Contrôle continu 1 :
Dualité, géométrie affine

Exercice 1. a) On commence par remplacer L_1 par L_1+L_2, ce qui ne change pas le determinant. On développe ensuite selon la première ligne.

$$\begin{aligned}\det(A(\lambda)) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda(\lambda-2)-3)\end{aligned}$$

b) La matrice $A(\lambda)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul , c'est à dire si $-\lambda(\lambda^2-2\lambda-3)\neq 0$, c'est à dire si $\lambda \notin \{-1;0;3\}$.

c) On applique l'algorithme usuel :

$$\left(\frac{A(-1)}{I_3}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2'=L_2-L_1/2]{L_3'=L_3-3L_2} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a ainsi une base du noyau et une base de l'image, données respectivement par $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ (le dernier vecteur a été multiplié par -2 par rapport à la forme précédente).

d) Il faut $\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker A(-1)) = 3-1 = 2$ équations linéairement indépendantes pour décrire le noyau, et $\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Im} A(-1)) = 3-2 = 1$ équation pour décrire l'image.

Pour le noyau : on remarque qu'un élément du noyau vérifie nécessairement $x = 0$ et $y = -3z$, qui sont bien des équations linéairement indépendantes.

Pour l'image : on remarque déjà que v_1 vérifie $x + 2y = 0$. En fait, puisque sa troisième composante est nulle, il vérifie plus généralement $x + 2y + az = 0$ pour tout réel a. On cherche une équation de cette forme qui soit également satisfaite par le vecteur v_2. Pour ce vecteur, l'équation devient $0 * x + 2 * 1 + a * 2 = 0$, ce qui est vérifié si et seulement si $a = -1$. Ainsi on obtient l'équation $x + 2y - z = 0$, qui est bien satisfaite par v_1 et v_2, donc par l'espace vectoriel qu'ils engendrent (c'est à dire par $\operatorname{Im}(A(-1))$).

e) Les opérations de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sont données par $M + \lambda N = (m_{ij} + \lambda n_{ij})_{\substack{i\in\{1,2,3\} \\ j\in\{1,2,3\}}}$. Cet espace est engendré par les matrices élémentaires $(E_{ij})_{\substack{i\in\{1,2,3\} \\ j\in\{1,2,3\}}}$, qui en forment une base. Il est donc de dimension $3 * 3 = 9$.

f) On remarque que

$$A(\lambda) = A(0) + \lambda \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$D := \{A(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = A(0) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci est bien une droite affine, dont $A(0)$ est un point et $\mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la direction.

g) Il faut au minimum $\dim(\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})) - \dim(D) = 9 - 1 = 8$ équations affines pour décrire la droite précédente.

Exercice 2. a) La base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$. C'est donc un espace de dimension 4.

b) Soient $P = \sum_{k=0}^3 p_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^3 q_k X^k$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note jusqu'à la fin de l'exercice $f_k : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ l'application qui à P associe $P^{(k)}(0)$.

Ainsi $f_0(\lambda P + Q) = f_0\left(\sum_{k=0}^3 (\lambda p_k + q_k) X^k\right) = \lambda p_0 + q_0 = \lambda f_0(P) + f_0(Q)$.

De même $f_1(\lambda P + Q) = f_1\left(\sum_{k=0}^3 (\lambda p_k + q_k) X^k\right) = \lambda p_1 + q_1 = \lambda f_1(P) + f_1(Q)$.

De même $f_2(\lambda P + Q) = f_2\left(\sum_{k=0}^3 (\lambda p_k + q_k) X^k\right) = 2(\lambda p_0 + q_0) = \lambda(2p_0) + 2q_0 = \lambda f_2(P) + f_2(Q)$ (le facteur 2 provient de $f_2(X^2) = 2$).

c) On remarque que (f_0, f_1, f_2, f_3) est quasiment la base cherchée : en effet on a bien $f_j(X^k) = 0$ lorsque $j \neq k$, mais pas $f_j(X^j) = 1$ (en effet, $f_2(X^2) = 2$ et $f_3(X^3) = 6$). On pose donc $\tilde{f_2} = \frac{1}{2} f_2$ et $\tilde{f_3} = \frac{1}{6} f_3$. Ainsi $(f_0, f_1, \tilde{f_2}, \tilde{f_3})$ est bien la base duale de la base canonique.

d) On a $\epsilon_k(\lambda P + Q) = \epsilon_k\left(\sum_{j=0}^3 (\lambda p_j + q_j) X^j\right) = \sum_{j=0}^3 (\lambda p_j + q_j) k^j = \lambda \sum_{j=0}^3 p_j k^j + \sum_{j=0}^3 q_j k^j = \lambda \epsilon_k(P) + \epsilon_k(Q)$.

e) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Supposons que $P \in \mathrm{vect}((\epsilon_k)_{k\in\{0,1,2,3\}})^\perp$, c'est à dire que $\epsilon_k(P) = 0$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned} \epsilon_k(P) = 0 &\iff k \text{ est racine de } P \\ &\iff X - k \text{ divise } P \end{aligned}$$

Ainsi $X, X-1, X-2$ et $X-3$ divisent P. Ce sont des polynômes irréductibles, donc leur produit divise également P. On peut donc écrire $P = X(X-1)(X-2)(X-3)Q$, où Q est un polynôme. Supposons $Q \neq 0$: alors le degré de P est au moins celui de $X(X-1)(X-2)(X-3)$, qui est égal à 4. C'est absurde puisque $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Donc $Q = 0$, et $P = 0$.

Ainsi $\mathrm{vect}((\epsilon_k)_{k\in\{0,1,2,3\}})^\perp = \{0\}$. En dimension finie, cela revient à dire que $\mathrm{vect}((\epsilon_k)_{k\in\{0,1,2,3\}}) = \mathbb{R}_3[X]^*$. La famille est donc génératrice. Comme son cardinal est la dimension de l'espace, c'est une base.

f) Notons $(\epsilon_{0*}, \epsilon_{1*}, \epsilon_{2*}, \epsilon_{3*})$ la base préduale cherchée.

Le polynôme ϵ_{0*} vérifie $\epsilon_1(\epsilon_{0*}) = \epsilon_2(\epsilon_{0*}) = \epsilon_3(\epsilon_{0*}) = 0$:
autrement dit, les polynômes $X-1$, $X-2$ et $X-3$ divisent ϵ_{0*}.

On peut donc écrire $\epsilon_{0*} = (X-1)(X-2)(X-3)Q$ pour un polynôme Q. Comme ϵ_{0*} est de degré au plus 3, Q est de degré au plus 0 : c'est donc un polynôme constant. Comme de plus on a $\epsilon_0(\epsilon_{0*}) = 1$, on voit que nécessairement $Q = -1/6$, donc $\epsilon_{0*} = -(X-1)(X-2)(X-3)/6$.

On procède de même pour les autres polynômes : on obtient ainsi $\epsilon_{1*} = X(X-2)(X-3)/2$, $\epsilon_{2*} = -X(X-1)(X-3)/2$, $\epsilon_{3*} = X(X-1)(X-2)/6$

Exercice 3. a) L'ensemble des barycentres d'une famille de points $(A_1, \dots A_k)$ est le plus petit espace affine qui contient $\{A_1, \dots A_k\}$. Ici, puisque (A, B, C) sont non alignés, cet espace ne peut être une droite et est donc de dimension au moins 2 : c'est donc tout le plan. Tous les points du plan (et donc en particulier S, T et U) s'expriment donc comme barycentres de (A, B, C).

b) Si deux au moins des points S, T, U sont égaux, alors ils sont tous alignés d'une part, et d'autre part le determinant considéré est clairement nul. L'équivalence tient donc dans ce cas. On suppose désormais ces points deux à deux distincts.

Dans ce cas :

$$S, T, U \text{ alignés} \iff \exists \lambda : T = Bar((S, \lambda); (U, 1-\lambda))$$

Or par additivité des barycentres,

$$Bar((S, \lambda); (U, 1-\lambda)) = Bar((A, s_1\lambda + u_1(1-\lambda)); (B; s_2\lambda + u_2(1-\lambda)); (C, s_3\lambda + u_3(1-\lambda)))$$

D'autre part, $T = Bar((A, t_1); (B, t_2); (C, t_3))$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} S, T, U \text{ alignés} \iff \exists \lambda : Bar((A, t_1); (B, t_2); (C, t_3)) = \\ Bar((A, s_1\lambda + u_1(1-\lambda)); (B; s_2\lambda + u_2(1-\lambda)); (C, s_3\lambda + u_3(1-\lambda))) \quad (1) \end{aligned}$$

Comme le système AB, AC est libre, l'écriture sous forme barycentrique est unique (si on impose que la somme des coefficients est égale à 1). On peut donc identifier les coefficients :

$$\begin{aligned} Bar((A, t_1); (B, t_2); (C, t_3)) &= Bar((A, s_1\lambda + u_1(1-\lambda)); (B; s_2\lambda + u_2(1-\lambda)); (C, s_3\lambda + u_3(1-\lambda))) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} t_1 = s_1\lambda + u_1(1-\lambda) \\ t_2 = s_2\lambda + u_2(1-\lambda) \\ t_3 = s_3\lambda + u_3(1-\lambda) \end{array} \right. \quad (2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S, T, U \text{ alignés} &\iff \exists \lambda : \left\{ \begin{array}{l} t_1 = s_1\lambda + u_1(1-\lambda) \\ t_2 = s_2\lambda + u_2(1-\lambda) \\ t_3 = s_3\lambda + u_3(1-\lambda) \end{array} \right. \\ &\iff \begin{vmatrix} s_1 & t_1 & u_1 \\ s_2 & t_2 & u_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(la dernière équivalence n'est vraie que parce que les deux premières colonnes forment un système libre)

c)ii) $O \in (AA') \iff \exists a : 0 = Bar((A, a), (A', 1-a))$.

En effet

$$\begin{aligned} O \in (AA') &\iff \exists \lambda : \vec{OA} = \lambda \vec{AA'} \\ &\iff \exists \lambda : \vec{OA} = \lambda(\vec{A0} + \vec{0A'}) \\ &\iff \exists \lambda : (1+\lambda)\vec{OA} - \lambda \vec{0A'} = 0 \\ &\iff \exists a : a\vec{OA} + (1-a)\vec{0A'} = 0 \\ &\iff \exists a : 0 = Bar((A, a), (A', 1-a)) \end{aligned}$$

(idem pour b et c) iii) On raisonne par l'absurde. Supposons $a = b$.

On a alors $\vec{A'B'} = \vec{A'O} + \vec{OB'} = \frac{-a}{1-a}\vec{AO} - \frac{-b}{1-b}\vec{OB} = \frac{-a}{1-a}\vec{AB}$.

Les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles ou confondues, mais en aucun cas ne se coupent en un unique point, ce qui était supposé par l'énoncé. On a donc une contradiction. Donc $a \neq b$.

On prouve $b \neq c$ et $b \neq c$ de la même manière.

iv)Pour P : puisque $P \in (AB)$, on sait déjà qu'il existe un λ tel que $P = Bar((A, \lambda); (B, 1 + \lambda))$. Il donc seulement montrer que $\lambda = \frac{a}{a-b}$.

On rappelle

$$O = Bar((A, a); (A', 1 - a)) \iff A = Bar((O, \frac{1}{a}); (A', \frac{a-1}{a})) \tag{3}$$

Par associativité des barycentres,

$$\begin{aligned} P &= Bar((A, \lambda); (B, 1 + \lambda)) \\ &= Bar((0, \frac{\lambda}{a}); (A', \frac{(a-1)\lambda}{a}); (0, \frac{1-\lambda}{b}); (B', \frac{(b-1)(1-\lambda)}{b})) \\ &= Bar((0, \frac{\lambda}{a} + \frac{1-\lambda}{b}); (A', \frac{(a-1)\lambda}{a}); (B', \frac{(b-1)(1-\lambda)}{b})) \end{aligned}$$

Or $O \notin (A'B')$ et $P \in (A'B')$: par unicité de l'écriture barycentrique,

$$\frac{\lambda}{a} + \frac{1-\lambda}{b} = 0$$

Ceci revient à dire que $\lambda = \frac{a}{a-b}$.

(idem pour Q et R)

v) En utilisant 3 sur les points A, C, R, on voit que $C = Bar((R, \frac{c-a}{c}); (A, \frac{a}{c}))$

Il vient alors

$$\begin{aligned} Q &= Bar((B, \frac{b}{b-c}); (C, \frac{-c}{b-c})) \\ &= Bar((B, \frac{b}{b-c}); (R, \frac{c-a}{c-b}); (A, \frac{a}{c-b})) \\ &= Bar((R, \frac{c-a}{c-b}); (P; \frac{a-b}{b-c})) \end{aligned}$$

Ainsi $Q \in (RP)$, et les trois points sont bien alignés.