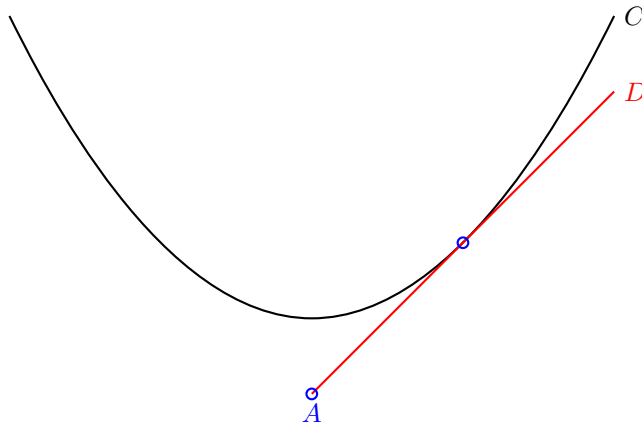
□

Définition III.2. Si l'une de ces deux conditions est vérifiée alors on dit que D est *tangente* à C en A .

• **C Tangentes à une conique passant par un point**

Soit C une conique et $A \in E$. On cherche les droites tangentes à C passant par A .

Exemple III.3. :



Soit $u \in E$, alors $D = A + ku$ est tangente à C si et seulement si u est vecteur isotrope de $L_A^2 - 4f(A)q$ (cf. les équations au-dessus).

IV Quadrique à centre

Définition IV.1. Un point A est *centre* de C si $L_A = 0$. Une conique est dite à *centre* si elle admet un unique centre.

Proposition IV.2. Une quadrique affine est à centre si et seulement si q est non dégénérée.

Démonstration. Pour $O, O' \in E$, on a vu que :

$$L_{O'}(u) = 2\phi(u, \overrightarrow{OO'}) + L_O(u).$$

Donc $L_{O'} = 0$ si et seulement si $2\phi(\cdot, \overrightarrow{OO'})L_O = 0$, c'est à dire :

$$\overrightarrow{OO'} \in -\frac{1}{2}\Theta^{-1}(L_0),$$

où :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \phi(\cdot, x) \end{array} .$$

Donc le centre existe et est unique si et seulement si Θ est injectif, c'est-à-dire ϕ non dégénéré. \square

Exemple IV.3. :

- Parabole : $x^2 - y$, $q(x, y) = x^2$ est dégénéré, et la parabole n'a pas de centre.
- Droites parallèles : $x^2 - x$, $q(x, y) = x^2$ est dégénéré, et la conique a une infinité de centres.
- Ellipse : $x^2 + y^2$, $q(x, y) = x^2 + y^2$ est dégénéré, et l'ellipse n'a qu'un seul centre.

V Classification des quadriques projectives

Définition V.1. Deux quadriques projectives Q, Q' sont *équivalentes* s'il existe $f \in GL(E \times k)$ et $\lambda \in k^*$ tels que $Q \circ f = \lambda Q'$.

Théorème V.2 (Sylvester). Deux quadriques projectives sont équivalentes si et seulement si leurs signatures sont égales modulo permutation par une constante scalaire non nulle : si on note $S = k/k^2$, la signature de q , $(\varepsilon_s)_{s \in S}$ est un élément de \mathbb{N}^S et la signature $(\varepsilon'_s)_{s \in S}$ de λq est $\varepsilon'_s = \varepsilon_{\sigma_\lambda(s)}$, où $\sigma_\lambda \in \mathfrak{S}(S)$ est la permutation sur S induite par la multiplication par σ .

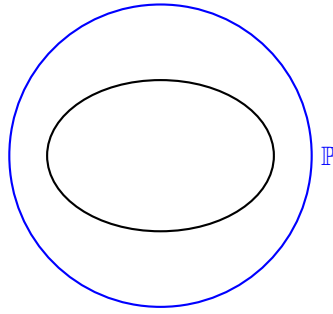
Sur \mathbb{R} deux quadriques de signature (s, t) et (s', t') sont équivalentes si et seulement si :

$$(s, t) = (s', t') \text{ ou } (s, t) = (t', s').$$

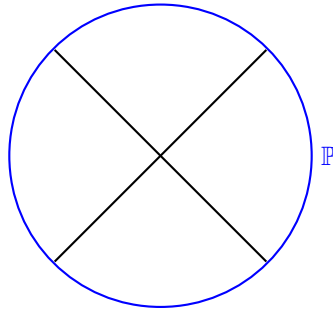
[Voir Serre pour la classification sur \mathbb{Q}_p]

Exemple V.3. Sur \mathbb{R}^2 :

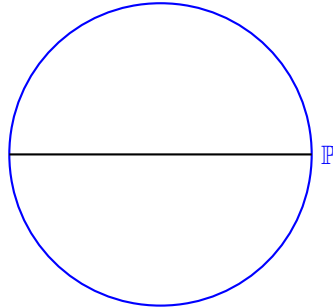
- Signature $(3, 0)$: $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$, la quadrique projective est vide.
- Signature $(2, 1)$: $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$, la quadrique projective est une ellipse.



- Signature $(1, 1)$: $Q(X, Y, Z) = X^2 - Y^2$, la quadrique projective est l'union de deux droites projectives sécantes.



- Signature $(1, 0)$: $Q(X, Y, Z) = X^2$, la quadrique projective est une droite projective.



VI Classification des cônes de \mathbb{R}^2

• A Classification affine

On se place sur \mathbb{R}^2 .

Proposition VI.1. Soit C une conique propre et non vide. Alors il existe un changement de repère tel que C soit l'une des équations suivantes :

- $x^2 + y^2 = 1$ si $\varepsilon(q) = (2, 0)$ ou $\varepsilon(q) = (0, 2)$.
- $x^2 - y^2 = 1$ si $\varepsilon(q) = (1, 1)$.
- $x^2 - y = 0$ si $\varepsilon(q) = (1, 0)$ ou $\varepsilon(q) = (0, 1)$.

Et ces cônes ne sont pas semblables.

Démonstration. Si q est non dégénéré, alors C a un unique centre, noté O et il existe une base tel que $q(x, y) = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2$. Quitte à changer q en $-q$ on peut supposer $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = 1$ si q est définie et -1 sinon. L'équation s'écrit alors :

$$x^2 + \varepsilon_2 y^2 + c = 0.$$

Comme C est propre on a $c \neq 0$.

* Si $\varepsilon_2 = 1$, alors comme C est non vide, on a $c < 0$. En remplaçant (x, y) par $(x', y') = (x/\sqrt{-c}, y/\sqrt{-c})$, on obtient l'équation $x'^2 + y'^2 = 1$.

* Si $\varepsilon_2 = -1$, alors quitte à échanger x et y on peut supposer que $c < 0$ et en remplaçant (x, y) par $(x', y') = (x/\sqrt{-c}, y/\sqrt{-c})$, on obtient l'équation $x'^2 - y'^2 = 1$.

Si q est dégénéré. Il existe une base tel que $q(x, y) = y^2$. L'équation s'écrit alors $q(x, y) + L(x, y) + c = x^2 + ax + by + c = 0$. Comme la cône est propre on a $b \neq 0$. On fait alors le changement de coordonnées $(x', y') = (x, -ax - by)$ et on obtient l'équation $x'^2 - y' + c = 0$. En changeant O en $O + (0, -c)$, on obtient $x''^2 - y'' = 0$. □

• B Classification euclidienne

On se place dans \mathbb{R}^2 munie de sa structure euclidienne.

Proposition VI.2. Soit C une cône propre, alors il existe un repère orthonormé tel que C ait pour équation :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ (ellipse).
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ (hyperbole).
- $y^2 = 2px$ avec $p \geq 0$ (parabole).

Et ces cônes ne sont pas isométriques.

Démonstration. La preuve est similaire qu'au cas semblable. □

Remarque VI.3. Si $a = b$ dans la première équation, alors on a un cercle. Si $a = b$ dans la deuxième équation, alors on a une hyperbole équilatère.

• C 2 descriptions euclidiennes des cônes

On se place dans E un plan euclidien.

•• C-1 Foyers et directrices

Le foyer et la directrice sont des notions euclidiennes.

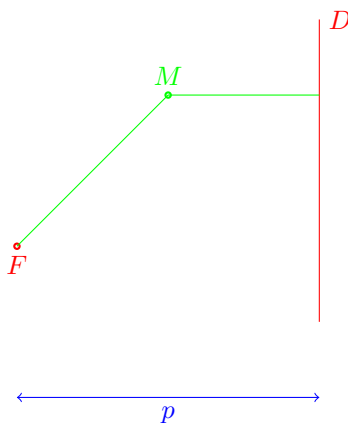
Proposition VI.4. Si C est une cône qui n'est pas un cercle, alors il existe $F \in E$, D une droite ne contenant pas F et $e > 0$ telle que :

$$C = \{M \in E \mid d(M, F) = ed(M, D)\}.$$

Auquel cas e est unique et s'appelle l'*excentricité* de la conique. Il y a 1 ou 2 couples (F, D) qui vérifient cette propriétés. On appelle F, F' les foyers de C (eventuellement confondu) et D, D' ses *directrices* (eventuellement confondu). Par convention le cercle a pour excentricite 0. La distance $d(F, D)$ noté p s'appelle le *paramètre*. Par convention le paramètre d'un cercle est $p = +\infty$.

Réciproquement tout ensemble de ce type est une conique. C'est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ et une hyperbole si $e > 1$. Deux coniques sont semblables sous le groupe des similitudes si et seulement s'ils ont la même excentricité.

Démonstration. Soient F un point et D une droite. Quitte à effectuer une isométrie on peut supposer $F = (0, 0)$ et $D : x = p$.



Alors pour $M = (x, y)$:

$$\begin{aligned} MF^2 - e^2 d(M, D)^2 &= x^2 + y^2 - e^2(x - p)^2 \\ &= (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2px - e^2p^2 \end{aligned} \quad .$$

Si $e = 1$, alors $MF^2 = e^2 d(M, D)^2$ est l'équation de la parabole :

$$y^2 = -2p(x - p),$$

et toute les parabole s'obtiennent de cette manière. Si $e \neq 1$, alors c'est l'équation :

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{e^2 p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = 0.$$

Si $e < 1$ c'est une ellipse d'axes a, b vérifiant :

$$a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2} \text{ et } b^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2},$$

et réciproquement une ellipse d'axes a, b est obtenue avec :

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \text{ et } p^2 = \frac{b^4}{ea^2}.$$

Si $e > 1$ c'est une hyperbole de paramètre a, b vérifiant :

$$a^2 = \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2} \text{ et } b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1},$$

et réciproquement une hyperbole de paramètre a, b est obtenue avec :

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ et } p^2 = \frac{b^4}{ea^2}.$$

Toutes les paraboles sont semblables sous le groupe des similitudes. En effet si P est la parabole de foyer $(0, 0)$ de directrice $x = p$ et P' la parabole de foyer $(0, 0)$ de directrice $x = p'$, alors l'homothétie de rapport p'/p envoie P sur P' .

Deux ellipses (resp. hyperboles) sont semblables si et seulement le rapport b/a est le même, c'est-à-dire s'ils ont même excentricité. \square

Remarque VI.5. Une hyperbole et une ellipse ont deux couples foyers-directrices et la parabole n'en a qu'un seul.

Une cône d'excentricité 0 et de paramètre $p < +\infty$ est réduit au foyer.

•• C-2 Propriétés bifocales des ellipses et hyperboles

Proposition VI.6. Si C est une ellipse, F, F' ses deux foyers, a la longueur du grand axe, Alors :

$$C = \{M \in E \mid MF + MF' = 2a\}$$

Si C est une hyperbole F, F' ses deux foyers, de paramètre a , Alors :

$$C = \{M \in E \mid |MF - MF'| = 2a\}$$

Démonstration. On fait pareil que dans la preuve foyer-directrice. \square

Corollaire VI.7. La tangente en un point M d'une ellipse est orthogonale à la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

La tangente en un point M d'une hyperbole est la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

La tangente en un point M d'une parabole est la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{M\pi_D(M)})$, où $\pi_D(M)$ est la projection de M sur la directrice.

Démonstration. La tangente en M de l'ellipse est orthogonale à :

$$\nabla(MF + MF') = \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'},$$

qui est le vecteur bissecteur de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

De même pour l'hyperbole, la tangente est orthogonal à :

$$\nabla(MF - MF') = \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} - \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'},$$

qui est le vecteur orthogonal à la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

Pour la parabole on a :

$$\nabla(MF - d(M, D)) = \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} - \frac{\overrightarrow{M\pi_D(M)}}{M\pi_D(M)}.$$

□

• D Synthèse sur les cônes

– Ellipse :

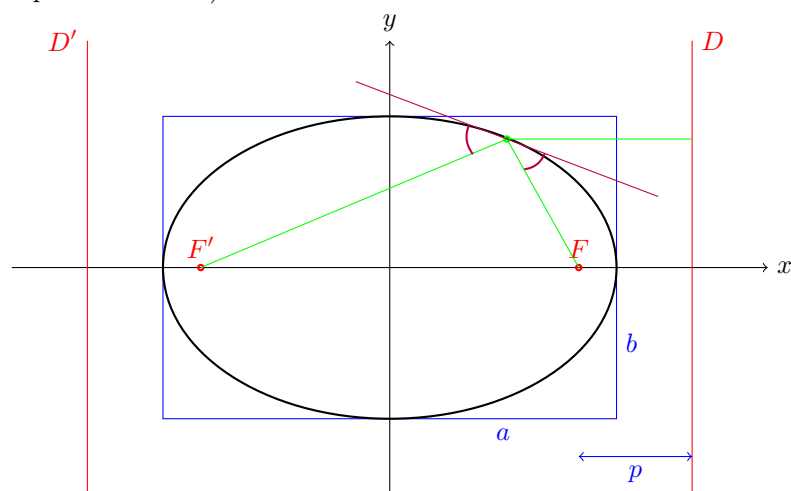
* Réduction : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a \geq b$.

* Relation foyer-paramètre :

$$a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2},$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad p^2 = \frac{b^4}{e^2 a^2}.$$

(aussi valable pour les cercles)



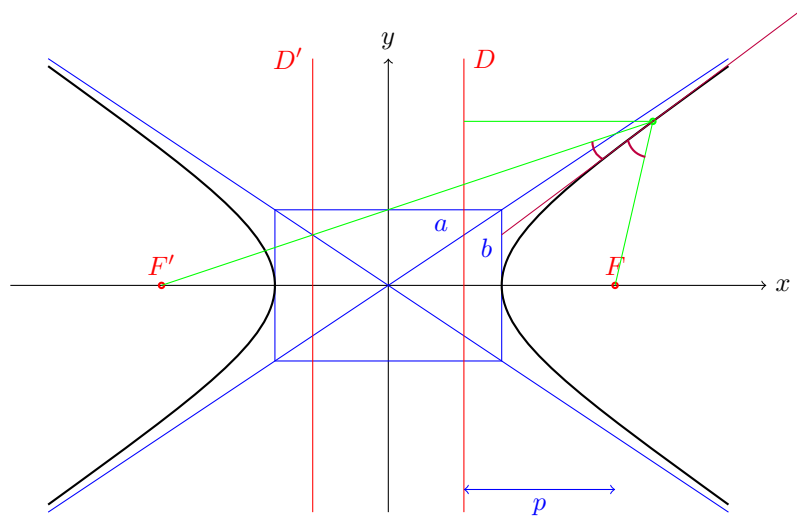
– Hyperbole :

* Réduction : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a \geq b$.

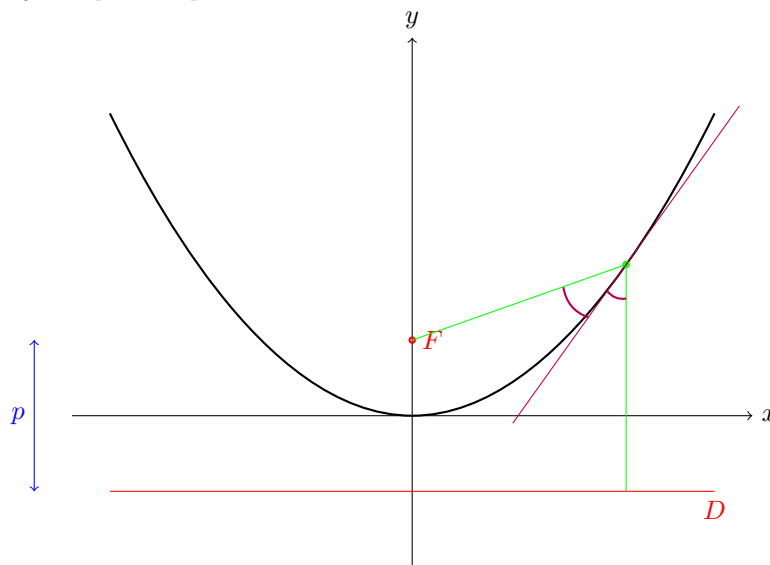
* Relation foyer-paramètre :

$$a^2 = \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2}, \quad b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1},$$

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad p^2 = \frac{b^4}{e^2 a^2}.$$



- Parabole :
 - * Réduction : $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.



• E Quelques théorèmes

Théorème VI.8 (Pascal). Soient A, B, C, A', B', C' , 6 points du plan (affine ou projectif) tels que 3 quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés. On note $P = (BC') \cap (B'C)$, $Q = (CA') \cap (C'A)$, $R = (AB') \cap (A'B)$ (éventuellement à l'infini). Alors les 6 points (A, B, C, A', B', C') sont sur une conique si et seulement si les 3 points (P, Q, R) sont alignés (éventuellement sur la droite à l'infini).

Démonstration. [A compléter] □

Théorème VI.9 (Brianchon). Soient a, b, c, a', b', c' , 6 droites du plan (affine ou projectif) tels que

3 quelconques d'entre eux ne sont jamais concourantes (ou parallèles). On note $d_a = (b \cap c, b' \cap c')$, $d_b = (c \cap a, c' \cap a')$, $d_c = (a \cap b, a' \cap b')$. Alors ces 6 droites (a, b, c, a', b', c') sont tangentes à une conique si et seulement si les 3 droites (d_a, d_b, d_c) sont alignés.

Démonstration. C'est le théorème dual du théorème de Pascal. □

Théorème VI.10 (Appollonius). Soit $q = x^2/a^2 + y^2/b^2$ un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 munie de sa structure euclidienne et C la conique $q(x, y) = 1$. Deux points M, N de C sont dit conjugués, si $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ forme une base q -orthonormée. Pour (M, N) deux points conjugués, on note P le point d'intersection des tangentes de C en M et N . Alors OMP_N est un parallélogramme d'aire ab et $OM^2 + ON^2 = a^2 + b^2$.

Démonstration. Utiliser une affinité pour se ramener au cas du cercle. □

Théorème VI.11 (Poncelet). On considère C une conique à centre de foyer F et F' . Soit M un point et T, T' les points de contact des tangentes issus de M . Alors

- $\widehat{TMT'}$ et $\widehat{TMT'}$ ont même bissectrice.
- FM est la bissectrice de $\widehat{TFT'}$ (de même pour $F'M$).

[Dessin]

VII Classification affine des quadriques

Théorème VII.1. Soit $f : E \rightarrow E$ une fonction polynômiale de degré 2. On note (r, s) la signature de la partie quadratique q de f et (r', s') la signature de son homogénéisé Q . Alors il existe $\phi : E \rightarrow E$ une application affine telle que

- $f \circ \phi(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$ si $(r', s') = (r, s)$.
- $f \circ \phi(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 + 1$ si $(r', s') = (r + 1, s)$.
- $f \circ \phi(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 - 1$ si $(r', s') = (r, s + 1)$.
- $f \circ \phi(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 - x_n$ si $(r', s') = (r + 1, s + 1)$.

Démonstration. [A completer] □

Corollaire VII.2. La classe de similitude de f est entièrement déterminée par $\varepsilon(q)$ et $\varepsilon(Q)$.

Démonstration. [A completer] □

Index

- angle
 - géométrique, 19
 - orienté de droite, 19
 - orienté de vecteurs, 18
- application affine, 5
- application conforme, 39

- barycentre, 8
- birapport, 30

- cônique, 52
- cercle, 37
 - axe radical, 45
 - espace affine, 41
 - faisceau, 44
 - puissance d'un point, 44
- complétion projective, 31
- coordonées homogènes, 29

- décomposition canonique, 6
- déhomogénéisé, 53
- déplacement, 15
- Desargues, 35
- directrices, 58
- droite projective, 32

- espace affine, 4
 - sous-espace, 4
- espace euclidien
 - affine, 14
 - vectorel, 14
- espace projectif
 - sous-espace, 28
- espace projective, 27
- Euler
 - formule, 25
- excentricité, 58

- fonction vectorielle de Leibniz, 8

- forme quadratique, 53

- Girard
 - formule, 25
- groupe affine
 - isométrie, 14
- groupe circulaire, 51

- homogénéisé, 52
- homographie, 28
 - groupe, 28
- hyperplan à l'infini, 32
- hyperplan affine, 10

- Inégalité de Ptolémée, 36
- inversion
 - analytique, 48
 - géométrique, 49
- isométrie affine, 14

- Pappus, 34
- paramètre, 58
- plan projectif, 32
- point, 4
 - affinement libre, 5
- polyèdre, 25

- quadrique
 - équivalentes, 55
 - affine, 52
 - centre, 55
 - projective, 53
 - propre, 53

- repère affine, 10
- repère projectif, 29

- similitude, 37
- Simson

droite, 21

tangent, 54

théorème

angle inscrit, 20

Ceva, 12

Ménélaüs, 12

Morley, 37

Pappus, 32

vectorialisé, 4

Bibliographie

- [Aud06] M. Audin. *Geometrie*. EDP Sciences Editions, 2006.
- [Ave92] A. Avez. *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*. Masson Editions, 1992.
- [Ber77] M. Berger. *Geometrie*. Cedic, 1977.
- [Com98] F. Combes. *Algèbre et géométrie*. Bréal, 1998.
- [Per96] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipse, 1996.
- [Tau97] P. Tauvel. *Géométrie pour l'agrégation interne*, 1997.