Contrôle continu 1 : Dualité, géométrie affine

Exercice 1.

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 2 & 5/3 & 3 \\ 4 & 9 & 6-\lambda & 2 \\ 1 & 3 & 1-\lambda & \lambda \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4-3C_1]{\substack{C_2-2C_1 \\ C_3-\frac{5}{3}C_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \mathbf{1} & -2/3-\lambda & -10 \\ 1 & 1 & -2/3-\lambda & \lambda-3 \\ \hline 1 & -2 & -5/3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4+10C_2]{C_3+(2/3+\lambda)C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda+7 \\ \hline 1 & -2 & -3-2\lambda & -23 \\ 0 & 1 & 2/3+\lambda & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si $\lambda = -7$: une base du noyau : $\begin{pmatrix} 11 \\ -19/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de l'image : $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda \neq -7$: une base du noyau : $\begin{pmatrix} -3-2\lambda \\ 2/3+\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base de l'image : la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On se place dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Dans ce repère, $D : \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et $E : \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ainsi que $\vec{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} F \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} :\ F = E + \mu \vec{BD} \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} :\ F : \begin{pmatrix} 1/3 + 3\mu \\ \lambda\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \in (CD) &\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} :\ F = C + \gamma \vec{CD} \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} :\ F : \begin{pmatrix} 4\gamma \\ \lambda\gamma - \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} x_F = & 4\gamma & = 1/3 + 3\mu \\ y_F = & \lambda\mu & = \lambda\gamma - \gamma \end{cases}$$

d'où $\mu = 4\gamma/3 - 1/9$. En injectant dans la seconde équation, on obtient $\gamma = \frac{\lambda}{3(3+\lambda)}$. Ainsi $\vec{CF} = \frac{\lambda}{3(3+\lambda)}\vec{CD}$, donc F est le barycentre de $(C, 1 - \frac{\lambda}{3(3+\lambda)})$ et $(D, \frac{\lambda}{3(3+\lambda)})$.

Exercice 3. Soit $i \neq j$, et $k \in [|1, n|]$. On a :

$$a_{i,j} = \Phi(E_{i,j}) = \Phi(E_{i,k}E_{k,j}) = \Phi(E_{k,j}E_{i,k}) = \Phi(0) = 0$$

$$a_{i,i} = \Phi(E_{i,i}) = \Phi(E_{i,j}E_{j,i}) = \Phi(E_{j,i}E_{i,j}) = \Phi(E_{j,j}) = a_{j,j}$$

Par linéarité, on en déduit que $\Phi(M) = a_{1,1}Tr(M)$. Ainsi l'ensemble cherché est inclus dans $\mathbb{R}Tr$. Réciproquement, on a vu en exercice de TD que la trace vérifie bien les conditions de l'énoncé et on en déduit directement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λTr vérifie également ces conditions.

Exercice 4. Question 1 : Soit $f, g \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$(\tau_u(\lambda f+g))(t) = (\lambda f+g)(t+u) = \lambda f(t+u)+g(t+u) = \lambda(\tau_u(f))(t)+(\tau_u(g))(t) = (\lambda\tau_u(f)+\tau_u(g))(t)$$

donc $\tau_u(\lambda f + g) = \lambda\tau_u(f) + \tau_u(g)$.

Question 2 : $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$.

Question 3 : pour $u = 0$, τ_u est la fonction identité de E, et est donc à la fois injective et surjective. Pour $u \neq 0$: soit $f \in E$. Soit

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(0) & \text{si } t < u \\ f(t-u) & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

On voit que $g \in E$, et $\tau_u(g) = f$. Donc τ_u est surjectif.

Soit maintenant $f, g \in E$, $f \neq g$, telles que $f_{|[u,\infty[} = g_{|[u,\infty[}$ mais $f \neq g$ (deux telles fonctions existent pour $u > 0$). Alors $\tau_u(f) = \tau_u(g)$, donc τ_u n'est pas injectif.

Question 4 : pour un endomorphisme en dimension finie, injectif $\Leftrightarrow$ surjectif.

Ici aller voir la remarque sur l'énoncé "version longue".

Question 1 : c'est la même preuve que pour $u \geq 0$.

Question 2 : Pour u, v de même signes, ou $v \leq -u < 0$, on a encore $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$.

Lorsque $-u < v < 0$, on commence par "translater vers la gauche, en oubliant ce qu'il y a à gauche de $-v$", puis on retranslate vers la droite, mais ce qui a été oublié est perdu. Ainsi, on a $\tau_u \circ \tau_v = p \circ \tau_{u+v}$, où p est le projecteur $f \mapsto f\mathbf{1}_{\cdot \geq v+u}$.

Question 3 : $u = 0$: $\tau_u = \mathrm{Id}_E$. On suppose maintenant $u \neq 0$. Si $\tau_u(f) = 0 \implies f = 0$, alors $\forall t \geq -u, f(t+u) = 0$, donc $f = 0$. Donc τ_u est injectif.

Pour tout $f \in E$, $(\tau_u(f))(0) = 0 \neq 1$, donc la fonction constante 1 n'a pas d'antécédent par τ_u, qui n'est donc pas surjectif.

-quatrième question : théorème du rang encore.

Enfin pour la dernière question, marquée comme plus dure, je vous enverrai la correction par mail si vous me la demandez, et nous pourrons en parler ensemble.