Correction contrôle continu 1

Exercice 1. Montrez qu'il existe une unique solution développable en série entière (de rayon de convergence > 0) à l'équation différentielle

$$2xy''(x) + y' - y = 0;\ y(0) = 1$$

Calculez son rayon et explicitez les coefficients. Exprimez cette solution à l'aide des "fonctions usuelles".

Remarques 1. La plupart des calculs jusqu'à la relation de récurrence entre les coefficients ont été effectués correctement. Les arguments théoriques ont cependant été largement oubliés : la dérivation "sous le signe somme" a été largement utilisée sans justification, l'identification des coefficients faite sans argument. Nous reprendrons cela en TD. L'astuce "$n+1 = \frac{2n+2}{2}$", qui était sensée être subtile mais accessible, était visiblement trop délicate. On signale que la formule générale

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

(avec les notations factorielle et "double factorielle") permet souvent de se débarasser de ce terme encombrant.

Solution 1. On raisonne par analyse-synthèse.

Supposons que $S(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une solution de l'équation (avec un rayon de convergence $\rho > 0$).

Soit x de module strictement inférieur à ρ. On sait (résultat général pour les séries entières) que la série dérivée est uniformément convergente sur $[-K; K]$ pour tout $K < \rho$, de même que la série deux fois dérivée. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme en x, et on a donc :

$$2x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)na_{n+1}x^n + (n+1)a_{n+1}x^n - a_n x^n) = 0$$

Par unicité du développement en série entière, on doit donc avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$$

Cette relation de récurrence définit bien une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unique sous la condition $a_0 = 0$ (qui est imposée par l'équation $y(0) = 0$), puisque $(n+1)(2n+1)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. La fonction S est bien solution de l'équation différentielle, sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

De plus, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\to infty}{\to} 0$, donc $\rho = \infty$ (règle de D'Alembert).

Pour expliciter les a_n, on remarque que $a_{n+1} = \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} a_n$ et une récurrence immédiate donne $a_n = \frac{2^n}{(2n)!}$

Ainsi, on a, **pour** $x \geq 0$ (attention, toujours bien vérifier dans quel cadre on peut faire telle ou telle opération),

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{2x})$$

De même pour $x \leq 0$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-2x})$$

Questions de cours.

0) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez la dérivée de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$. Justifiez brièvement si la fonction $f_{\mathbb{C}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$ est holomorphe ou non.

1) Soit $\alpha > 1$. Montrez que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha}$ est convergente.

2) Calculez le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

3) Donnez l'ensemble des valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$, pour lesquelles la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente. On ne demande pas de preuve.

Remarques 2. Calculer une dérivée à partir de son expression comme limite, reconnaitre une série alternée et appliquer une méthode de comparaison à l'intégrale sont des techniques qui faut maitriser **impérativement**. Les séries de Riemann sont très probablement les tous premiers exemples avec lesquels la comparaison à l'intégrale vous a été introduite.

Solution 2. 0) Le sujet précise bien que toutes les réponses attendaient justification, et la question demandait en outre de **calculer** la dérivée.

La méthode la plus standard consiste simplement à faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{(z+\epsilon)^n - z^n}{\epsilon} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}\epsilon^k - z^n}{\epsilon} \\
&= \frac{nz^{n-1}\epsilon + o(\epsilon)}{\epsilon} \\
&\underset{\epsilon \to 0}{\to} nz^{n-1}
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable de dérivée $z \mapsto nz^{n-1}$. La fonction $f_{\mathbb{C}}$ est bien holomorphe : il suffisait de remarquer que le calcul précédent s'applique aussi bien dans $\mathbb{C}$.

Pour le calcul, on pouvait également repérer une somme géométrique :

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z_0^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z}{z_0}\right)^k \underset{z \to z_0}{\to} z_0^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = nz_0^{n-1}$$

1) On isole le terme $n = 1$, puis on fait une comparaison à l'intégrale : $\sum_{n=2}^{N} n^{-\alpha} \leq \int_1^N x^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(N^{1-\alpha} - 1) \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{\alpha - 1} < \infty$. Les sommes partielles forment donc une suite croisante bornée, et donc convergente.

Attention : Si on n'isole pas le terme $n = 1$, on est tenté de comparer à l'intégrale $\int_0^N x^{-\alpha}$ qui est **divergente** au voisinage de 0, et on ne peut pas conclure (être inférieur à quelque chose de divergent ne nous dit rien ici).

2) On applique par exemple le critère de d'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} \underset{n\to\infty}{\to} 1 = 1/(\text{rayon de convergence})$, donc le rayon de la série est 1.

3) La série converge pour $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, et diverge pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (cela a été vu en TD et en cours).

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'étendre l'étude précédente à $1/2 < \alpha < 1$.

On pose $S_\alpha(\theta) := \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in (1/2; 1)$. On note $S_{\alpha,N}(\theta) := \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$

On rappelle la formule d'Abel, dite "d'intégration par partie discrète" :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{n} a_k (b_n - b_{n+1}) + \sum_{n=1}^{N} a_n b_N$$

4) Que peut-on dire dans le cas $\theta = 0$? $\theta = \pi$? $\theta = 2\pi$?

On suppose désormais $0 < \theta < 2\pi$.

5) Montrez qu'il existe $C < \infty, \epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que, pour tout N, M tels que $n_0 < N < M$ et pour tout $\theta \in (0; 2\pi)$

$$|S_{\alpha,M}(\theta) - S_{\alpha,N}(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} \left(\frac{1}{N^\alpha} + \frac{C}{N^{\alpha+\epsilon}} \right)$$

6) Que peut-on en déduire sur S_α ?

On pose $T_\alpha(\theta) = (1 - e^{i\theta}) S_\alpha(\theta)$.

7) Montrez qu'on peut prolonger T_α par continuité en 0.

8) En considérant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha - (n+1)^\alpha}{n^\alpha (n+1)^\alpha} (e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta})$, montrez que T_α est dérivable sur $(0; 2\pi)$, puis que $\theta \mapsto (1 - e^{i\theta}) T'_\alpha(\theta)$ se prolonge par continuité en 0. Quelle conjecture peut-on faire ?

Solution 3. 4) Pour $\theta = 0$, la série diverge (série de Riemann. On prouve la divergence par comparaison à l'intégrale). Pour $\theta = \pi$, on a une série alternée (série de la forme $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$, avec la suite (a_n) **monotone et qui tend vers 0**). On remarque que la série est 2π-périodique, donc diverge en $\theta = 2\pi$ (puisqu'elle diverge en 0). La périodicité justifie qu'on se restreigne ensuite à $\theta \in]0, 2\pi[$.

5) On arrive à une question délicate. On prend sa respiration et on se détend avant de se lancer dans les calculs. En lisant la suite du sujet, on voit qu'on doit déduire quelque chose de l'inégalité demandée. On remarque que l'inégalité implique que la suite $(S_{\alpha,N})_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge. Comme on sait déjà que la série diverge en 0, on sait que la convergence n'est pas absolue : il faudra vraiment utiliser le fait que $\theta \neq 0$. On sait que la suite des sommes

$$A_N := \sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}$$

est bornée pour $\theta \in]0, 2\pi[$, mais pas en 0. De plus, la borne optimale sur A_N est de la forme $\frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$, facteur qui apparait dans l'inégalité désirée. On veut donc faire apparaitre cette somme. De plus, l'exercice rappelait la formule d'Abel, qu'on applique de manière à faire apparaitre A_n :

En posant $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = n^{-\alpha}$, on a :

$$
\begin{aligned}
|S_{\alpha,M}(\theta) - S_{\alpha,N}(\theta)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{M} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n b_n \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{M-1} \sum_{k=N+1}^{n} a_k (b_n - b_{n+1}) + \sum_{n=N+1}^{M} a_n b_M \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=N+1}^{M-1} \left(\sum_{k=N+1}^{n} e^{in\theta} \right) \left(n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha} \right) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{M} e^{in\theta} M^{-\alpha} \right| \qquad \text{(inégalité triangulaire} \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{M-1} \frac{e^{i(N+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \left(n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha} \right) \right| + M^{-\alpha} \left| \frac{e^{i(N+1)\theta} - e^{i(M+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \\
&\leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} \sum_{n=N+1}^{M-1} |n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}| + \frac{2M^{-\alpha}}{|1 - e^{i\theta}|}
\end{aligned}
$$

Quand on utilise la transformation d'Abel, le dernier terme ($\sum_{n=1}^{N} a_n b_N$) est souvent négligeable. Quand on cherche des inégalités, il est donc courant de l'isoler et de le traiter séparément. Ainsi, il est ici complètement naturel de l'isoler par une inégalité triangulaire, ça n'est pas une majoration "trop grossière". Plus généralement, il est bon quand on cherche à obtenir une majoration de ne pas travailler "à l'aveugle" mais plutôt de bien se demander, après chaque inégalité, si on peut encore parvenir au résultat.

La dernière opération qu'on a effectué est justement assez grossière, puisqu'on a "rentré le module" dans les sommes (i.e. appliqué une inégalité triangulaire un grand nombre de fois). Si on avait effectué cette opération dès le début du calcul, on aurait "perdu" puisque la convergence n'était pas absolue. Vérifions donc heuristiquement que c'est ici suffisant :

Le terme sommé, $|n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}|$, est d'ordre $\alpha n^{-\alpha-1}$ lorsque $n \to \infty$ -c'est un développement limité usuel :

$$
|n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}| = n^{-\alpha} |1 - (1 + 1/n)^{-\alpha}|
$$

Puisque $\alpha > 0$, la série des $n^{-\alpha-1}$ converge, et $\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\alpha-1} \underset{N\to\infty}{\propto} N^{-\alpha}$ ("asymptotiquement proportionnel"). En mettant les choses bout à bout, on arrive bien à l'inégalité escomptée (avec une constante multiplicative peut-être légèrement différente). Il reste maintenant à faire les choses rigoureusement :

On veut remplacer $|n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}|$ par $\alpha n^{-\alpha-1}$ dans la somme. Remarquons que la différence entre ces deux termes est équivalente à $\alpha(\alpha-1)n^{-\alpha-2}$. Il existe donc un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left| |n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}| - \alpha n^{-\alpha-1} \right| \leq 2 \left| \alpha(\alpha-1) n^{-\alpha-2} \right|$.

Pour $N \geq n_0$, on a donc

$$
\begin{aligned}
|S_{\alpha,M}(\theta) - S_{\alpha,N}(\theta)| &\leq \frac{2\alpha}{|1 - e^{i\theta}|} \sum_{n=N+1}^{M-1} n^{-\alpha-1} + \frac{4\alpha(1-\alpha)}{|1 - e^{i\theta}|} \sum_{n=N+1}^{M-1} n^{-\alpha-2} + \frac{2M^{-\alpha}}{|1 - e^{i\theta}|} \\
&\leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} \left(N^{-\alpha} - M^{-\alpha} + O(N^{-\alpha-1}) + O(N^{-\alpha-1}) + M^{-\alpha} \right) \\
&\leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} \left(N^{-\alpha} + O(N^{-\alpha-1}) \right)
\end{aligned}
$$

Ceci est n'inégalité recherchée, avec $\epsilon = 1$ (notons bien que le $O(N^{-\alpha-1})$, de même que n_0, ne dépendent pas de θ).

6) On en déduit que la suite $S_{\alpha,n}(\theta)$ est de Cauchy, donc S_α converge simplement sur $]0, 2\pi[$. De plus, $\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}$ est uniformément borné sur tout intervalle de la forme $[\delta, 2\pi - \delta]$ (où $0 < \delta < \pi$) : sur un tel intervalle, S_α converge uniformément. En particulier, la somme est continue sur $]\delta, 2\pi - \delta[$. Comme c'est vrai pour tout $\delta > 0$ et que la continuité est une propriété **locale**, la somme est continue sur $]0, 2\pi[$. **attention : la convergence n'est pas uniforme sur** $]0, 2\pi[$

7) On remarque que, pour $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$T_\alpha(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha - (n+1)^\alpha}{n^\alpha (n+1)^\alpha}(e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}) = U_\alpha(\theta) \tag{1}$$

(c'est la limite obtenue après la même transformation d'Abel que dans la question 5. On note U à la place de T pour bien rappeler que la somme correspond à une autre série, avec égalité entre les limites. En particulier, quand on parlera de "dérivée terme à terme" pour U, ça n'a pas le même sens que pour T). La série à droite est bien définie en $\theta = 0$, et converge normalement sur $[0; 2\pi]$. Les sommes partielles sont clairement continues, et la somme totale est donc continue sur $[0, 2\pi]$. On a donc une fonction f qui est bien définie et continue sur $[0, 2\pi]$, et égale à T_α sur $]0, 2\pi[$: T_α se prolonge donc en 0 par continuité, par $f(0)$.

8) Pour la dérivabilité sur $]0, 2\pi[$: on remarque qu'on ne peut pas dériver S_α terme à terme, puisque la série dérivée diverge grossièrement. On utilise encore $T_\alpha = U_\alpha$. En effet, la série dérivée de la série U_α est donnée par

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^\alpha - (n+1)^\alpha}{n^\alpha (n+1)^\alpha}(ie^{i\theta} - i(n+1)e^{i(n+1)\theta}) = \sum_{n\geq 1} \frac{n^\alpha - (n+1)^\alpha}{n^\alpha (n+1)^\alpha}(ie^{i\theta} - ie^{i(n+1)\theta}) - i\sum_{n\geq 1} \frac{n^\alpha - (n+1)^\alpha}{n^{\alpha-1}(n+1)^\alpha}e^{i(n+1)\theta}$$

Le premier des termes à droite correspond à une série convergente puisqu'il est égal à iU_α. Pour le second terme, on réapplique une transformation d'Abel ! On ne détaille pas le calcul ici, mais disons simplement que cette "IPP discrète" permet de compenser le terme "n" supplémentaire causé par la dérivation. Cependant, cette IPP apporte un second facteur $\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}$, ce qui explique qu'on remultiplie par $1 - e^{i\theta}$ avant de prendre la limite en 0.

La conjecture attendue était de la forme :

On peut définir une famille de fonctions continues $S_\alpha^{(n)}$ sur $[0, 2\pi]$, dérivables sur $]0, 2\pi[$, telles que $S_\alpha^{(1)} = T_\alpha$, et pour tout $n \geq 1$, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, $S_\alpha^{(n+1)}(\theta) = (1 - e^{i\theta}) \left(S_\alpha^{(n)}\right)'(\theta)$.