Contrôle continu 2 : Une sommation de Poisson

durée : 1h

Les documents et les appareils electroniques ne sont pas autorisés. Le travail est individuel. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale. Sauf précision contraire, toutes les questions nécessitent une preuve. Les résultats vus en TD peuvent être utilisés sans restriction. Pour toute erreur ou imprécision, merci de m'interpeller. La bonne compréhension de l'énoncé et des indications fait cependant partie de l'exercice. Les questions marquées d'une étoile peuvent être plus difficiles. La plupart des questions peuvent être rêsolues séparément des autres. Il est parfois possible de répondre simultanément à deux questions. Merci dans ce cas de bien indiquer les deux questions concernées.

Exercice 1. Calculer la dérivée de la série sin sur $\mathbb{C}$.

La série sin *est donnée par*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2} x^k}{k!}$$

(ce qu'on peut par exemple retrouver à partir de la série exponentielle $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *et la formule* $\sin(x) = \Im(e^{ix})$*).*

Cette série dérivée est uniformément convergente sur tout segment. En effet, sur le segment $[-A, A]$ *par exemple, le* n*-ième de la série est borné en valeur absolue par* $\frac{A^n}{n!}$*, qui est le terme général d'une série convergente (la série* $\exp(A)$*). On peut donc dériver sous le signe somme, et on retrouve la série du cosinus.*

Exercice 2. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & t\exp(at)\sin(bt) \end{array}$$

Quelles sont valeurs de s pour lesquelles $\mathcal{L}f(s)$ est bien défini ?

On peut soit faire un calcul direct avec une IPP, soit utiliser la formule (avec les notations du cours)

$$\mathcal{L}M = -\partial\mathcal{L}$$

pour se ramener à calculer la transformée de Laplace de

$$g : t \mapsto \exp(at)\sin(bt)$$

On a $g = \frac{g_1 - g_2}{2i}$ *où*

$$g_1 : t \mapsto \exp((a+ib)t)$$
$$g_2 : t \mapsto \exp((a-ib)t)$$

On a alors, dès que $\Re(a - s + ib) < 0$*, c'est à dire dès que* $s > \Re(a + ib) = \Re(a) - \Im(b)$ *:*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}g_1)(s) &= \int_0^\infty g_1(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{(a-s+ib)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{a-s+ib}\end{aligned}$$

et de même dès que $s > \Re(a - ib) = \Re(a) + \Im(b)$, $(\mathcal{L}g_2)(s) = -\frac{1}{a-s-ib}$
Ainsi, dès que $s > \Re(a) + |\Im(b)|$, on a

$$(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{a-s+ib} + \frac{1}{a-s-ib}\right)$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= -\frac{1}{2i}\partial\left(-\frac{1}{a-s+ib} + \frac{1}{a-s-ib}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{(a-s+ib)^2} + \frac{1}{(a-s-ib)^2}\right)\end{aligned}$$

Cette expression se simplifie légèrement, mais cette forme est suffisamment explicite pour arrêter les calculs ici.

Il est ensuite aisé de voir que l'intégrale est divergente pour $s = \Re(a) + |\Im(b)|$.

Problème. Remarques culturelles : L'opérateur linéaire

$$\mathcal{F} : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right)$$

est appelé *transformée de Fourier* et est fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques (probabilité, théorie des groupes, EDP...)

Pour $\lambda = \pi$, les premières questions montrent que la fonction $f : x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ vérifie, pour une certaine constante c, $\mathcal{F}(f) = cf$. Autrement dit, f est un vecteur propre de $\mathcal{F}$, associé à la valeur propre c. Le calcul qui suit, qui est une des nombreuses méthodes de calcul de l'*intégrale de Gauss* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, permet de déterminer la valeur de c.

Le calcul est en fait un cas particulier de la *formule sommatoire de Poisson*, qui affirme que, sous certaines conditions sur la fonction f, on a l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}(f))(k)$$

On fixe deux réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ pour tout le problème. **Première partie :**Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}x$$

est convergente. *On a $|e^{-\lambda x^2}e^{-2i\pi xt}| = e^{-\lambda x^2}$. On a vu en TD que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ est convergente, et un changement de variable immédiat montre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx$ est convergente. L'intégrale $\phi(t)$ est donc absolument convergente, donc convergente.* Montrer que $t \mapsto \phi(t)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = -\frac{2\pi^2}{\lambda} t y(t) \tag{1}$$

Le raisonnement précédent montre en fait la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, et donc la continuité de ϕ. Posons $f(t, x) = e^{-\lambda x^2}e^{-2i\pi xt}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\partial_1 f(t,x)| &= |-2i\pi x e^{-\lambda x^2}e^{-2i\pi xt}|\\ &= 2\pi x e^{-\lambda x^2}\end{aligned}$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante de t. La fonction $\partial_1 f$ est donc intégrable en x sur $\mathbb{R}$, uniformément en t sur tout $\mathbb{R}$ (il était ici inutile de se restreindre aux *segments !), et continue. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale : ϕ est dérivable, et*

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} -2i\pi x e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{i\pi}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x e^{-\lambda x^2}\right) e^{-2i\pi x t}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= -\frac{i\pi}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\left(\partial_x e^{-2i\pi x t}\right) dx \\ &= -\frac{i\pi}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}(-2i\pi t)e^{-2i\pi x t} dx \\ &= -\frac{2\pi^2}{\lambda} t\phi(t)\end{aligned}$$

Cette équation différentielle montre que ϕ est bien $\mathcal{C}^\infty$: si le membre de droite est k fois dérivable, alors le membre de gauche également, donc ϕ est $k+1$ fois dérivable. On conclut par une récurrence sur k. Exprimer $\phi(t)$ en fonction de $\phi(0)$. On pourra **par exemple** suivre la méthode suivante :

3. — Montrer que ϕ est à valeurs réelles.
   — Montrer que, si $\phi(t) > 0$ pour $t \in [0, t_0]$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\phi(t) > 0$ pour $t \in [0, t_0 + \epsilon[$.
   — Utiliser $\ln(\phi)$ pour montrer que, si $\phi(t) > 0$ pour $t \in [0, t_0[$, alors $\phi(t_0) > 0$.
   — Montrer que ϕ est à valeurs réelles positives.
   — Calculer $\ln(\phi)$.

   Attention : A moins d'utiliser un théorème d'unicité ("Cauchy-Lipschitz") il ne suffit pas de dire que $t \mapsto \phi(0)e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2}$ est bien solution de l'équation différentielle : l'équation pourrait avoir plusieurs solutions...

   Remarquons d'abord qu'il existe une méthode bien plus astucieuse et courte que la méthode employée ici.

   On rappelle que si un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé, alors cette intervalle est $\mathbb{R}$.

   Le changement de variable $y = -x$ dans la définition de ϕ montre que $\phi(t) = \overline{\phi(t)}$, donc $\phi(t) \in \mathbb{R}$. ***Attention : le fait que ϕ soit solution d'une l'équation différentielle à coefficients réels ne permet pas de déduire directement que ϕ est à valeurs réelles, même si c'est tentant à dire....*** *Le même changement de variable permet de dire que $\phi(t) = \phi(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on suppose désormais $t \geq 0$. On remarque déjà que $\phi(0)$ est l'intégrale d'une fonction réelle positive, non nulle, donc $f(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $t_0 = \inf\{t > 0 : \phi(t) \leq 0\}$. Il faut donc montrer que $t_0 = \infty$, et on raisonne par l'absurde. On suppose donc $t_0 < \infty$. Par continuité de ϕ, il est clair que $t_0 > 0$ et $\phi(t_0) = 0$. Pour tout $0 \leq t < t_0$, on a $\phi(t) > 0$, et $g(t) = \ln(\phi(t))$ est donc bien défini. On a $g'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = -\frac{2\pi^2}{\lambda}t$ (la première égalité est juste "la dérivée d'une composition", la deuxième découle de l'équation vérifiée par ϕ). Ainsi, pour tout $0 \leq t < t_0$, on a $g(t) = g(0) + \int_0^t(-2\pi^2 u)\,\mathrm{d}u = g(0) - \frac{\pi^2}{\lambda}t^2$, puis $\phi(t) = \exp(g(t)) = \exp(g(0))\exp(-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2) = \phi(0)\exp(-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2)$. Par continuité, on a alors $\phi(t_0) = \lim_{t\to t_0}\phi(0)\exp(-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2) = \phi(0)\exp(-\frac{\pi^2}{\lambda}t_0^2) \neq 0$ puisque $t_0 < \infty$ et $\phi(0) \neq 0$. C'est absurde puisqu'on a vu avant que $\phi(t_0) = 0$.*

4. Montrer que $\phi(t) = \phi(0)e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2}$.

5. Bonus : donner sans preuve la valeur de $\phi(0)$ pour $\lambda = \frac{1}{2}$. Dans la suite du sujet, on supposera cette valeur inconnue.

   Le raisonnement de la question précédente est bien valide pour $0 \leq t < \infty$: $g(t)$ est bien défini, bien solution de $g'(t) = -\frac{2\pi^2}{\lambda}t$, puis on a bien $\phi(t) = \phi(0)\exp(-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2)$. Le cas $t < 0$ s'obtuent par symétrie. L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ a été calculée en TD, et vaut $\sqrt{2\pi}$. C'est une valeur à connaitre (et à savoir retrouver une fois terminé le cours sur les intégrales multiples).

   Seconde partie :

6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi k)^2}$$

   converge. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $k > \frac{|t|}{2\pi}$, $e^{-\mu(t-2\pi k)^2} \leq e^{-\mu\pi^2k^2}$, qui est le terme général d'une série convergente (par exemple parce que $e^{-\mu\pi^2k^2} < e^{-k}$ pour k assez grand).*

7. Montrer que f est continue et 2π-périodique. *Attention : la convergence est uniforme sur tous les segments, mais n'est PAS uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que la convergence est uniforme sur $[-t_0, t_0]$:*

   Pour $k > \frac{|t_0|}{2\pi}$, $e^{-\mu(t-2\pi k)^2} \leq e^{-\pi^2k^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. Donc pour tout k,

$$e^{-\mu(t-2\pi k)^2} \leq \max\left(e^{-\mu\pi^2k^2}; \mathbf{1}_{k>\frac{|t_0|}{2\pi}}\right)$$

   qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi f est continue sur $(-t_0, t_0)$. Comme t_0 est quelconque, f est bien continue sur $\mathbb{R}$. La périodicité est claire :

$$\begin{aligned}
f(t+2\pi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t+2\pi-2\pi k)^2} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi(k-1))^2} \\
&= \sum_{k'\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi k')^2} \qquad\qquad (k' = k-1) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

8. Exprimer les coefficients de Fourier complexes de f en fonction de $\phi(0)$. *On pourra faire un changement de variable de la forme $\tilde{\theta} = \theta + 2k\pi$.*

   On note $c_n(f)$ le n-ième coefficient complexe de f. On a alors

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

   Pour justifier la dernière égalité, il suffit (théorème 13 dans le polycopié) de montrer que la convergence de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta}$$

est uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il suffit donc de montrer la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2} e^{in\theta} \right| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}$$

ce qu'on a déjà fait pour la question précédente. Ainsi

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2} e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-2k\pi}^{2(1-k)\pi} e^{-\mu\theta^2} e^{-in(\theta+2k\pi)}\, \mathrm{d}\theta \qquad \textit{(changement de variable dans l'intégrale)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-2k\pi}^{2(1-k)\pi} e^{-\mu\theta^2} e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \qquad \textit{(car } e^{-2ink\pi} = 1\textit{)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\theta^2} e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \phi(-\frac{n}{2\pi}) \\
&= \phi(0) e^{-\frac{n^2}{4\mu}}
\end{aligned}$$

9. $(\star)$ Montrer l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(0)^2 e^{-\frac{n^2}{2\mu}} = \frac{2\pi\phi(0)}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu n^2}$$

La formule de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\, \mathrm{d}\theta$$

(qui s'applique bien ici) donne :

$$\begin{aligned}
\phi(0)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4\mu}} &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2} \right)^2 d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k_1)^2-\mu(\theta-2\pi k_2)^2} d\theta \\
'=' &\ 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-2\mu\theta^2+4\pi\mu(k_1+k_2)\theta-4\pi^2\mu(k_1^2+k_2^2)}\ \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{-k_0\pi}^{(2-k_0)\pi} e^{-2\mu(\theta^2+2\pi k_0\theta+k_0^2\pi^2)+4\pi\mu(k_1+k_2)(\theta+k_0\pi)-4\pi^2\mu(k_1^2+k_2^2)}\ \mathrm{d}\theta \qquad (\theta = \theta' + k_0 \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{-k_0\pi}^{(2-k_0)\pi} e^{-2\mu\theta^2+4\pi\mu(k_1+k_2-k_0)\theta+2\pi^2\mu(2(k_1+k_2)k_0-2k_1^2-2k_2^2-k_0^2)}\ \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{-(k_1+k_2)\pi}^{(2-k_1-k_2)\pi} e^{-2\mu\theta^2-2\pi^2(k_1-k_2)^2}\ \mathrm{d}\theta \quad (k_0 = k_1+k_2) \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu(k_1-k_2)^2} \int_{-(k_1+k_2)\pi}^{(2-k_1-k_2)\pi} e^{-2\mu\theta^2}\ \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \sum_{p,q\in\mathbb{Z},p+q\ \mathit{pair}} e^{-2\pi^2\mu q^2} \int_{-p\pi}^{2\pi-p\pi} e^{-2\mu\theta^2}\ \mathrm{d}\theta \quad (p = k_1+k_2, q = k_1-k_2) \\
&= 2\pi \sum_{q\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu q^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu\theta^2}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\theta^2}\ \mathrm{d}\theta \quad (\theta' = \sqrt{2}\theta)
\end{aligned}$$

10. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ *En prenant* $\mu = \frac{1}{2\pi}$*, l'égalité précédente devient :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(0)^2 e^{-\pi n^2} = \frac{2\pi\phi(0)}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$$

En simplifiant des deux côtés par $\phi(0) \neq 0$*, et par* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2} \neq 0$*, on obtient*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\pi}}\ \mathrm{d}x = \phi(0) = \sqrt{2}\pi$$

Le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$ *permet alors de conclure*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$