Feuille de TD n° 1 : espaces vectoriels, dual, opérations élémentaires

---

Avoir à reconnaître une forme linéaire (ou plus généralement une fonction linéaire) est quelque chose de très fréquent, et doit être intuitif. Ca ne doit pas être plus dur que de reconnaitre un polynôme. En particulier, vous serez amenés plus tard à vous dire de vous-même "ceci est une application linéaire, je peux utiliser tout ce qu'on connait en algèbre linéaire". Et bien entendu, vous n'allez pas vérifier à toutes les lignes de calcul la définition de la linéarité. Il est donc nécessaire de développer des automatismes. Ce n'est pas nécessaire en soit *dans ce cours*, dans la mesure où vous vous doutez à l'avance que les applications sont linéaires. Dès le prochain semestre cependant, et dans quasiment tous les cours, vous en aurez vraiment besoin...

Dans le cas le plus simple, on reconnait une application linéaire parce qu'elle est de la forme $(x_1, \dots x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Mais avant cela, il faut déjà avoir identifié (1) une structure de K espace vectoriel sur l'espace de départ E. Pour cela, il faut précèdemment avoir identifié (0) un corps K. Ensuite, il faut avoir (2) une structure de K espace vectoriel sur l'espace d'arrivée F. A un moment, il faut évidemment vérifier (3) que l'application est bien définie : par exemple "$\phi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à f associe $f'(0)$" n'est pas bien définie, puisque certaine fonctions continues n'ont pas de dérivée en 0.

Pour identifer une FORME linéaire, c'est en fait un peu plus simple : il n'y a pas le choix pour K, qui doit nécessairement être égal à F. On vérifie donc (0) F est un corps, puis (1) E est un K espace vectoriel. Il n'y a rien à vérifier pour le point (2), car *un corps K est toujours un K espace vectoriel.*

En pratique, les corps que vous utiliserez en les nomant explicitement seront surtout $K = \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Plus exotiquement, vous risquez d'avoir à faire avec le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, les corps finis $\mathbb{F}_p$ pour p premier, les corps de fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$, $\mathbb{C}(X)$ ou $\mathbb{Q}(X)$. Le monoïde $\mathbb{N}$, l'anneau $\mathbb{Z}$ ou l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n, n \geq 2$ par exemple ne sont pas des corps : une application à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ne peut pas être une application linéaire, et une application à valeur dans $\mathbb{C}^2$ ne peut pas être une forme linéaire (mais peut être une application linéaire).

Identifier une structure de K-espace vectoriel sur X :

Il faut une loi $+_X$ de groupe commutatif sur X, plus une loi $\cdot : K \times X \to X$ qui doit vérifier, pour tout $\lambda, \mu \in K$ et tout $x, y \in X$:

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot x)) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (compatibilité entre la multiplication dans K et la multiplication scalaire)

2. $(\lambda \cdot (x +_X y) = \lambda \cdot x +_X \lambda \cdot y$ (compatibilité entre la multiplication dans K et l'addition scalaire)

3. $(\lambda +_K \mu) \cdot x)) = \lambda \cdot x +_X \mu \cdot x$ (compatibilité entre l'addition dans K et l'addition scalaire)

Identifier la linéarité :

Théorème 1. si $\phi : X \to K$ est une forme linéaire, et que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de X (qui est donc de dimension finie), alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tels que $\phi(\sum_k a_k e_k) = \sum_k \lambda_k a_k$. Les λ_k sont caractérisés par $\lambda_k = \phi(e_k)$. Réciproquement, pour $\phi : X \to K$, SI (1) K est corps (2) X est un K-espace vectoriel et (3) il existe des scalaires $\lambda_1, \cdot \lambda_n$ tels que $\phi(\sum_k a_k e_k) = \sum_k \lambda_k a_k$ ALORS ϕ est une forme linéaire. C'est le cas par exemple pour les questions $1, 2, 3, 5$.

A moins que la fonction soit particulièrement complexe, on doit savoir intuitivement s'il y a linéarité, rien qu'en regardant la fonction. Par exemple, si $\phi(0) \neq 0$, on sait immédiatement que la fonction n'est pas linéaire. Si la formule fait apparaître des produits entre plusieurs arguments de la fonction ($(x, y) \mapsto xy$, ou $(x, y) \mapsto x^2$ par exemple), on s'attend à ce que la fonction ne soit pas linéaire (mais ça n'est pas nécessairement le cas : la fonction $(x, y) \mapsto xy/y$, prolongé par x quand $y = 0$, est bien linéaire en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$...). La plupart des fonctions usuelles ($\exp, \log, x \to x^n$ pour $n \neq 1$, sin, tan ...) sont non linéaires, et quand on voit apparaitre une telle fonction dans l'expression de ϕ, on s'attend à ce que ϕ soit non linéaire (sauf si une telle fonction est appliquée à une constante, par exemple dans $(x, y) \mapsto \exp(4) \cdot x - \sin(\sqrt{(2)}\pi) \cdot y)$.). Au contraire, sommes, dérivées, intégrale, "évaluation en en point" (ex. le petit 9 dans l'exercice 1 de la feuille de TD), ou multiplication par une constante sont des applications linéaires -et leurs composées le sont également : *Si ϕ et ψ sont des applications linéaires, $\phi \circ \psi$ est linéaire.*