

Exercice 1 VRAI ou FAUX ? Les applications suivantes sont des formes linéaires sur un espace vectoriel :

1. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x - y$;
2. $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x$;
3. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$;
4. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2$;
5. $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -x$;
6. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
7. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Re}(z)$;
8. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$;
9. $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P(X) \mapsto P(3)$;
10. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f'(0)f(1)$;
11. $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$;
12. $\{\text{suites réelles convergentes}\} \rightarrow \mathbb{R}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

— RAPPELS DE COURS —

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif \mathbb{K} (on rappellera que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des corps commutatifs). Une application $u : E \rightarrow F$ est dite linéaire si pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) + \lambda u(\mathbf{y})$. On note que cela implique que $u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans son corps \mathbb{K} .

— SOLUTION —

1. est une forme linéaire sur le \mathbb{R} -ev \mathbb{R}^2 .
2. est une forme linéaire sur le \mathbb{Q} -ev \mathbb{Q} .
3. est une forme linéaire sur le \mathbb{R} -ev \mathbb{R} .
4. n'est pas une forme linéaire car l'image du vecteur nul par cette application n'est pas le vecteur nul.
5. n'est une forme linéaire, puisque \mathbb{Z} n'est pas un corps (mais seulement un anneau).
6. n'est pas linéaire. En effet, $(1 + 1)^2 = 4 \neq 1^2 + 1^2$.
7. est une forme linéaire sur le \mathbb{R} -ev \mathbb{C} . Cette application n'est autre que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in \mathbb{R}$.
8. n'est pas une forme linéaire sur le \mathbb{C} -ev \mathbb{C} , puisque si on note u l'application conjuguée, $u(i \cdot 1) = \overline{i \cdot 1} = -i \neq i = iu(1)$ et u n'est donc pas linéaire. Cette application serait bien linéaire sur le \mathbb{R} -ev \mathbb{C} , mais n'est alors pas une *forme* linéaire car $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{C} \neq \mathbb{R}$.
9. est une forme linéaire sur le \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}[X]$.
10. n'est pas linéaire. Contre-exemple avec les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$, et le scalaire $\lambda = 1$.
11. est une forme linéaire sur le \mathbb{R} -ev $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
12. est une forme linéaire sur le \mathbb{R} -ev des suites réelles convergentes.

Exercice 2

1. Écrire la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$u : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

2. Même question pour l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$v : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x + \sqrt{2}y + z \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - z \end{pmatrix}$$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , F un espace vectoriel de dimension finie p sur un même corps commutatif \mathbb{K} , et soit $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors :

- La connaissance de l'image de la base \mathcal{E} par u , notée $(u(\mathbf{e}_1), \dots, u(\mathbf{e}_n))$ est suffisante pour définir f .
En effet, si on considère un vecteur $\mathbf{x} \in E$ que l'on décompose sur la base \mathcal{E} : \mathbf{x} s'écrit de façon unique $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, on a

$$u(\mathbf{x}) = x_1u(\mathbf{e}_1) + \dots + x_nu(\mathbf{e}_n)$$

- Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p)$ une base de F . On note

$$u(\mathbf{e}_1) = a_{1,1}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{p,1}\mathbf{f}_p$$

$$\vdots$$

$$u(\mathbf{e}_n) = a_{1,n}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{p,n}\mathbf{f}_p$$

La matrice de u dans les bases \mathcal{E}, \mathcal{F} est définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Il est important de préciser les deux bases dans lesquelles on travaille.

- Soit \mathbf{x} un vecteur de E dont la décomposition dans la base \mathcal{E} est $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées matricielles. Alors les coordonnées du vecteur $u(\mathbf{x})$ dans la base \mathcal{F} est $Y = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u)X$.
- Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on définit l'application linéaire u canoniquement associée à M par $u : X \mapsto MX$. On note que la matrice de u dans les bases canoniques de \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^p est M .

— SOLUTION —

1. On note que $u(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $u(0, 1, 0, 0) = (2, 1, 0)$, $u(0, 0, 1, 0) = (3, 1, -1)$ et $u(0, 0, 0, 1) = (-1, 1, 3)$. Ainsi, la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. On note que $v(1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v(0, 1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $v(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La matrice de v dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Soit \mathbb{K} un corps. Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit sa trace $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ (somme des coefficients diagonaux).

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

— SOLUTION —

1. La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , et donc une forme linéaire sur le \mathbb{K} -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En effet, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Alors $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}$. Puis :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{k,i}A_{i,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{i,k}A_{k,i} = \text{Tr}(BA)$$

l'avant-dernière égalité étant obtenue par le changement d'indices muets $k \leftrightarrow i$.

Exercice 4 Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et Φ l'endomorphisme de E qui à tout $P \in E$ associe $P + P'$ (où P' est le polynôme dérivé de P). Montrer que Φ est surjectif.
(Indication : montrer d'abord que Φ est injectif.)

RAPPELS DE COURS

Soit E, F deux ensembles, et $u : E \rightarrow F$ une application

- u est injective si pour tous $x, x' \in E$ tels que $u(x) = u(x')$, on a $x = x'$.
- u est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.
- u est bijective si u est injective et surjective

Si E, F sont deux espaces vectoriels, et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire, on rappelle que u injective équivaut à dire que $\text{Ker } u = \{0\}$.
De même, u surjective équivaut à dire que $\text{Im } u = F$.
De plus, si E est de dimension finie, on dispose du théorème du rang, qui stipule que $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$.
Enfin, si E et F sont de même dimension finie, alors u injective équivaut à u surjective équivaut à u bijective.

SOLUTION

On vérifiera que Φ est bien une application linéaire. Déterminons son noyau :

$$P \in \text{Ker } \Phi \Leftrightarrow \Phi(P) = 0 \Leftrightarrow P + P' = 0$$

Méthode brutale. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1} X^k$, puis $P + P' = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + (k+1)a_{k+1}) X^k + a_n X^n$.

L'équation $P + P' = 0$ donne alors le système

$$\begin{cases} a_n & = 0 \\ a_{n-1} + na_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1 & = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $a_0 = \dots = a_n = 0$ par récurrence rapide, puis $P = 0$.
Méthode plus maligne. $P + P' = 0 \Leftrightarrow P = -P' \Rightarrow \deg(P) = \deg(P')$, ce qui n'est vrai que pour les polynômes P constants (cf. cours sur les polynômes). Alors $P' = 0$ et finalement $P = -0 = 0$.
Conclusion. Ainsi, $\text{Ker } \Phi = \{0\}$. Φ est par ailleurs un endomorphisme, le théorème du rang permet de conclure que Φ est surjectif (et même bijectif).

Exercice 5 Soit \mathcal{E} le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels et soit Δ l'endomorphisme de \mathcal{E} qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $\Delta(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$. Montrer que Δ est surjectif mais n'est pas injectif. En déduire que \mathcal{E} n'est pas de dimension finie.

SOLUTION

On vérifiera que Δ est bien une application linéaire. Pour montrer que Δ est surjective, on considère une suite réelle $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$, et on cherche une suite \mathbf{v} telle que $\Delta(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Il suffit de prendre $\mathbf{u} = (0, u_0, u_1, u_2, \dots)$. En revanche, Δ n'est pas injective. En effet, considérons la suite $\mathbf{u} = (1, 0, 0, \dots)$. Alors $\Delta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, donc le noyau de Δ n'est pas réduit au vecteur nul.
Supposons que \mathcal{E} soit de dimension finie. Comme Δ est surjective, on peut conclure que Δ est injective, ce qui est faux. L'hypothèse de départ est fautive, \mathcal{E} est donc de dimension infinie.

Exercice 6 Soit D (resp. L) l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme dérivé P' (resp. le polynôme XP).

1. Calculer l'image et le noyau de L , puis de D . Que constatez-vous ?
2. En utilisant 1., montrer que le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

SOLUTION

1. On vérifiera que D et L sont bien linéaires. Déterminons leur noyau et leur image.
Noyau de D . $P \in \text{Ker } D \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant, et donc $\text{Ker } D = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.
Image de D . $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists Q \in \mathbb{R}[X]$, tel que $P = Q' = D(Q)$ (cf. cours sur les polynômes), et ainsi $\mathbb{R}[X] \subset \text{Im } D$. L'inclusion inverse est évidente, et on a finalement $\text{Im } D = \mathbb{R}[X]$.
Noyau de L . $P \in \text{Ker } L \Leftrightarrow XP = 0 \Leftrightarrow P = 0$, et donc $\text{Ker } L = \{0\}$.
Image de L . Notons $X\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes sans terme constant. $P \in X\mathbb{R}[X] \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ \Leftrightarrow P \in \text{Im } L$, et donc $\text{Im } L = X\mathbb{R}[X]$.
Remarques. On a montré D et L sont des endomorphismes respectivement surjectif et injectif de $\mathbb{R}[X]$.

2. Supposons que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie. Étant donné que l'endomorphisme D est surjectif, on pourrait déduire que D serait aussi injective, ce qui est contradictoire avec $\text{Ker } D = \mathbb{R} \neq \{0\}$. L'hypothèse de départ est fautive, $\mathbb{R}[X]$ est donc de dimension infinie.

Comme dans l'exercice précédent, on a ici utilisé la contraposée de la proposition 0.3.3 du polycopié.

Exercice 7 Soient V un \mathbb{K} -espace vectoriel, E et F deux sous-espaces vectoriels, de dimension p et q respectivement. Soit $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ une base de $E \cap F$, on la complète en une base $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-r}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ de E et en une base $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q-r})$ de F .

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-r}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q-r})$ est libre.

Indication : Considérer une égalité $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{p-r} \mathbf{e}_{p-r} + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{v}_r + \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r} = \mathbf{0}$.

2. Montrer que $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.

RAPPELS DE COURS

Soient V un \mathbb{K} -espace vectoriel, E et F deux sous-espaces vectoriels.

- $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de V .
- $E \cup F$ n'est en général pas un sous-espace vectoriel de V . Par exemple, dans \mathbb{R}^2 muni de la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\text{Vect}(\mathbf{e}_1) \cup \text{Vect}(\mathbf{e}_2)$ n'est pas un sev de \mathbb{R}^2 .
- $E + F = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de V .

SOLUTION

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-r}, \mu_1, \dots, \mu_r, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-r}$ tels que

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{p-r} \mathbf{e}_{p-r} + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{v}_r + \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r} = \mathbf{0}$$

Cette égalité équivaut à

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{p-r} \mathbf{e}_{p-r} + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{v}_r = -\alpha_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r}$$

Or, $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{p-r} \mathbf{e}_{p-r} + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{v}_r$ est un vecteur de E , donc $-\alpha_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r}$ (qui est à l'origine un vecteur de F) est aussi un vecteur de E ; donc est un vecteur de $E \cap F$.

Ainsi, $-\alpha_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r}$ peut se décomposer sur la base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$. Il existe alors un unique uplet (ν_1, \dots, ν_r) tel que :

$$-\alpha_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r} = \nu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \nu_r \mathbf{v}_r$$

Puis,

$$\nu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \nu_r \mathbf{v}_r + \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{q-r} \mathbf{f}_{q-r} = \mathbf{0}$$

Comme $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q-r})$ est une base de F (donc une famille libre de F), on en déduit que

$$\nu_1 = \dots = \nu_r = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-r} = 0$$

Puis, on obtient l'égalité

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{p-r} \mathbf{e}_{p-r} + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Comme $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-r}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ est une base de E , on en déduit que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-r} = \mu_1 = \dots = \mu_r = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-r}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{q-r})$ est libre.

2. La famille \mathcal{B} est une base de $E + F$; il s'agit d'une famille libre de $E + F$ par 1., et d'une famille génératrice puisque tout vecteur $\mathbf{x} \in E + F$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, avec $\mathbf{y} \in E$ et $\mathbf{z} \in F$. On décompose \mathbf{y} sur la base \mathcal{E} et \mathbf{z} sur la base \mathcal{F} , et \mathbf{x} peut se décomposer sur la famille \mathcal{B} .

Ainsi, la dimension de $E + F$ est la taille de la base \mathcal{B} , soit $(p - r) + r + (q - r) = p + q - r = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$.

Opérations élémentaires sur les matrices, pivot de Gauss

RAPPELS DE COURS

On définit les matrices carrées suivantes, de taille $n \times n$.

- matrice de permutation : $P_{i,j} = I_n + (E_{i,j} + E_{j,i}) - (E_{i,i} + E_{j,j})$
- matrice de dilatation : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, $\lambda \neq 0$
- matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $P_{i,j}A$ équivaut à intervertir les lignes i et j de A .
- $D_i(\lambda)A$ équivaut à multiplier la ligne i de A par λ .
- $T_{i,j}(\lambda)A$ équivaut à multiplier la ligne i de A (noté L_i) par $L_i + \lambda L_j$.

On réalise les opérations sur les lignes lorsque l'on cherche à résoudre un système du type $AX = Y$; on multiplie alors à gauche cette équation par des matrices de permutation/dilatation/transvection.

De même, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

- $AP_{i,j}$ équivaut à intervertir les colonnes i et j de A .
- $AD_i(\lambda)$ équivaut à multiplier la colonne i de A par λ .
- $AT_{i,j}(\lambda)$ équivaut à multiplier la colonne i de A (noté C_i) par $C_i + \lambda C_j$.

Réaliser les opérations sur les colonnes permet d'avoir une compréhension plus "géométrique" de l'algèbre linéaire, puisqu'il s'agit de réaliser des combinaisons linéaires sur des vecteurs.

Attention 1 ! On ne réalise que les opérations dans un même sens : soit les colonnes, soit les lignes ; mais surtout pas les deux !

Attention 2 ! On ne réalise qu'une opération par colonne à chaque fois pour éviter les erreurs.

On peut programmer les opérations sur les colonnes sur Python.

```
import numpy as np

def augmented_matrix(M):
    p = M.shape[1]
    return np.concatenate((M, np.eye(p)), axis=0)

def transvection(M, i, j, lambda_): # C_i <- C_i + lambda C_j
    print "transvection: C_"+str(i)+" <- C_"+str(i)+" + (" +str(lambda_)+")C_"+str(j)
    N = M.copy()
    N[:, i-1] = N[:, i-1] + lambda_*N[:, j-1]
    return N

def dilatation(M, i, lambda_): # C_i <- lambda C_i
    print "dilatation: C_"+str(i)+" <- (" +str(lambda_)+")C_"+str(i)
    N = M.copy()
    if lambda_ != 0:
        N[:, i-1] = lambda_*N[:, i-1]
    return N

def permutation(M, i, j): # C_i <-> C_j
    print "permutation: C_"+str(i)+" <-> C_"+str(j)
    N = M.copy()
    N_i = N[:, i-1].copy()
    N[:, i-1] = N[:, j-1]
    N[:, j-1] = N_i
    return N
```

Exercice 8 On considère dans \mathbb{R}^5 le sous-espace L , resp. M , engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En faisant des opérations sur les colonnes de la ou les matrice(s) appropriée(s), donner des bases de L , M , $L + M$ et de $L \cap M$.

Soit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -ev. Cette famille est libre si et seulement si :

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} (*) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Pour prouver qu'une famille est libre, il suffit de résoudre l'équation (*) et de montrer qu'elle n'admet qu'une unique solution.

Cette famille est liée si au moins un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Ainsi, pour extraire une famille libre à partir d'une famille liée $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, il suffit de réaliser la procédure suivante : pour i allant de 1 à n , enlever la contribution des vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ dans le vecteur \mathbf{x}_i .

Cette procédure peut être formalisée à l'aide d'un algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice concaténée $A = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. On réalise des combinaisons linéaires sur la première colonne de A à partir des autres colonnes par la procédure du pivot de Gauss.

— SOLUTION —

1. Pour extraire une base de L , on forme la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2/4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Une base de L est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (ou encore $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$).

A partir des opérations précédentes, on note que :

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérification sur Python :

```
A = np.array([[1,1,1],[-1,3,1],[1,1,1],[-1,3,1],[1,1,2]])
A = transvection(A, 2, 1, -1)
A = transvection(A, 3, 1, -1)
A = dilatation(A, 2, 1/4.)
A = transvection(A, 3, 2, -2)
```

SOLUTION

2. Pour extraire une base de M , on forme la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow -C_2/5 \\ C_3 \leftarrow -C_3}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une base de M est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, ou encore $(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6)$.

Vérification sur Python :

```
A = np.array([[3,1,1],[1,2,2],[3,1,0],[1,2,2],[3,1,0]])
A = permutation(A, 1, 2)
A = transvection(A, 2, 1, -3)
A = transvection(A, 3, 1, -1)
A = dilatation(A, 2, -1/5.)
A = dilatation(A, 3, -1)
```

SOLUTION

3. Pour extraire une base de $L + M$, on forme la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une base de $L + M$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Vérification sur Python :

```
A = np.array([[1,0,0,1,0,0], [-1,1,0,2,1,0], [1,0,0,1,0,1], [-1,1,0,2,1,0], [1,0,1,1,0,1]])
A = transvection(A, 4, 1, -1)
```

$A = \text{transvection}(A, 5, 2, -1)$
 $A = \text{transvection}(A, 4, 2, -3)$
 $A = \text{permutation}(A, 3, 6)$
 $A = \text{permutation}(A, 4, 6)$

SOLUTION

4. Par l'exercice 7, on peut facilement en déduire la dimension de $L \cap M$:

$$\dim(L \cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L + M) = 3 + 3 - 4 = 2$$

On note que $C_4 = C_1 + 3C_2$ et que $C_5 = C_2$ dans la matrice du milieu. Les vecteurs C_1, C_2, C_3 sont dans L , tandis que C_4, C_5, C_6 sont dans M .

Ainsi, ces deux vecteurs $(1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 0, 1, 0)$ sont des éléments de L et M . Par ailleurs, ils sont linéairement indépendants, ils forment une base de $L \cap M$.

Une base de $L \cap M$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & \frac{8}{3} & 5 & \frac{22}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$.

- En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer $\text{rang}(A)$ et des bases de $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$.
- Donner une base de F° où F° est le sous-espace du dual de \mathbb{R}^5 engendré par les formes linéaires $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 3x_1 + 2x_2 + \frac{8}{3}x_3 + 5x_4 + \frac{22}{3}x_5$.

SOLUTION

1. L'application linéaire canoniquement associée à A est $X \in \mathbb{R}^5 \mapsto AX \in \mathbb{R}^4$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice augmentée $\begin{pmatrix} A \\ I_5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ I_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & \frac{8}{3} & 5 & \frac{22}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 5C_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & -7 \\ 3 & -4 & -\frac{19}{3} & -7 & -\frac{23}{3} \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2/3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -4 & -7 \\ 3 & -\frac{4}{3} & -\frac{19}{3} & -7 & -\frac{23}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -3 & -4 & -5 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 5C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 6C_2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SOLUTION

$$\begin{array}{l}
 C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2 \\
 C_4 \leftarrow C_4 - 5C_2 \\
 C_5 \leftarrow C_5 - 6C_2
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{pmatrix}
 \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\
 3 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\
 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3/3}
 \begin{pmatrix}
 \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & \boxed{1} & 1 & -1 \\
 3 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\
 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -2 \\
 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\
 C_5 \leftarrow C_5 + C_3
 \end{array}
 \rightarrow
 \left(\frac{AP}{P} \right) =
 \begin{pmatrix}
 \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
 3 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{10}{9} \\
 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{22}{9} \\
 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

Une base de l'image est $((1, 0, 2, 3), (0, 1, -1, -\frac{4}{3}), (0, 0, 1, -\frac{1}{3}))$; on en déduit que le rang de A est 3.

Le noyau de A est $P\mathbf{e}_4, P\mathbf{e}_5$, où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$ est la base canonique de \mathbb{R}^5 , soit $((-\frac{5}{9}, -\frac{11}{9}, -\frac{1}{3}, 1, 0), (-\frac{10}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{1}{3}, 0, 1))$.

La disposition $\left(\frac{A}{I_5}\right)$ n'est due au hasard; la matrice de bas correspond aux vecteurs de l'espace de départ, alors que la matrice de haut correspond à leur image par A . I_5 représente la base canonique de \mathbb{R}^5 . Comme A peut être vue comme une application linéaire, toute combinaison linéaire réalisée sur les vecteurs de l'espace d'arrivée peuvent être réalisées sur les vecteurs de l'espace de départ.

Dans cette démarche, on peut faire le lien avec le théorème du rang, pourquoi? La matrice de bas représente les vecteurs de l'espace de départ \mathbb{R}^5 , tandis que ceux du haut représente leur image par A (ce sont des vecteurs de \mathbb{R}^4). En réalisant des opérations élémentaires, on exhibe une base du noyau de A et d'un supplémentaire du noyau S dans \mathbb{R}^5 : $\mathbb{R}^5 = S \oplus \text{Ker } A$. Alors l'image de S par A est donnée par le procédé réalisé ci-dessus, tandis que l'image du noyau de A par A est nul. On retrouve bien le théorème du rang!

Vérification sur Python :

```

M = np.matrix([[1,2,3,4,5],[0,3,4,5,6],[2,1,5,4,3],[3,2,8/3.,5,22/3.]])
M_aug = augmented_matrix(M)

M_aug = transvection(M_aug, 2, 1, -2)
M_aug = transvection(M_aug, 3, 1, -3)
M_aug = transvection(M_aug, 4, 1, -4)
M_aug = transvection(M_aug, 5, 1, -5)

M_aug = dilatation(M_aug, 2, 1/3.)

M_aug = transvection(M_aug, 3, 2, -4)
M_aug = transvection(M_aug, 4, 2, -5)
M_aug = transvection(M_aug, 5, 2, -6)

M_aug = dilatation(M_aug, 3, 1/3.)

M_aug = transvection(M_aug, 4, 3, -1)
M_aug = transvection(M_aug, 5, 3, 1)

```

SOLUTION

2. On peut écrire ici $F = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_4) A^t(\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_5^*) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$ et $F^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \forall \phi \in F, \phi(\mathbf{x}) = 0\}$. Montrons par double inclusion que $F^\circ = \text{Ker } A$.

(i) Soit $\mathbf{x} \in \text{Ker } A$. Soit $\phi \in F$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\phi = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) A^t(\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_5^*)$, et donc $\phi(\mathbf{x}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) A^t(x_1, \dots, x_5) = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) A\mathbf{x} = 0$ puisque $\mathbf{x} \in \text{Ker } A$. Ainsi $\mathbf{x} \in F^\circ$ et finalement $\text{Ker } A \subset F^\circ$.

(ii) Soit $\mathbf{x} \in F^\circ$. Alors $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_4) A\mathbf{x} = 0$ et dans le cas particulier $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 1$, on obtient $A\mathbf{x} = 0$ soit $\mathbf{x} \in \text{Ker } A$, d'où finalement $F^\circ \subset \text{Ker } A$.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

1. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer $\text{rang}(A)$ et des bases de $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$.
2. Deviner la question suivante et la résoudre

SOLUTION

1. On forme la matrice augmentée $\left(\frac{A}{I_5}\right)$ et on applique l'algorithme du pivot de Gauss sur celle-ci.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 5C_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUTION

$$\begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow -C_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une base de l'image de A est $((1, 1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1, 0))$; le rang de A est de 3.
 Une base du noyau de A est $((-1, 0, -1, 1, 0), (-2, 0, -1, 0, 1))$.

Vérification sur Python :

```
M = np.matrix([[1,1,2,3,4],[1,2,3,4,5],[2,3,3,5,7],[1,0,-1,0,1],[1,0,1,2,3]])
M_aug = augmented_matrix(M)
```

$M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 2, 1, -1)$
 $M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 3, 1, -2)$
 $M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 4, 1, -3)$
 $M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 5, 1, -4)$

$M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 3, 2, -1)$
 $M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 4, 2, -1)$
 $M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 5, 2, -1)$

$M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 4, 3, -1)$
 $M_{\text{aug}} = \text{transvection}(M_{\text{aug}}, 5, 3, -1)$

$M_{\text{aug}} = \text{dilatation}(M_{\text{aug}}, 3, -1/2.)$

SOLUTION

2. On peut appliquer le même raisonnement qu'à l'exercice précédent pour montrer que $F^{\circ} = \text{Ker } A$.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer A^{-1} .

2. Justifier que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^4 et trouver sa base duale.

SOLUTION

1. On réalise les opérations du pivot de Gauss sur la matrice augmentée $\left(\frac{A}{I_4} \right)$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{A}{I_4} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - C_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_4}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 9 & -1 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 9 & -6 & 5 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

SOLUTION

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 15 & -6 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

RAPPELS DE COURS

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E .

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit la forme linéaire \mathbf{e}_i^* par :

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_i) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = 0 \quad \text{pour } j \neq i$$

Alors la famille $(\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ est une base de E^* , dite base duale de $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

SOLUTION

2. La famille donnée est clairement libre : en effet, considérons la relation de liaison

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système admet une unique solution, puisque A est inversible ; cette solution étant le vecteur nul. Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Cette famille est bien libre. Comme elle est de plus de taille 4, elle est une base de \mathbb{R}^4 .

Posons $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Déterminons la forme linéaire u_1 telle que $u_1(\mathbf{b}_1) = 1, u_1(\mathbf{b}_2) = 0, u_1(\mathbf{b}_3) = 0, u_1(\mathbf{b}_4) = 0$. Posons $u_1((x_1, x_2, x_3, x_4)) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$. Des équations précédentes, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b + 2d = 1 \\ a + 2b + c + 2d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \\ 3a + 3b + c + 8d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow {}^t A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc $u_1((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 15x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4$.

De même, la forme linéaire u_2 est telle que $u_2(\mathbf{b}_1) = 0, u_2(\mathbf{b}_2) = 1, u_2(\mathbf{b}_3) = 0, u_2(\mathbf{b}_4) = 0$. Des calculs similaires donnent $u_2((x_1, x_2, x_3, x_4)) = -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4$.

Similairement, on trouve $u_3((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4$ et $u_4((x_1, x_2, x_3, x_4)) = -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4$.

La base duale de $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ est donnée par les formes linéaires :

$$u_1((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 15x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4$$

$$u_2((x_1, x_2, x_3, x_4)) = -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4$$

$$u_3((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$u_4((x_1, x_2, x_3, x_4)) = -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

RAPPELS DE COURS

Remarque : On aurait pu aller plus vite en utilisant le cours (proposition 1.1.4).

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{E} une base de E , et \mathcal{E}^* la base duale de E^* .

Soient \mathcal{B} une seconde base de E , \mathcal{B}^* la base duale, et $P = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$. Alors la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{E}^*}(\mathcal{B}^*)$ est égale ${}^tP^{-1}$.

Dans cet exercice, A n'est autre que la matrice de passage entre la base canonique de \mathbb{R}^4 et la famille de vecteurs données dans l'énoncé.

Exercice 12 En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

SOLUTION

On forme la matrice augmentée $\left(\begin{smallmatrix} A_t \\ I_4 \end{smallmatrix}\right)$ et on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & -8 \\ 2-t & 6-3t & 4t-7 & 4t-8 \\ \hline 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -6 & -8 \\ 2-t & 2-t & 4t-7 & 4t-8 \\ \hline 1 & \frac{2}{3} & -3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 4C_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2-t & 2-t & t-1 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $t \neq 1$, alors le rang de A_t est 3; une base de son image est $((1, 2, 2, 2-t), (0, 1, 2, 2-t), (0, 0, 0, t-1))$ et une base de son noyau est $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 1)$.
- Si $t = 1$, alors le rang de A_1 est 2; une base de son image est $((1, 2, 2, 1), (0, 1, 2, 1))$ et une base de son noyau est $((-1, 1, 1, 0), (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 1))$.

Exercice 13 Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (\mathbf{e}_1^*; \mathbf{e}_2^*; \mathbf{e}_3^*; \mathbf{e}_4^*)$ la base duale de \mathcal{B} .

1. Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = \lambda_1\mathbf{e}_1^* + \lambda_2\mathbf{e}_2^* + \lambda_3\mathbf{e}_3^* + \lambda_4\mathbf{e}_4^*$ s'annule-t-elle sur P ?
2. Déterminer une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P .
3. Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* - \mathbf{e}_3^*$ et $\psi = \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace $E = \{\mathbf{v} \in V \mid \phi(\mathbf{v}) = 0 = \psi(\mathbf{v})\}$ de V .

1. On cherche f tel que $f(\mathbf{v}_1) = 0$ et $f(\mathbf{v}_2) = 0$. Or, $f(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ et $f(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$.
On obtient alors le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}$$

Les formes linéaires de la forme $f = (\lambda_3 + \lambda_4)\mathbf{e}_1^* - (\lambda_3 + \lambda_4)\mathbf{e}_2^* + \lambda_3\mathbf{e}_3^* + \lambda_4\mathbf{e}_4^*$, avec $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ s'annulent sur P .

2. Toute forme linéaire f s'annulant sur P peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f &= (\lambda_3 + \lambda_4)\mathbf{e}_1^* - (\lambda_3 + \lambda_4)\mathbf{e}_2^* + \lambda_3\mathbf{e}_3^* + \lambda_4\mathbf{e}_4^* \\ &= \lambda_3(\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*) + \lambda_4(\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_4^*) \end{aligned}$$

avec $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. La famille $(\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_4^*)$ est génératrice ; elle est aussi libre et représente donc une base de P^\perp .

On note que $\mathbf{x} \in P$ si et seulement si pour toute forme linéaire f de P^\perp , $f(\mathbf{x}) = 0$. En particulier, ceci est équivalent à $\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_2^*(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_3^*(\mathbf{x}) = 0$ et $\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_2^*(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_4^*(\mathbf{x}) = 0$.

Si on pose $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a

$$\mathbf{x} \in P \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Soit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ tel que $\phi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}) = 0$. Alors les coordonnées \mathbf{v} vérifient le système :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} v_1 = -v_4 \\ v_2 = v_3 + v_4 \end{cases}$$

On en déduit que \mathbf{v} est de la forme $\mathbf{v} = (-v_4, v_3 + v_4, v_3, v_4) = (0, 1, 1, 0)v_3 + (-1, 1, 0, 1)v_4$, avec $v_3, v_4 \in \mathbb{R}$. La famille $((0, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))$ génère le sous-espace E , et est une famille libre ; elle est donc une base de E . On peut en déduire que E est de dimension 2.

Les formes linéaires sont particulièrement utiles pour caractériser les sous-espaces vectoriels d'un ev de dimension finie. Par exemple, soit $\mathbf{v} = (3, -4, -1, -3)$ et $E = \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))$ un sous-espace de \mathbb{R}^4 . On se demande si \mathbf{v} est un élément de P . Pour cela, on peut chercher deux scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$$

ce qui exige la résolution d'un système à 4 équations et 2 inconnues, ou bien on peut vérifier si les coordonnées de \mathbf{v} vérifient le système

$$\begin{cases} v_1 = -v_4 \\ v_2 = v_3 + v_4 \end{cases}$$

ce qui est beaucoup plus simple !

Exercice 14 Soit $V = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et soit \mathcal{B} la base $(1, X, \dots, X^n)$ de V . Soit ∂ l'endomorphisme de V qui à tout $P \in V$ associe son polynôme dérivé P' . On pose $\partial^i = \partial \circ \dots \circ \partial$ (i facteurs) pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\partial^0 = \text{Id}_V$. On fixe $n = 4$ (mais on peut faire l'exercice pour n arbitraire).

- Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on considère la forme linéaire $\phi_i : P \in V \mapsto \frac{(\partial^i P)(0)}{i!} \in \mathbb{R}$; montrer que (ϕ_0, \dots, ϕ_n) est la base duale \mathcal{B}^* de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de V .
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Ecrire la matrice A_λ exprimant la famille des vecteurs $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ dans la base \mathcal{B} et montrer que \mathcal{C}_λ est une base de V .
- Soit u_λ l'endomorphisme de V tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_\lambda) = A_\lambda$. Si $\mu \in \mathbb{R}$, pouvez-vous déterminer sans calcul la matrice de $u_\mu \circ u_\lambda$ puis celle de u_λ^{-1} ? Sinon calculez A_λ^{-1} .
- Soit \mathcal{C}_λ^* la base duale de \mathcal{C}_λ . Écrire la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*)$.

1. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On note que $\phi_0(P) = P(0) = a_0$, $\phi_1(P) = P'(0) = a_1$, et plus généralement,
- $$\phi_k(P) = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

Pour montrer que (ϕ_0, \dots, ϕ_n) est la base duale \mathcal{B}^* de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de V , il faut montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\phi_k(X^i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Alors $\phi_k(X^k) = \frac{k!}{k!} = 1$ et pour $i \neq k$, $\phi_k(X^i) = 0$.

2. On note que pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $(X - \lambda)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\lambda)^{k-i} X^i$. Ainsi, la matrice des vecteurs \mathcal{C}_λ dans la base \mathcal{B} est

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & -\lambda^3 & \lambda^4 & \dots & (-\lambda)^n \\ 0 & 1 & -2\lambda & 3\lambda^2 & -4\lambda^3 & \dots & n(-\lambda)^{n-1} \\ \vdots & 0 & 1 & -3\lambda & 6\lambda^2 & \dots & \binom{n}{2}(-\lambda)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & -4\lambda & \dots & \binom{n}{3}(-\lambda)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{4}(-\lambda)^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_λ est inversible (elle est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, son déterminant vaut donc 1), par conséquent \mathcal{C}_λ est une base de V .

3. L'endomorphisme u_λ permet de passer de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ à la base $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$. Ainsi, la composée $u_\mu \circ u_\lambda$ permet de passer de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ à la base $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ puis à la base $\mathcal{C}_{\lambda+\mu} = (1, X - \lambda - \mu, (X - \lambda - \mu)^2, \dots, (X - \lambda - \mu)^n)$. Ainsi, l'inverse de u_λ^{-1} est $u_{-\lambda}$.
4. A_λ est la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à la nouvelle base \mathcal{C} , donc la matrice de passage de la base duale canonique au dual de la nouvelle base est l'inverse de la transposée de A_λ .

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*) = {}^t A_\lambda^{-1}$.

Remarque : On peut lire les coordonnées des éléments de la nouvelle base duale directement dans les colonnes de la transposée de l'inverse de A_λ .

Exercice 15 Trouver toutes les formes linéaires Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont multiplicatives, c'est-à-dire telles que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$.

- On note que $\Phi(I_n) = \Phi(I_n^2) = \Phi(I_n)\Phi(I_n) = \Phi(I_n)^2$, ce qui donne $\Phi(I_n) \in \{0, 1\}$.
- Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Évaluons Φ sur cette base.
On rappelle que pour $i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
Alors, pour $i \neq j$, $\Phi(E_{i,j}) = \Phi(E_{i,i}E_{i,j}) = \Phi(E_{i,i})\Phi(E_{i,j}) = \Phi(E_{i,j})\Phi(E_{i,i}) = \Phi(E_{i,j}E_{i,i}) = \Phi(0) = 0$.
De plus, $\Phi(E_{i,i}) = \Phi(E_{i,j}E_{j,i}) = \Phi(E_{i,j})\Phi(E_{j,i}) = \Phi(E_{j,i})\Phi(E_{i,j}) = \Phi(E_{j,i}E_{i,j}) = \Phi(E_{j,j})$.
Ainsi, les $\Phi(E_{i,i})$ ont la même valeur, notons là λ . Dans ce cas, Φ n'est autre que l'application linéaire λTr (ces deux applications coïncident sur la même base).
On a deux possibilités :
 1. soit $\Phi(I_n) = 0$, on en déduit que $\lambda = 0$.
 2. soit $\Phi(I_n) = 1$, on en déduit que $\lambda = \frac{1}{\text{Tr}(I_n)} = \frac{1}{n}$.
- Vérifions si ces deux applications vérifient les conditions imposées par l'énoncé. Elles sont clairement des formes linéaires, il reste à vérifier si elles sont multiplicatives. La forme linéaire nulle est trivialement multiplicative. En revanche, la forme linéaire $A \mapsto \frac{1}{n}\text{Tr}(A)$ n'est pas multiplicative.
On peut considérer comme exemple la matrice $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice qui ne contient que des 1. Comme $J_n^2 = nJ_n$, on a $A^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n$. Puis $\text{Tr}(A^2) = n(n-1)$, tandis que $\text{Tr}(A) = 0$. On a donc $\Phi(A^2) = n-1$, tandis que $\Phi(A)^2 = 0$.
- Conclusion : seule la forme linéaire nulle est multiplicative.

Exercice 16 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , u et v deux formes linéaires sur E telles que $\text{Ker } u = \text{Ker } v$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha v$.

Si u est la forme linéaire nulle, ok.

Sinon, on choisit un vecteur non nul \mathbf{x} dans un supplémentaire du noyau de u (on rappelle que le noyau de u est de dimension $n-1$, et qu'il existe un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E de dimension 1). Autrement dit :

$$E = \text{Ker } u \oplus \mathbb{R}\mathbf{x} = \text{Ker } v \oplus \mathbb{R}\mathbf{x}$$

Puis, on a $u(\mathbf{x}) \neq 0$, $v(\mathbf{x}) \neq 0$, et on choisit α tel que $u(\mathbf{x}) = \alpha v(\mathbf{x})$, soit $\alpha = \frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}$.

Il reste à montrer que la forme linéaire $u - \alpha v$ est nulle.

- Sur $\text{Ker } u$, il est clair que cette forme linéaire est nulle.
- Sur $\mathbb{R}\mathbf{x}$, cette forme linéaire est clairement nulle, puisque pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda\mathbf{x}) - \alpha v(\lambda\mathbf{x}) = 0$$