

Contrôle continu 1 : Dualité, géométrie affine

Exercice 1. On cherche une base de l'image et du noyau. Le plus simple est d'appliquer un algorithme de pivot en effectuant des opérations en colonnes sur la matrice $\begin{pmatrix} A_\lambda \\ I_4 \end{pmatrix}$.

On part du coefficient en haut à gauche de la matrice, et on effectue les opérations colonnes pour annuler les coefficients à sa droite sur sa ligne (sans toucher aux colonnes sur sa gauche : c'est inutile dans cet exercice, et risque de conduire à des erreurs de calculs), puis on continue en descendant la diagonale depuis ce coefficient. Ainsi (on note en gras le coefficient qui sert de "pivot") :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5/3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 1 - \lambda & \lambda \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 - \frac{5}{3}C_1 \\ C_4 - 3C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2/3 - \lambda & -10 \\ 1 & 1 & -2/3 - \lambda & \lambda - 3 \\ \hline 1 & -2 & -5/3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \mathbf{1} & -2/3 - \lambda & -10 \\ 1 & 1 & -2/3 - \lambda & \lambda - 3 \\ \hline 1 & -2 & -5/3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 + (2/3 + \lambda)C_2 \\ C_4 + 10C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda + 7 \\ \hline 1 & -2 & -3 - 2\lambda & -23 \\ 0 & 1 & 2/3 + \lambda & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

A ce stade, on a un zéro là où on voudrait un pivot : s'il y a au moins un coefficient non nul sur sa droite (et sur sa ligne), on intervertit les colonnes. C'est ici le cas dès que $\lambda \neq -7$. On commence donc par traiter le cas $\lambda = -7$: dans ce cas, la partie supérieure de la matrice (au-dessus de la barre) est déjà triangulaire et on a terminé l'algorithme. On sait alors qu'une base de l'image est

donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et une base du noyau est donnée par $\begin{pmatrix} 11 \\ -19/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda \neq -7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda + 7 \\ \hline 1 & -2 & -3 - 2\lambda & -23 \\ 0 & 1 & 2/3 + \lambda & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda + 7 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -23 & -3 - 2\lambda \\ 0 & 1 & 10 & 2/3 + \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La partie supérieure est maintenant triangulaire et on a terminé l'algorithme. Une base du noyau est donnée par $\begin{pmatrix} -3 - 2\lambda \\ 2/3 + \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour ce qui est de l'image, on a certes une base don-

née par $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda + 7 \end{pmatrix}$. Remarquons cependant que cette base est de cardinal 3, donc $\dim \text{Im } A_\lambda = 3$. Or $\text{Im } A_\lambda \subseteq \mathbb{R}^3$. Si $E \subseteq F$ et que E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie, alors $E = F$. Donc $\text{Im } A_\lambda = \mathbb{R}^3$, et une base est donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On se place dans le repère (non orthonormé en général) (A, \vec{AB}, \vec{AC}) . Si vous avez choisi un autre repère initialement, vous aurez des coordonnées différentes durant les calculs, et seul le résultat final (le "p") doit être le même (cette quantité est indépendante du repère choisi).

Dans ce repère, on a $A : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D : \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

On voit rapidement que $E : \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

La droite \mathcal{D} est dirigée par le vecteur $\vec{BD} : \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et passe par E . Tout point X sur cette droite est donc de la forme $E + \mu \vec{BD}$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$, et ses coordonnées sont alors $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + 3\mu \\ \lambda\mu \end{pmatrix}$.

Similairement, la droite (CD) est dirigée par le vecteur $\vec{CD} : \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$ et passe par C . Tout point Y sur cette droite est donc de la forme $C + \gamma \vec{CD}$ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$, et ses coordonnées sont alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\gamma \\ \lambda\gamma - \gamma \end{pmatrix}$.

Puisque le point $F : \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ appartient à ces deux droites, il doit pouvoir s'écrire sous ces deux formes. On a ainsi

$$\begin{cases} x_F = 4\gamma = 1/3 + 3\mu \\ y_F = \lambda\mu = \lambda\gamma - \gamma \end{cases}$$

Attention : dans ce système, μ et γ sont des inconnues qu'on a introduit, tandis que λ est une donnée du problème.

De la première équation, on déduit $\mu = 4\gamma/3 - 1/9$. En injectant dans la seconde équation, on obtient $\lambda(4\gamma/3 - 1/9) = \lambda\gamma - \gamma$, soit $\gamma(\lambda - 1 - \frac{4}{3}\lambda) = -\frac{\lambda}{9}$, soit encore

$$\gamma = \frac{\lambda}{3(3+\lambda)}$$

On a ainsi $F = C + \frac{\lambda}{3(3+\lambda)} \vec{CD}$, c'est à dire $\vec{CF} = \frac{\lambda}{3(3+\lambda)} \vec{CD}$.

Dire que F est le barycentre de (C, p) et $(D, 1-p)$ revient à dire que $p\vec{FC} + (1-p)\vec{FD} = 0$, c'est à dire que $\vec{FC} + (1-p)\vec{CD} = 0$, c'est à dire $\vec{CF} = (1-p)\vec{CD}$.

Ici on a donc $1-p = \frac{\lambda}{3(3+\lambda)}$.

Exercice 3. Il s'agit ici essentiellement de la même méthode que pour résoudre l'un des exercices de la première feuille de TD.

Pour la première question : soit $i \neq j$, et soit k un indice quelconque. On sait que d'une part $E_{i,j} = E_{i,k}E_{k,j}$, d'autre part $E_{k,j}E_{i,k} = 0$ car $i \neq j$. On a donc

$$a_{i,j} = \Phi(E_{i,j}) = \Phi(E_{i,k}E_{k,j}) = \Phi(E_{k,j}E_{i,k}) = \Phi(0) = 0$$

Pour la deuxième question : on sait que d'une part $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$, d'autre part $E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j}$. On a donc

$$a_{i,i} = \Phi(E_{i,i}) = \Phi(E_{i,j}E_{j,i}) = \Phi(E_{j,i}E_{i,j}) = \Phi(E_{j,j}) = a_{j,j}$$

Rappelons que les formules de multiplication des matrices élémentaires, qui sont sensées être connues dès l'entrée en L2, ont été rappelées le jour précédent le CC (ainsi que lorsque l'exercice sur la première feuille a été corrigée).

Exercice 4. La première question aurait du être évidente et ne fait appel qu'à des bases de L1. Elle a donné lieu à de nombreuses mauvaises interprétations, qui sont révélatrices d'une mauvaise compréhension des concepts d'espace vectoriel et de fonction linéaire, mais aussi des concepts même de variable et de fonction. Il est crucial de régler au plus vite ces problèmes.

Il me parait important de souligner également que, si on aborde en TD, en cours, et lors des évaluations, un certain nombre de problèmes qui font intervenir des espaces vectoriels dont les vecteurs sont des fonctions, des suites, des polynômes, etc., ça n'est pas pour le folklore. L'algèbre linéaire est utilisée quotidiennement dans de tels contextes par toutes les personnes qui font des mathématiques, qu'ils s'agissent de chercheurs ou d'ingénieurs, en physique, en informatique, en finance, en biologie, en médecine ou autre. D'autre part, si de tels exercices demandent peut-être un effort d'abstraction légèrement supérieur, il est essentiel de s'y habituer pour pouvoir aborder la L3 qui introduit nombre de notions bien plus théoriques.

La plupart des personnes qui ont abordé la question ont tenté de montrer que l'application $u \mapsto \tau_u$ est linéaire. Ça n'est pas le cas, ne serait-ce que parce que $u \in \mathbb{R}^+$ et que \mathbb{R}^+ n'est pas un espace vectoriel.

D'autre part, si on avait voulu poser une telle question, on aurait pas commencé la question par "Pour u [...]" : dans cette question u est une quantité **fixée**, une "donnée du problème". On est sensé répondre à la question **pour tout** u .

Pour rendre les choses bien explicites, fixons $u = 3$. Les éléments de E sont des **fonctions**. Ainsi, si f est une fonction, $g = \tau_3(f)$ est également une fonction. A un élément $t \in \mathbb{R}^+$, g associe $f(t + 3)$. Si on évalue par exemple cette fonction en 12, on obtient

$$(\tau_3(f))(12) = f(12 + 3) = f(15)$$

. Ainsi, si f est par exemple la fonction $t \mapsto t^2$, on a

$$(\tau_3(f))(12) = f(12 + 3) = f(15) = 15^2 = 225$$

Passons maintenant aux questions. Pour la première, il faut montrer

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \tau_u(\lambda x + y) = \lambda \tau_u(x) + \tau_u(y) \quad (4)$$

ATTENTION encore une fois, x et y sont ici des éléments de E et sont donc des **fonctions**, ainsi que $\tau_u(\lambda x + y)$, $\tau_u(x)$ et $\tau_u(y)$.

La formule 4 revient à dire que

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (\tau_u(\lambda x + y))(t) = (\lambda \tau_u(x) + \tau_u(y))(t) \quad (5)$$

(car deux fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C} sont égales si et seulement si elles coïncident en tout point).

Or

$$\begin{aligned} (\tau_u(\lambda x + y))(t) &= (\lambda x + y)(t + u) && \text{par définition de } \tau_u. \\ &= \lambda x(t + u) + y(t + u) && \text{par définition de la structure vectoriel d'un espace de fonctions.} \\ &= \lambda(\tau_u x)(t) + (\tau_u y)(t) && \text{par définition de } \tau_u. \\ &= (\lambda \tau_u(x) + \tau_u(y))(t) && \text{par définition de la structure vectoriel d'un espace de fonctions.} \end{aligned}$$

Pour la deuxième question, la réponse attendue était $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$, mais la question était laissée ouverte, et j'ai accepté d'autres réponses également pertinentes (par exemple " $\tau_u \circ \tau_v$ est linéaire" ou " $\tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u$ ").

Montrons $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$.

Cela revient à dire que $\forall f \in E, (\tau_u \circ \tau_v)(f) = \tau_{u+v}(f)$.

Cela revient à dire $\forall f \in E, \forall t \in \mathbb{R}^+, ((\tau_u \circ \tau_v)(f))(t) = (\tau_{u+v}(f))(t)$.

Fixons f et t , et posons $g = \tau_v(f)$ et $w = t + u$ (ça n'est pas nécessaire, mais seulement pédagogique) Or

$$\begin{aligned} ((\tau_u \circ \tau_v)(f))(t) &= ((\tau_u(\tau_v(f))))(t) \\ &= ((\tau_u(g)))(t) \\ &= g(t + u) \\ &= (\tau_v(f))(t + u) \\ &= (\tau_v(f))(w) \\ &= f(w + v) \\ &= f(t + (u + v)) \\ &= (\tau_{u+v}(f))(t) \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

Pour la troisième question : pour $u = 0$, τ_u est la fonction identité de E , et est donc à la fois injective et surjective. Pour $u \neq 0$, τ_u est surjective mais pas injective.

Montrons déjà la surjectivité : soit $f \in E$. Considérons la fonction

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } t < u \\ f(t - u) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie aisément que cette fonction est continue (donc $g \in E$), et que $\tau_u(g) = f$.

Montrons maintenant la non injectivité : soit $f \in E$ et $g \in E$ deux fonctions telles que $f|_{[u, \infty[} = g|_{[u, \infty[}$ mais $f \neq g$ (deux telles fonctions existent dès que $u > 0$. On peut par exemple les construire affines par morceaux.). Alors on vérifie aisément que $\tau_u(f) = \tau_u(g)$.

Pour la dernière réponse que beaucoup ont donné, il s'agissait de raisonner par l'absurde et d'appliquer le théorème du rang, ou d'énoncer directement le résultat suivant :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Alors f est injectif si et seulement si il est surjectif.

Dans la suite, il y avait une petite erreur d'énoncé que je n'ai repéré que le soir même, et pour laquelle je vous présente mes excuses. En effet, pour $u < 0$, τ_u ne préserve pas l'espace des fonctions continues, il fallait plutôt travailler avec l'espace E' des fonctions continues par morceaux. Toutes les preuves faites jusqu'ici restent valide en remplaçant E par E' (il y a même une preuve qui devient légèrement plus simple). D'autre part je crois que personne n'a été perturbé par cette erreur, puisque vous êtes déjà très peu à avoir atteint cette question, et que cela n'empêchait pas de traiter les questions posées. On suppose ici qu'on a remplacé toutes les occurrences de E par E' dans l'énoncé.

-Pour la linéarité, c'est la même preuve que pour $u \geq 0$.

-Pour la deuxième question, on a encore $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$ **lorsque u et v sont de même signe, ou que $v \leq -u < 0$** . Cependant, lorsque $-u < v < 0$, $\tau_u \circ \tau_v = p \circ \tau_{u+v}$, où p est un projecteur (explicitement, $(p(f))(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < v + u \\ f(t) & \text{sinon.} \end{cases}$)

-pour la troisième question, on montre (pour $u \neq 0$), que τ_u est injectif mais non surjectif.

Injectif : il suffit de montrer que $\tau_u(f) = 0 \implies f = 0$, c'est à dire que $\forall t \geq 0, (\tau_u(f))(t) = 0 \implies \forall v \geq 0, f(v) = 0$. Supposons donc que $\forall t \geq 0, (\tau_u(f))(t) = 0$. Alors en particulier, $\forall t \geq -u, (\tau_u(f))(t) = 0$. Or, pour $t \geq -u$, $(\tau_u(f))(t) = f(t + u)$.

Ainsi on sait que $\forall t \geq -u, f(t+u) = 0$: ceci revient exactement à dire que $\forall v \geq 0, f(v) = 0$.

Non surjectif ($u \neq 0$) : la fonction constante égale à 1 par exemple n'est pas dans l'image de τ_u , puisque $(\tau_u(f))(0) = 0 \neq 1$ pour toute fonction $f \in E'$.

-quatrième question : théorème du rang encore.

Enfin pour la dernière question, marquée comme plus dure, je vous enverrai la correction par mail si vous me la demandez, et nous pourrons en parler ensemble.